

CÁC PHÉP BIẾN HÌNH DƯỚI CON MẮT ĐẠI SỐ

Trong chương trình hình học lớp 11 cũng như đối với các học sinh chuyên Toán, các phép biến hình (PBH) đã trở nên quen thuộc và là công cụ hữu hiệu để giải các bài toán quỹ tích, dựng hình,... tuy nhiên một điều rất thú vị là các PBH không chỉ thuần túy liên quan đến Hình học mà chúng còn có quan hệ sâu sắc với Đại số. Bài viết này nhằm giới thiệu một phần mối quan hệ trên cùng những ứng dụng mà người viết đã tìm hiểu được.

Trước hết chúng ta hãy cùng xem xét các phép quay, phép đối xứng,... thông qua một tính chất mới của chúng: tính chất **tuyến tính**.

I. PBH tuyến tính:

Một PBH T được gọi là **tuyến tính** nếu nó thỏa 2 tính chất sau đây:

a) Cộng tính: $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v}$.

b) Tỉ lệ: $T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}), \forall \vec{u}, \forall k \in \mathbb{R}$.

Từ tính chất cộng tính của T dễ dàng suy ra là $T(\vec{0}) = \vec{0}$, hay 1 đk cần để T tuyến tính là T phải giữ cố định gốc tọa độ O .

Đến đây các bạn hẳn sẽ đặt ra câu hỏi sau :

Câu hỏi : Các PBH tuyến tính có tính chất gì đặc biệt mà ta cần phải xem xét chúng?

Hóa ra tính chất đặc biệt của PBH tuyến tính là “ta chỉ cần biết được $T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)$ thì sẽ tìm được tất cả các $T(\vec{u})$ với $\vec{u}$ là vector bất kỳ” (ở đây $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ là các vector đơn vị).

Thật vậy, vì mỗi vector $\vec{u}$ bất kỳ đều có biểu diễn là $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ với x, y là các tọa độ của $\vec{u}$ nên ta có:

$$\begin{aligned} T(\vec{u}) &= T(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = T(x\vec{e}_1) + T(y\vec{e}_2) \\ T(\vec{u}) &= xT(\vec{e}_1) + yT(\vec{e}_2) \quad (*) \end{aligned}$$

Đẳng thức trên cho thấy ảnh $T(\vec{u})$ được xác định hoàn toàn từ 2 ảnh $T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)$ của $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, nói cách khác T được xác định hoàn toàn khi biết $T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)$. Do đó để tìm công thức biểu diễn của 1 PBH T ta chỉ cần tìm $T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)$ rồi sử dụng công thức (*) để xác định $T(\vec{u})$.

Lúc này lại xuất hiện tiếp câu hỏi: “Vậy thì các PBH đã học có phải là PBH tuyến tính không?”. Và đối với phép quay, phép đối xứng, phép vị tự, câu trả lời là “có” miễn là các PBH đó giữ cố định gốc tọa độ O , riêng phép tịnh tiến thì không phải là PBHTT mà là PBH affine.

Bây giờ ta hãy thử áp dụng các phân tích trên để đi tìm công thức biểu diễn **phép quay** và **phép đối xứng trục**.

Bài toán 1: *Tìm công thức tọa độ của phép quay.*

Để có tính chất **tuyến tính** thì gốc tọa độ O phải là điểm bất động trong phép quay, do đó trước hết ta chỉ xét những phép quay với tâm O (phép quay với tâm I bất kỳ sẽ được chuyển về trường hợp này bằng cách dùng **phép tịnh tiến theo $\vec{OI}$**).

Xét T là phép quay tâm O , góc α . Theo các phân tích trên ta chỉ cần tìm ảnh của 2 vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Rõ ràng $T(\vec{e}_1) = (\cos \alpha, \sin \alpha), T(\vec{e}_2) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$.

Thế vào công thức (*) ta thu được công thức biểu diễn của phép quay tâm O góc α là:

$$T(\vec{u}) = x(\cos \alpha, \sin \alpha) + y(-\sin \alpha, \cos \alpha) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

hay công thức tọa độ của điểm ảnh

$$(x', y') = T(x, y) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (**)$$

Như vậy ta thấy rõ là chỉ cần lưu lại 2 ảnh

$$T(\vec{e}_1) = (\cos \alpha, \sin \alpha), T(\vec{e}_2) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

hơn nữa ta có thể viết lại công thức (**) thành:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(trong cách viết này tất cả các vectơ đều xuất hiện ở dạng cột)

$$\text{và do đó ma trận } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

được gọi là **ma trận biến đổi** của phép quay tâm O góc α .

Ở đây để phục hồi lại công thức (**) ta định nghĩa **phép nhân 1 ma trận với 1**

vector như sau: “ta lần lượt lấy từng hàng của ma trận nhân với vector cột $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ”

theo kiểu tích vô hướng”, ví dụ: $(\cos \alpha \quad -\sin \alpha) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cos \alpha - y \sin \alpha$

Với cách làm tương tự ta sẽ tìm được lời giải của bài toán 2.

Bài toán 2: *Tìm công thức tọa độ của phép đối xứng trục.*

Ma trận biến đổi của phép đối xứng có trục là đường thẳng (d) đi qua O (tại sao cần đk này?):

$$B = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

trong đó θ là góc tạo bởi đường thẳng (d) và trục hoành Ox .

Tuy nhiên đối với đường thẳng ta hay dùng dạng phương trình tổng quát (tham số, hệ số góc,...). Do đó dùng liên hệ $\tan \theta = \frac{b}{a}$ với $\vec{u} = (a, b)$ là vectơ chỉ phương

của đường thẳng (d) ta chuyển ma trận B thành:

$$B = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix} \quad (\text{các bạn hãy tự kiểm tra lại tính toán nhé})$$

(kq này có trên Wikipedia ☺)

Tổng quát lên, bất kỳ PBH tuyến tính nào cũng được biểu diễn bởi 1 ma trận 2x2 , tức là nếu PBH tuyến tính T biến $\vec{u} = (x, y) \rightarrow \vec{u}' = (x', y')$ thì:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{trong đó } T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

(Nhắc lại là ở đây ta dùng phép nhân ma trận với vectơ như đã định nghĩa ở phía trên).

Và các chương trình đồ hoạ trên vi tính dùng chính ma trận biến đổi này (transformation matrix) để biểu diễn, lưu trữ các PBHTT rất thuận lợi. Nói cách khác, **mỗi PBHTT có thể đồng nhất với 1 ma trận.**

Một điều rất hay nữa của các ma trận biến đổi là dùng chúng ta dễ dàng tìm được công thức của các PBH hợp thành (tích các PBH). Ta hãy cùng xem xét điều này.

Bây giờ để tính toán dễ dàng ta quy ước viết $T\vec{u}$ thay cho $T(\vec{u})$ (cách viết này tận dụng sự giống nhau giữa ánh xạ tuyến tính và phép nhân tỉ lệ với 1 hằng số).

Xét 2 PBHTT T_1, T_2 có ma trận biến đổi lần lượt là:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

(tức là $T_1\vec{u} = A\vec{u}, T_2\vec{v} = B\vec{v}$)

Khi đó:

$$T_1\vec{u} = A\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\text{và } T_2T_1\vec{u} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x' + b_{12}y' \\ b_{21}x' + b_{22}y' \end{pmatrix} \quad (***)$$

thế $x' = a_{11}x + a_{12}y, y' = a_{21}x + a_{22}y$ vào (***) ta tính được:

$$\begin{aligned} b_{11}x' + b_{12}y' &= b_{11}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y) \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y \\ &= \underbrace{(b_{11} \quad b_{12}) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}}_{c_{11}} x + \underbrace{(b_{11} \quad b_{12}) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}}_{c_{12}} y \\ &= c_{11}x + c_{12}y \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} b_{21}x' + b_{22}y' &= \underbrace{(b_{21} \quad b_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}}_{c_{21}} x + \underbrace{(b_{21} \quad b_{22}) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}}_{c_{22}} y \\ &= c_{21}x + c_{22}y \end{aligned}$$

Tóm lại ta thu được ma trận biến đổi của tích 2 PBHTT T_1, T_2 là:

$$T_2 T_1 \vec{u} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \vec{u}$$

trong đó các hệ số c_{ij} trong ma trận C được tính theo quy tắc là:

$c_{ij} = (\text{hàng thứ } i \text{ của ma trận } B) \cdot (\text{cột thứ } j \text{ của ma trận } A)$ (nhân theo kiểu tích vô hướng).

Ma trận C như trên chính là tích của 2 ma trận A và B , ký hiệu $C = A \cdot B$

Như vậy ta có: $T_2 T_1 \vec{u} = (B \cdot A) \vec{u}$ tức là ma trận biến đổi PBH hợp nối là **tích của 2 ma trận ban đầu** và do đó người ta còn dùng thuật ngữ **tích của 2 PBH** $\equiv$ PBH hợp nối.

Bây giờ ta áp dụng công thức tích của 2 ma trận cho 1 số PBH hợp thành cụ thể

1. Tích của 2 phép quay tâm O với 2 góc lần lượt là α_1, α_2 .

Ta đã biết tích của 2 phép quay này là phép quay tâm O, góc $\alpha_1 + \alpha_2$. Áp dụng công thức tích của 2 PBH ta kiểm tra lại xem có khớp hay không:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow T_2 T_1 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 & -(\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1) \\ \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Tích của 2 phép đối xứng trục có trục đối xứng cắt nhau:

Không mất tính tổng quát có thể giả sử 2 trục đối xứng cắt nhau tại O. Ta đã biết kết quả “*tích của 2 phép đối xứng trục cắt nhau là phép quay với tâm quay tại giao điểm 2 trục và góc quay = 2 lần góc tạo bởi 2 trục*”. Việc kiểm tra lại kết quả này bằng *ma trận biến đổi* xin nhường cho các bạn xem như 1 bài tập.

3. Các bạn hãy thử dùng *ma trận biến đổi* để kiểm tra tiếp các kết quả đã biết trong Hình học 11 như: tích của 1 số chẵn (lẻ) phép đối xứng trục có trục đối xứng đồng quy là 1 phép quay (đối xứng trục), tích của 2 phép quay (tâm quay khác nhau) cũng là 1 phép quay,...

Ngoài ra PBHTT còn có tính chất là

- i) PBHTT bảo toàn độ dài đoạn thẳng (phép dời hình) *iff* nó bảo toàn tích vô hướng (TVH).
- ii) Trong mặt phẳng, phép dời hình tuyến tính chỉ có thể là phép quay hoặc phép đối xứng trục.

iii) Các PBHTT mà bảo toàn TVH được gọi là PBH trực giao, và ma trận biến đổi tương ứng được gọi là ma trận trực giao. Thuật ngữ trực giao là do các

$$\text{PBH này bảo toàn sự vuông góc và các vector đơn vị i.e } \begin{cases} (T\vec{e}_1) \cdot (T\vec{e}_2) = 0 \\ (T\vec{e}_1)^2 = (T\vec{e}_2)^2 = 1 \end{cases}$$

iv) Các ma trận trực giao đều có định thức bằng 1 hoặc -1.

v) Các PBHTT bất kỳ bảo toàn sự thẳng hàng.

Các tính chất có thể chứng minh tương đối dễ bằng đại số, coi như là bài tập cho các bạn.

Bây giờ ta chuyển sang tìm hiểu các PBH affine.

II. PBH affine:

Phép tịnh tiến là 1 trường hợp riêng của các PBH affine. Tổng quát thì PBH affine gồm 1 PBHTT “cộng với” 1 phép tịnh tiến i.e sẽ có dạng:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \text{ trong đó } A \text{ là ma trận biến đổi của 1 PBHTT còn } \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \text{ là vector tịnh tiến.}$$

Các PBH affine có những tính chất sau đây:

i) Bảo toàn sự thẳng hàng.

ii) Bảo toàn tỉ lệ giữa các đoạn thẳng (nhưng nói chung không bảo toàn độ dài và không bảo toàn góc), i.e biến trung điểm thành trung điểm, điểm chia theo tỉ số k thành điểm chia theo tỉ số k .

Cũng như các PBHTT, các PBH affine cũng được biểu diễn bằng các ma trận để tiện sử dụng cũng như có thể lấy hợp nối dễ dàng bằng phép nhân ma trận. Tuy nhiên ở đây ta phải biểu diễn như sau:

$$\begin{pmatrix} A & u \\ 00...0 & 1 \end{pmatrix}$$

tức là gắn vector cột $\vec{u}$ vào ma trận A và thêm vào dòng cuối gồm toàn số 0 ngoại trừ dưới vector $\vec{u}$ là số 1.

Ví dụ: phép quay quanh tâm O một góc α rồi tịnh tiến theo vector $\vec{u}$ sẽ có ma trận biểu diễn là:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & u_x \\ \sin \alpha & \cos \alpha & u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sau đây là một số bài tập để các bạn tìm hiểu kỹ hơn về các nội dung đã được nêu ra.

Bài 1. Hãy tìm công thức toạ độ của phép quay tổng quát (tâm là điểm bất kỳ) và phép đối xứng qua đường thẳng bất kỳ.

Bài 2. Tìm ma trận biến đổi của phép vị tự, phép co trục Ox , Oy .

Bài 3. Tìm ma trận biến đổi của phép đồng dạng (vị tự - quay) tâm O .

Đến đây xin tạm dừng bài viết này, mong rằng sẽ có dịp trao đổi tiếp với các bạn về những nội dung khác như PBH phân tuyến tính, PBH trong không gian 3D.

