

ỨNG DỤNG CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA MỘT VÀI DÃY SỐ ĐẶC BIỆT

Dương Bửu Lộc, GV trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa

Trong chương trình đại số 11, việc dạy khái niệm cấp số cộng, cấp số nhân là một vấn đề lý thú, chúng có nhiều ứng dụng trong thực tế và đa số học sinh đều lĩnh hội tốt các khái niệm này. Trong bài viết này ta sẽ đưa ra một ứng dụng của cấp số cộng, cấp số nhân để tìm công thức tổng quát của một vài dãy số đặc biệt.

Ta xét một số bài toán cụ thể như sau:

Bài toán 1. Dãy số (u_n) có tính chất $u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in N^*$ được gọi là một cấp số cộng có công sai là d . Tìm (u_n) theo u_1 và d .

Giải.

Ta có

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 = d + d + \dots + d + u_1 = u_1 + (n-1)d$$

Bài toán 2. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) , công sai d

Giải.

Ta có

$$u_1 + u_n = u_2 - d + u_{n-1} + d = u_2 + u_{n-1} = u_3 - d + u_{n-2} + d = u_3 + u_{n-2} = \dots = u_k + u_{n-k+1}$$

Với $k = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Từ đó } u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}[(u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \dots + (u_n + u_1)] = \frac{1}{2}n(u_1 + u_n)$$

$$\text{Hay } u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \left[u_1 + (n-1) \frac{d}{2} \right]$$

Bài toán 3. Dãy số (u_n) có tính chất $u_{n+1} = u_n q, \forall n \in N^*$ được gọi là một cấp số nhân có công bội là q . Tìm (u_n) theo u_1 và q .

Giải.

$$\text{Ta có } u_n = u_{n-1}q = u_{n-2}q^2 = \dots = u_1 q^{n-1}$$

Bài toán 4. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , công bội $q \neq 1$

Giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (1-q)(u_1 + u_2 + \dots + u_n) &= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) - (u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1}) = u_1 - u_{n+1} \\ &= u_1 - u_1 q^n = u_1(1 - q^n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Bài toán 5. Cho $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 1$. Tìm u_n .

Giải.

Trong bài toán này ta sẽ bị lúng túng ngay vì đây không phải là cấp số cộng hay cấp số nhân đã biết.

Như vậy có cách nào để tìm u_n hay không? Làm sao để mất con số 1 bên vế phải để được một cấp số nhân như ở bài toán 3?

Ta viết lại $u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 1)$ (Tại sao làm được như vậy!) và thấy rằng nếu thay $u_n + 1$ bằng dãy v_n thì (v_n) chính là một cấp số nhân và $v_1 = u_1 + 1 = 2$. Từ đó có $v_n = v_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n \Rightarrow u_n = 2^n - 1$

Bài toán 6. Cho $u_1 = 1, u_{n+1} - u_n = n + 1$. Tìm u_n .

Giải.

Ta viết $n+1 = (n+1)[a(n+1)+b] - n(an+b)$, đồng nhất các hệ số theo n ta tìm được $a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = u_n - \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\text{Đặt } v_n = u_n - \frac{1}{2}n(n+1) \Rightarrow v_1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Từ } v_{n+1} = v_n \text{ với mọi } n \text{ ta suy ra } v_n = 0 \text{ hay } u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Hơn nữa việc viết lại $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1$ sẽ cho ta kết quả sau : $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$

Từ bài toán 6 ta có thể xây dựng bài toán để tính tổng $S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

Bài toán 7. Tìm dấu (u_n) có tính chất $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giải.

$$\text{Ta viết } (n+1)^2 = a[(n+1)^3 - n^3] + b[(n+1)^2 - n^2] + c[(n+1) - n]$$

Cho n lần lượt các giá trị 0, 1, 2

$$\text{ta được hệ phương trình } \begin{cases} a+b+c=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 19a+5b+c=9 \end{cases} . \text{ Giải hệ cho ta } a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{6}$$

$$\text{Từ đó } u_{n+1} - \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = u_n - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ ta được } v_{n+1} = v_n, \forall n \text{ hay } v_n = v_1, \forall n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + v_1 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + u_1 - 1$$

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + u_1$$

$$\text{Vậy } n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Bài toán 8. Cho $u_1 = 1, u_{n+1} - 3u_n = 2^n, \forall n \in N^*$. Tìm (u_n)

Giải

Ta tìm hằng số α sao cho $2^n = \alpha \cdot 2^{n+1} - 3\alpha \cdot 2^n$. Ta được $\alpha = -1$

Và $u_{n+1} + 2^{n+1} = 3(u_n + 2^n)$

Đặt $v_n = u_n + 2^n$ ta được $v_{n+1} = 3v_n, v_1 = 3$

$\Rightarrow v_n = 3^n$

Vậy $u_n = 3^n - 2^n$

Bài toán 9. Cho $u_1 = 1, u_{n+1} - 2u_n = 3^n - n, \forall n \in N^*$. Tìm (u_n)

Bài toán 10. Cho $u_1 = 1, u_{n+1} - 3u_n = 2 \cdot 5^n - 1, \forall n \in N^*$. Tìm (u_n)

Bạn đọc tự giải xem như bài tập

Bài toán 11. Cho $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 1, \forall n \in N^*$. Tìm u_n .

Giải.

Viết lại $(u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = 1$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ ta được $v_{n+1} - v_n = 1$ và $v_1 = u_2 - u_1 = 1$

Suy ra (v_n) là một cấp số cộng có công sai 1.

Vậy $v_n = v_1 + (n-1)1 = n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = n$

$\Rightarrow u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1$

$$= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1) + 1$$

Bài toán 12. Cho $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}, \forall n \in N^*$. Tìm u_n .

Giải.

Viết lại $u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{u_{n+1} - u_n}{2}$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ ta được $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n, v_1 = u_2 - u_1 = 1$

Suy ra $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} + 1 = \frac{5}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-2}}$$

Bài toán 13. Cho $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính u_n .

Giải.

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 2$.

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$ ta được $v_{n+1} = v_n + 2, v_1 = 1$

Suy ra $v_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n-1}$

Bài toán 14. Cho $u_1 = 2, u_2 = 5, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính u_n

Giải.

Viết lại $(u_{n+2} - 3u_{n+1}) - 2(u_{n+1} - 3u_n) = 0$

Đặt $v_n = u_{n+1} - 3u_n$ ta được $v_{n+1} = 2v_n, v_1 = u_2 - 3u_1 = -1$

Suy ra $v_n = -2^{n-1} \Rightarrow u_{n+1} - 3u_n = -2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^n$

$\Rightarrow u_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} = 3 \left(u_n - \frac{1}{2} \cdot 2^n \right)$

Đặt $w_n = u_n - \frac{1}{2} \cdot 2^n$ ta được $w_{n+1} = 3w_n, w_1 = u_1 - 1 = 1$

$\Rightarrow w_n = 3^{n-1} \Rightarrow u_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$

Ta cũng có thể tìm u_n bằng cách sau đây :

$$\begin{aligned} u_n &= (u_n - 3u_{n-1}) + 3(u_{n-1} - \alpha u_{n-2}) + 3^2(u_{n-2} - 3u_{n-3}) + \dots + 3^{n-2}(u_2 - 3u_1) + 3^{n-1}u_1 \\ &= -2^{n-2} + 3(-2^{n-3}) + 3^2(-2^{n-4}) + \dots + 3^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-1} \\ &= 2^{n-1} - 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} = 2^{n-1} + 3^{n-1} \end{aligned}$$

Bài toán 15. Tìm công thức tổng quát của dãy Fibonacci: $u_1 = 1, u_2 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giải.

Gọi α, β là 2 số sao cho $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ (điều này có nghĩa α, β là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$)

Từ giả thiết ta suy ra $u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n)$

Đặt $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ ta được $v_{n+1} = \beta v_n, v_1 = u_2 - \alpha u_1 = 1 - \alpha = \beta \Rightarrow v_n = \beta^n$

Hay $u_{n+1} - \alpha u_n = \beta^n$

$\Rightarrow u_n = (u_n - \alpha u_{n-1}) + \alpha(u_{n-1} - \alpha u_{n-2}) + \alpha^2(u_{n-2} - \alpha u_{n-3}) + \dots + \alpha^{n-2}(u_2 - \alpha u_1) + \alpha^{n-1}u_1$

$$u_n = \beta^{n-1} + \alpha\beta^{n-2} + \alpha^2\beta^{n-3} + \dots + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-1} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Bài toán 16. Cho $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 2n - 1, \forall n \in N^*$. Tìm u_n .
Giải.

Viết lại $(u_{n+2} - u_{n+1}) - 2(u_{n+1} - u_n) = 2n - 1$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$, ta được $v_{n+1} - 2v_n = 2n - 1 = [-2(n+1) - 1] - 2(-2n - 1)$

$\Rightarrow v_{n+1} + 2n + 3 = 2(v_n + 2n + 1), v_1 = 1$

Đặt $w_n = v_n + 2n + 1$ ta được $w_{n+1} = 2w_n, w_1 = v_1 + 3 = 4 \Rightarrow w_n = 2^{n+1}$

$\Rightarrow v_n = 2^{n+1} - 2n - 1 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2n - 1 \Rightarrow u_n - u_{n-1} = 2^n - (2n - 1)$

$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 =$

$= 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^2 - [(2n - 1) + (2n - 3) + \dots + 3] + 1 = 2^{n+1} - n^2 - 2$

Trong trường hợp đã biết số phức ta sẽ giải bài toán sau:

Bài toán 17. Cho $u_1 = 2, u_2 = 1, u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0, \forall n \in N^*$. Tìm u_n

Giải.

Phương pháp giải cũng giống như bài toán 15.

Gọi α, β là 2 số sao cho $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ (điều này có nghĩa α, β là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$)

Từ giả thiết ta suy ra $u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n)$

Đặt $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ ta được $v_{n+1} = \beta v_n, v_1 = u_2 - \alpha u_1 = 1 - 2\alpha = \beta - \alpha$

$\Rightarrow v_n = v_1 \beta^{n-1}$ hay $u_{n+1} - \alpha u_n = v_1 \beta^{n-1}$

$\Rightarrow u_n = (u_n - \alpha u_{n-1}) + \alpha(u_{n-1} - \alpha u_{n-2}) + \alpha^2(u_{n-2} - \alpha u_{n-3}) + \dots + \alpha^{n-2}(u_2 - \alpha u_1) + \alpha^{n-1}u_1$

$u_n = v_1(\beta^{n-2} + \alpha\beta^{n-3} + \dots + \alpha^{n-3}\beta + \alpha^{n-2}) + \alpha^{n-1}u_1 = v_1 \frac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} + 2\alpha^{n-1} = \beta^{n-1} + \alpha^{n-1}$

Ở đây $\alpha = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$

Từ đó

$\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} = \cos(n-1) \frac{\pi}{3} + i \sin(n-1) \frac{\pi}{3} + \cos(n-1) \frac{\pi}{3} - i \sin(n-1) \frac{\pi}{3} = 2 \cos(n-1) \frac{\pi}{3}$

Vậy $u_n = 2 \cos(n-1) \frac{\pi}{3}$

Các bài toán luyện tập

Bài toán 18. Cho $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 2^n - n + 1, \forall n \in N^*$. Tìm u_n

Bài toán 19. Cho $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 3^n + n^2 - n + 1, \forall n \in N^*$. Tìm u_n

Bài toán 20. Cho $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 2^n - n + 1, \forall n \in N^*$. Tìm u_n

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 2 + 4$$

Bài toán 21. Cho dãy (u_n) :

$$u_3 = 3 + 5 + 7$$

$$u_4 = 6 + 8 + 10 + 12$$

$$u_5 = 9 + 11 + 13 + 15 + 17, u_6 = 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24$$

....

....

Tìm $u_{20}; u_n$