

DỒN BIẾN "THỪA – TRỪ"

Võ Quốc Bá Cẩn - ĐH Y Dược Cần Thơ

Phương pháp dồn biến từ khi mới xuất hiện cho đến nay, nó đã thể hiện được vai trò và tính hiệu quả của mình trong việc giải toán bất đẳng thức. Tuy nhiên, phương pháp này có nhiều nhược điểm mà chúng ta, những ai đã từng sử dụng đều dễ dàng nhận thấy. Một trong những nhược điểm của nó là rất khó sử dụng với bất đẳng thức chứa căn và một số bất đẳng thức dạng phân thức (phân thức bậc cao). Bài viết nhỏ này, chúng tôi xin được chia sẻ cùng bạn đọc một phương pháp dồn biến giúp chúng ta giải quyết được khá nhiều bài toán ba biến (mảnh đất màu mỡ nhất của bất đẳng thức hiện nay) thuộc một trong hai dạng trên. Phương pháp này đã giúp chúng tôi giải được khá nhiều bài toán khó mà một vài trong số đó đã từng là những bài toán mở. Chúng tôi xin được gọi đó là phương pháp "dồn biến thừa – trừ".

Để bắt đầu, ta sẽ xét ví dụ sau, một bài toán tưởng chừng như không thể giải bằng dồn biến sơ cấp

Ví dụ 1 Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + ca + a^2}} \geq 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(Xtar)

Lời giải. Để ý rằng bất đẳng thức đã cho có đẳng thức xảy ra tại $a = b, c = 0$ nên nếu dùng dồn biến để giải thì ý tưởng của ta là dồn biến về trung bình cộng. Khi đó, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ và đặt $P(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + ca + a^2}}$, ta phải chứng minh

$$P(a, b, c) \geq P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Đến đây, ta thấy rằng việc tách bình phương $(a - b)^2$ từ

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + ca + a^2}} - \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{c(a+b)}{2} + c^2}}$$

là rất phức tạp, nó phải trải qua nhiều lần trục căn. Vì vậy, dù có tách được thành công thì việc đánh giá của ta lúc sau cũng sẽ khó khăn rất nhiều (phải nói là rất khó). Đây cũng chính là lí do làm ta tưởng như phương pháp dồn biến sơ cấp không hiệu quả cho bài

toán đẹp và khó này. Bây giờ là ý tưởng chính là chúng tôi muốn giới thiệu cùng bạn đọc: Chúng ta điều biết rằng $\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2}}$ (*) và việc tách bình phương từ $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2}} - \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{c(a+b)}{2} + c^2}}$ là rất dễ dàng (chỉ cần một bước trục căn là xong), nên ta nghĩ rằng việc dùng bất đẳng thức (*) chắc sẽ có giúp ích cho việc dồn biên của ta. Nhưng tiếc rằng, bất đẳng thức (*) không đủ mạnh để thực hiện nhiệm vụ này, vì vậy ý tưởng của ta sẽ là thiết lập một đánh giá chặt hơn rất nhiều để sử dụng

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ac+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2}},$$

tương đương

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{1}{a^2+ac+c^2} + \frac{1}{b^2+bc+c^2} - \frac{4}{a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2} \right] &\geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+ac+c^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này có thể được thu gọn thành

$$\begin{aligned} &\frac{2(a-b)^2[(a+b+c)^2-k(a^2+b^2+2c^2+ac+bc)]}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)[a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2]} \geq \\ &\geq \frac{(a-b)^2(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2) \left(\sqrt{a^2+ac+c^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} \right)^2}, \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} &\frac{2[(a+b+c)^2-k(a^2+b^2+2c^2+ac+bc)]}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)[a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2]} \geq \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2) \left(\sqrt{a^2+ac+c^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Cho $a = b = c$, ta tìm được $k \leq \frac{9}{8}$. Vì k càng lớn thì đánh giá của ta sẽ càng chặt, sẽ càng có ích cho ta hơn nên ta có thể thử xét xem với $k = \frac{9}{8}$ thì bất đẳng thức trên có đúng hay không, nhưng vì bài toán chưa được chặt lắm nên ta cũng không cần thiết phải đánh giá "hết ga" như thế, ta sẽ thử với $k = 1$ xem thế nào. Cho $k = 1$ vào, bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)(2ab+ac+bc+2c^2)} \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2},$$

tương đương

$$\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{2ab+ac+bc+2c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2}.$$

Dễ dàng đánh giá được $\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{2ab+ac+bc+2c^2} \geq 1$ và $\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2} \geq a+b+c$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Như vậy, ta đã thiết lập được

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2ab+ac+bc+2c^2}}.$$

Và ta đi đến việc chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2ab+ac+bc+2c^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{3(a+b)^2}{4}}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}+ac+bc+2c^2}}$$

để hoàn thành bước dồn biến. Một công việc khá đơn giản với những bạn nào quen với đạo hàm. Thật vậy, đặt $t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ và xét hàm số

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-c)^2-t}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2t+c+c^2}},$$

ta dễ thấy

$$f'(t) = \frac{1}{2[(1-c)^2-t]^{3/2}} - \frac{2\sqrt{2}}{(2t+c+c^2)^{3/2}} < 0,$$

bởi vì ta có $2[(1-c)^2-t] - (2t+c+c^2) = 2(a^2+ab+b^2) - (2ab+ac+bc+2c^2) \geq 0$ và $\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{(2)^{3/2}} < 0$. Điều này chứng tỏ rằng $f(t)$ là hàm nghịch biến, và chúng ta thu được $f(t) \geq f\left(\frac{(a+b)^2}{4}\right)$. Bước dồn biến đã được hoàn tất, tức là ta có $P(a, b, c) \geq P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$.

Việc còn lại của ta chỉ là chứng minh $P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}$, một công việc khá nhẹ nhàng với phép chọn tham số trong bất đẳng thức AM – GM, xin được dành lại cho bạn đọc phần này. ■

Ví dụ 2 Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{5(a^2+b^2)+8} + \frac{1}{5(b^2+c^2)+8} + \frac{1}{5(c^2+a^2)+8} \leq \frac{1}{6}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Để ý rằng bất đẳng thức trên đạt được dấu đẳng thức khi $a = b = c = 1$ và $a = \frac{13}{5}, b = c = \frac{1}{5}$ nên ý tưởng của ta sẽ là dồn biến về trung bình cộng (dựa trên giả thiết của bài toán). Giả sử $a \geq b \geq c$, đặt $k = \frac{8}{5}$ và $P(a, b, c) = \frac{1}{a^2+b^2+k} + \frac{1}{b^2+c^2+k} + \frac{1}{c^2+a^2+k}$, ta phải chứng minh $P(a, b, c) \leq P\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \leq \frac{3}{k+2}$. Nhưng cũng như bài trước, ta thấy rằng việc tách bình phương $(b-c)^2$ từ hiệu $\frac{1}{a^2+b^2+k} + \frac{1}{a^2+c^2+k} - \frac{2}{a^2+(\frac{b+c}{2})^2+k}$ cũng khá phức tạp và đưa đến bậc cao rất khó đánh giá. Vì vậy, để chứng minh nó, ta sẽ sử dụng ý tưởng sau: Tìm m nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{a^2+b^2+k} + \frac{1}{a^2+c^2+k} \leq \frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này với $(a^2+b^2+k) + (a^2+c^2+k)$ và sử dụng đẳng thức quen thuộc $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - 4 = \frac{(x-y)^2}{xy}$, ta có thể dễ dàng viết lại bất đẳng thức trên như sau

$$\frac{(b^2-c^2)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)} \leq \frac{4m(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2},$$

tương đương

$$\frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)} \leq \frac{4m}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2}.$$

Cho $a = b = c = 1$, ta tìm được $m \geq \frac{2}{k+2}$. Như vậy, ta sẽ thử chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)} \leq \frac{8}{(k+2)[2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2]}.$$

Ta có

$$2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2 \leq 2a^2+b^2+c^2+2k \leq 2(a^2+b^2+k),$$

và

$$\begin{aligned} 4(a^2+c^2+k) - (k+2)(b+c)^2 &\geq 4(b^2+c^2) + k(b+c)^2 - (k+2)(b+c)^2 \\ &= 4(b^2+c^2) - 2(b+c)^2 = 2(b-c)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Do đó, ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+k} + \frac{1}{a^2+c^2+k} \leq \frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2}.$$

Tiếp theo, để hoàn tất bước dồn biến, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{b^2 + c^2 + k} + \frac{4}{2a^2 + b^2 + c^2 + 2k - \frac{2}{k+2}(b-c)^2} \leq \frac{1}{\frac{(b+c)^2}{2} + k} + \frac{4}{2a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} + 2k},$$

tương đương

$$\frac{(b-c)^2}{(b^2 + c^2 + k)[(b+c)^2 + 2k]} \geq \frac{2(2-k)(b-c)^2}{(k+2) \left[2a^2 + b^2 + c^2 + 2k - \frac{2}{k+2}(b-c)^2 \right] \left[2a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} + 2k \right]},$$

hay là

$$\frac{\left[2a^2 + b^2 + c^2 + 2k - \frac{2}{k+2}(b-c)^2 \right] \left[2a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} + 2k \right]}{(b^2 + c^2 + k)[(b+c)^2 + 2k]} \geq \frac{2(2-k)}{k+2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2a^2 + b^2 + c^2 + 2k - \frac{2}{k+2}(b-c)^2 - [(b+c)^2 + 2k] &= 2a^2 - 2bc - \frac{2}{k+2}(b-c)^2 \\ &\geq 2b^2 - 2bc - (b-c)^2 = b^2 - c^2 \geq 0, \end{aligned}$$

và

$$2a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} + 2k - 2(b^2 + c^2 + k) = 2(a^2 - b^2) + \left[\frac{(b+c)^2}{2} - 2c^2 \right] \geq 0,$$

nên

$$VT \geq 2 = \frac{2(2-k)}{k+2} + \frac{4k}{k+2} \geq \frac{2(2-k)}{k+2} = VP.$$

Phép dồn biến được hoàn tất. Và việc còn lại của ta chỉ là chứng minh $P(3-2t, t, t) \leq \frac{3}{k+2}$ với $t = \frac{b+c}{2}$ và $k = \frac{8}{5}$. Bằng cách khai triển và biến đổi tương đương, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{25(5t-1)^2(t-1)^2}{6(5t^2+4)(25t^2-60t+53)} \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Nhận xét 1 Qua lời giải này, ta có thể thấy tập hợp tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + k} + \frac{1}{b^2 + c^2 + k} + \frac{1}{c^2 + a^2 + k} \leq \frac{3}{k+2}$$

đúng với $a, b, c > 0, a + b + c = 3$ là $k \geq \frac{8}{5}$.

Ngoài ra, trường hợp $k = 2$ chính là bài toán thi chọn đội tuyển Iran năm 2009.

Sau đây là một số hai ví dụ khá đẹp khác

Ví dụ 3 Cho các số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{ab}{a^2 + b^2 + 3c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 + 3a^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 + 3b^2} \leq \frac{3}{5}.$$

(Phạm Kim Hùng, Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, ta sẽ chứng minh

$$\frac{bc}{b^2 + c^2 + 3a^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 + 3b^2} \leq \frac{c(a+b) + \frac{18}{25}(a-b)^2}{2a^2 + 2b^2 + c^2}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$c \left[\frac{b(2a^2 + 2b^2 + c^2)}{b^2 + c^2 + 3a^2} + \frac{a(2a^2 + 2b^2 + c^2)}{c^2 + a^2 + 3b^2} - a - b \right] \leq \frac{18}{25}(a-b)^2.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{b(2a^2 + 2b^2 + c^2)}{b^2 + c^2 + 3a^2} + \frac{a(2a^2 + 2b^2 + c^2)}{c^2 + a^2 + 3b^2} - a - b &= \frac{a(a^2 - b^2)}{c^2 + a^2 + 3b^2} + \frac{b(b^2 - a^2)}{b^2 + c^2 + 3a^2} \\ &= \frac{(a-b)^2(a+b)(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab)}{(3a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 3b^2 + c^2)}, \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\frac{c(a-b)^2(a+b)(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab)}{(3a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 3b^2 + c^2)} \leq \frac{18}{25}(a-b)^2,$$

tương đương

$$9c(a+b) \cdot 2(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab) \leq \frac{18^2}{25}(3a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 3b^2 + c^2).$$

Áp dụng các bất đẳng thức AM – GM và *Cauchy Schwarz*, ta được

$$9c(a+b) \cdot 2(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab) \leq \left[\frac{9c(a+b) + 2(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab)}{2} \right]^2,$$

và

$$(3a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 3b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + 2ab + c^2)^2.$$

Lại có

$$\begin{aligned}
& 36(a^2 + b^2 + 2ab + c^2) - 5[9c(a + b) + 2(3a^2 + 3b^2 + c^2 + 2ab)] \\
&= 6a^2 + 6b^2 + 26c^2 - 45c(a + b) + 52ab \\
&= 26(c - a)(c - b) + 6a^2 + 6b^2 - 19c(a + b) + 26ab \\
&\geq 6a^2 + 6b^2 - 19c(a + b) + 26ab \geq 38ab - 19c(a + b) \geq 0,
\end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{ab}{a^2 + b^2 + 3c^2} + \frac{c(a + b) + \frac{18}{25}(a - b)^2}{2a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2(a^2 + b^2 + 3c^2)} + \frac{c\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{2a^2 + 2b^2 + c^2},$$

tương đương

$$\frac{(a - b)^2}{2(a^2 + b^2 + 3c^2)} + \frac{c(a - b)^2}{(2a^2 + 2b^2 + c^2) \left[\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b \right]} \geq \frac{18(a - b)^2}{25(2a^2 + 2b^2 + c^2)}.$$

Do $\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b \leq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{2(2t^2 + 3c^2)} + \frac{c}{4t(4t^2 + c^2)} \geq \frac{18}{25(4t^2 + c^2)} \quad \left(t = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right),$$

tương đương

$$\frac{2(4t^2 + c^2)}{2t^2 + 3c^2} + \frac{c}{t} \geq \frac{72}{25}.$$

Ta có

$$\frac{2(4t^2 + c^2)}{2t^2 + 3c^2} + \frac{c}{t} - 3 = \frac{(t - c)(2t^2 + 4tc - 3c^2)}{t(2t^2 + 3c^2)} \geq 0,$$

mà $\frac{72}{25} < 3$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Cuối cùng, ta đi đến việc chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{t^2}{2t^2 + 3c^2} + \frac{2tc}{4t^2 + c^2} \leq \frac{3}{5}.$$

Không mấy khó khăn, ta có thể phân tích

$$\frac{t^2}{2t^2 + 3c^2} + \frac{2tc}{4t^2 + c^2} - \frac{3}{5} = -\frac{(t - c)^2(2t - 3c)^2}{5(2t^2 + 3c^2)(4t^2 + c^2)} \leq 0,$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng và phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}c$ cùng các hoán vị. ■

Ví dụ 4 Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a^2 - 27}{b^2 + c^2} + \frac{4b^2 - 27}{c^2 + a^2} + \frac{4c^2 - 27}{a^2 + b^2} + \frac{69}{2} \geq 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Với chú ý rằng $\frac{4a^2 - 27}{b^2 + c^2} + 4 = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2) - 27}{b^2 + c^2}$, ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$(4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 27) \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \right) + \frac{45}{2} \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 27 \geq 4a^2 + 2(b + c)^2 - 27$, nên bất đẳng thức trên được suy ra từ

$$[4a^2 + 2(b + c)^2 - 27] \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \right) + \frac{45}{2} \geq 0.$$

Nếu $4a^2 + 2(b + c)^2 - 27 \geq 0$ thì bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Trong trường hợp ngược lại, áp dụng bất đẳng thức mà ta đã thiết lập trong **Ví dụ 2** ở trên, ta có

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + k} + \frac{1}{b^2 + c^2 + k} + \frac{1}{c^2 + a^2 + k} \leq \frac{2}{a^2 + \frac{(b+c)^2}{4} + k} + \frac{1}{\frac{(b+c)^2}{2} + k}$$

với mọi $k \geq 0$. Từ đó, đặt $t = \frac{b+c}{2}$ và cho $k = 0$, ta thu được

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \leq \frac{2}{a^2 + t^2} + \frac{1}{2t^2}.$$

Do $4a^2 + 8t^2 - 27 \leq 0$ nên

$$(4a^2 + 8t^2 - 27) \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \right) \geq (4a^2 + 8t^2 - 27) \left(\frac{2}{a^2 + t^2} + \frac{1}{2t^2} \right).$$

Vì thế, ta chỉ cần chứng minh được

$$[4a^2 + 8t^2 - 3(a + 2t)^2] \left(\frac{2}{a^2 + t^2} + \frac{1}{2t^2} \right) + \frac{45}{2} \geq 0.$$

Bằng một vài tính toán đơn giản, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với $\frac{(a-t)^2(a-5t)^2}{2t^2(a^2+t^2)} \geq 0$ là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = \frac{15}{7}, b = c = \frac{3}{7}$ và các hoán vị tương ứng. ■

Nhận xét 2 Mời bạn đọc cùng chứng minh kết quả sau
Tập hợp tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức

$$\frac{a^2 + k}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + k}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + k}{a^2 + b^2} \geq 3(k + 1)$$

đúng với mọi a, b, c dương sao cho $a + b + c = 3$ là $-\frac{27}{4} \leq k \leq \frac{9}{7}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq \frac{3}{2}.$$

(Phạm Kim Hùng)

2. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + ab + b^2)(a^2 + ac + c^2)}} \geq 4 + \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quang Hùng)

3. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\sqrt{a + k(b - c)^2} + \sqrt{b + k(c - a)^2} + \sqrt{c + k(a - b)^2} \leq \sqrt{3}.$$

(Phan Thành Việt)

4. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{1}{\sqrt{a + k(b - c)^2}} + \frac{1}{\sqrt{b + k(c - a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{c + k(a - b)^2}} \geq 3\sqrt{3}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

5. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng khi đó

$$\frac{1}{(b + c)^2 + 6} + \frac{1}{(c + a)^2 + 6} + \frac{1}{(a + b)^2 + 6} \geq \frac{3}{10}.$$

(Dương Đức Lâm)

6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sqrt{8a^2 + 1} + \sqrt{8b^2 + 1} + \sqrt{8c^2 + 1} \leq 3(a + b + c).$$

(Gabriel Dospinescu)