

MÔN: TOÁN (VÒNG 2)

Câu I (2,5 điểm)

1) (1,5 điểm) Cộng hai phương trình của hệ ta được

$$(x+2y)^2 + (x+2y) = 12 \Rightarrow \begin{cases} x+2y = 3 \\ x+2y = -4 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x+2y = 3 \\ 4xy + x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x+2y = -4 \\ 4xy + x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = -4 \\ 4xy = 11 \end{cases} \text{ Hệ này vô nghiệm}$$

$$\text{Vậy hệ có hai nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) (1,0 điểm): Áp dụng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{a^2}(b^2 + c^2) + a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{4a^2}{b^2 + c^2} = \\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{3a^2}{b^2 + c^2} \geq 2\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{b^2 + c^2}} + 3 = 5 \end{aligned}$$

$$P_{\min} = 5 \text{ đạt được khi } b^2 + c^2 = a^2 \text{ và } b = c$$

Câu II (2,5 điểm)

1) (1,5 điểm) Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-y)^2 + 4x^2 = 17 \Rightarrow x^2 \leq \frac{17}{4}$$

$$\text{vậy: } x^2 \in \{0, 1, 4\}$$

$$a) x^2 = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 17 \text{ (loại)}$$

$$b) x^2 = 1 \Rightarrow (x-y)^2 = 13 \text{ (loại)}$$

$$c) x^2 = 4 \Rightarrow (x-y)^2 = 1$$

$$\text{Với } x = 2 \text{ ta có: } (2-y)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -2 \text{ ta có: } (-2-y)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

2) (1,0 điểm) Ta biểu diễn p dưới dạng $3k$, $3k + 1$ và $3k + 2$

Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p^4 + 2 = (3k + 1)^4 + 2 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p^4 + 2$ không là số nguyên tố

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p^4 + 2 = (3k + 2)^4 + 2 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p^4 + 2$ không là số nguyên tố

Nếu $p = 3k$. Vì p là nguyên tố $\Rightarrow p = 3$

khi đó $p^4 + 2 = 81 + 2 = 83$ nguyên tố. Vậy $p = 3$ là nghiệm duy nhất.

Câu III (3,0 điểm)

1) (1,5 điểm): Kéo dài AB cắt CD tại H

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$

$\Rightarrow B$ là trực tâm của ΔDAC

2) (1,5 điểm) Ta có $\widehat{AFC} = \widehat{AEC} = 45^\circ \Rightarrow$

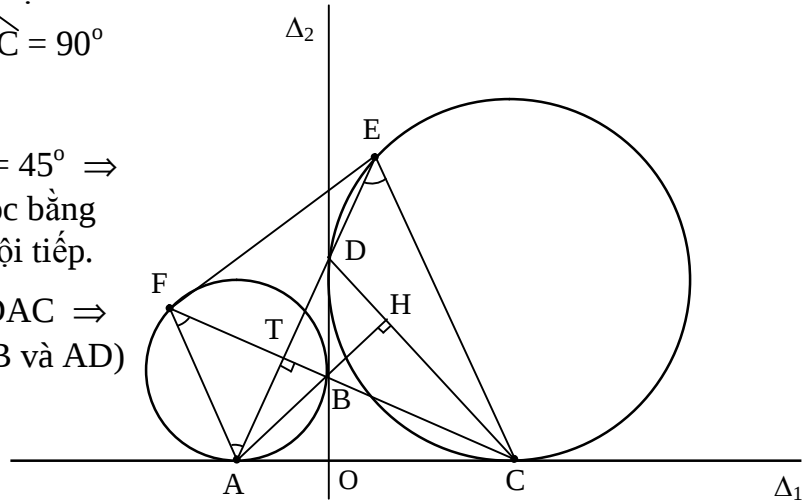
F và E cùng nhìn AC dưới một góc bằng $45^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ACEF$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác do B là trực tâm của $\Delta DAC \Rightarrow \widehat{FTA} = 90^\circ$ (T là giao điểm của CB và AD)

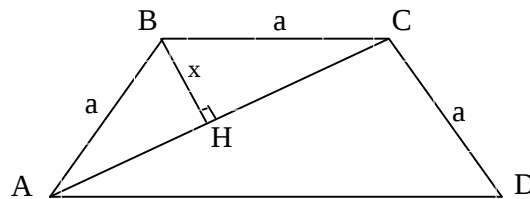
Do $\widehat{TFA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{TAF} = 45^\circ$

Từ $\widehat{TAF} = \widehat{AEC} = 45^\circ \Rightarrow AF \parallel CE$

Tứ giác nội tiếp $ACEF$ có $AF \parallel CE \Rightarrow ACEF$ là hình thang cân.



Câu IV (1,0 điểm)



Giả sử tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$

Hạ $BH \perp AC$, đặt $BH = x$ ($0 < x < a$). Khi đó: $AH = HC = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$S_{\Delta ABC} = BH \cdot AH = x \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S_{\Delta ACD} \leq \frac{AC \cdot CD}{2} = a \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{dấu bằng đạt được khi } \widehat{ACD} = 90^\circ)$$

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} \leq (a+x) \sqrt{a^2 - x^2} =$$

$$\sqrt{(a+x)^2(a^2 - x^2)} = \sqrt{(a+x)^3(a-x)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}(a+x)^3(3a-3x)} = \sqrt{\frac{1}{3}(a+x)(a+x)(a+x)(3a-3x)}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{a+x+a+x+a+x+3a-3x}{4}\right)^4} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

Vậy $S_{ABCD} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, dấu bằng đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+x=3a-3x \\ \widehat{ACD}=90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ \widehat{ACD}=90^\circ \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Điều kiện (1) $\leftrightarrow \widehat{ABH}=60^\circ \leftrightarrow \widehat{ABC}=120^\circ$
 Do $\widehat{BCA}=30^\circ$ và $\widehat{ACD}=90^\circ \rightarrow \widehat{BCD}=120^\circ$

Vậy S_{ABCD} lớn nhất bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, đạt được khi $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=120^\circ$

Câu V: (1,0 điểm)

Ta có: $\sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt{a_n} + \sqrt{3(1+a_n)}$ (1)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a_{n+1} &= 4a_n + 3 + 3a_n + 4\sqrt{3a_n(1+a_n)} \\ &= 4(1+a_n) + 3a_n + 2\sqrt{4(1+a_n)3a_n} - 1 = (2\sqrt{1+a_n} + \sqrt{3a_n})^2 - 1 \\ \Rightarrow \sqrt{a_{n+1}+1} &= 2\sqrt{1+a_n} + \sqrt{3a_n} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{1+a_{n+1}} - \sqrt{a_{n+1}} &= 2\sqrt{1+a_n} - \sqrt{3(1+a_n)} - (2\sqrt{a_n} - \sqrt{3a_n}) \\ &= (2-\sqrt{3})(\sqrt{1+a_n} - \sqrt{a_n}) \end{aligned}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+a_n} - \sqrt{a_n} &= (2-\sqrt{3})(\sqrt{1+a_{n-1}} - \sqrt{a_{n-1}}) = (2-\sqrt{3})^2(\sqrt{1+a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-2}}) \\ &= (2-\sqrt{3})^n(\sqrt{1+a_0} - \sqrt{a_0}) = (2-\sqrt{3})^n \quad (3) \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+a_{n+1}} + \sqrt{a_{n+1}} &= 2(\sqrt{1+a_n} + \sqrt{3(1+a_n)}) + 2\sqrt{a_n} + \sqrt{3a_n} = (2+\sqrt{3})(\sqrt{1+a_n} + \sqrt{a_n}) \\ \Rightarrow \sqrt{1+a_n} + \sqrt{a_n} &= (2+\sqrt{3})^n \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (3) và (4)

$$\Rightarrow 2\sqrt{a_n} = (2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{4}[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n]^2, (\text{đpcm}).$$

TRƯỞNG TIỂU BAN CHẤM THI
MÔN TOÁN HỌC

Hà Nội, ngày 14 tháng 6 năm 2007
KT. HIỆU TRƯỞNG TRƯỜNG ĐH KHTN
PHÓ HIỆU TRƯỞNG

PGS.TS. Bùi Duy Cam