

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN (VÒNG 2)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN NĂM 2008

Câu I: (3 điểm)

1) (2 điểm) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} -6xy(2x-y) = -6 \\ (2x)^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ ta thu được

$$(2x-y)^3 = 1 \Rightarrow 2x-y = 1$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ $\Rightarrow xy = 1$

$$\text{Từ } \begin{cases} 2x-y=1 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}$$

2) (1 điểm)

Cách thứ nhất:

$$y = x + 2\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)} \leq x + \frac{1}{2} + (1-x) = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng đạt được khi $x = \frac{1}{2}$

Cách thứ hai:

Đặt $\sqrt{1-x} = t \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ và $x = 1-t^2$

$$\Rightarrow y = -t^2 + \sqrt{2}t + 1 = -(t - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng đạt được khi $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y_{\max} = \frac{3}{2}$$

Câu II: (3 điểm)

1) (2 điểm) Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x+y+1)(x+y+1) = -1$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x+y+1=1 \\ x+y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x+y+1=-1 \\ x+y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

2) (1 điểm) : Ta phải có

$$abc \mid (ab-1)(bc-1)(ca-1)$$

$$\Leftrightarrow abc \mid -1 + ab + bc + ca - abc(a+b+c) + (abc)^2$$

$$\Leftrightarrow abc \mid ab + bc + ca - 1$$

Không mất tổng quát có thể giả sử $1 \leq a \leq b \leq c$

Ta có $abc \leq ab + bc + ca - 1 < ab + bc + ca < c(2a+b)$

$$\Rightarrow ab < 2a + b \leq 3b \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a \in \{1, 2\}$$

❖ Xét trường hợp $a = 1$ ta có:

$$bc \mid bc + b + c - 1 \Rightarrow bc \mid b + c - 1$$

$$\Rightarrow bc \leq b + c - 1 \Rightarrow (b-1)(c-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow (b-1)(c-1) = 0$$

$$\text{Với } a = 1, b = 1 \text{ ta có : } \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} = 0 \quad \forall c$$

Vậy trong trường hợp này ta thu được nghiệm : $a = 1, b = 1, c$ nguyên dương tùy ý.

Do vai trò của a, b, c như nhau trong ba số a, b, c có hai số bằng 1 và một số nguyên dương tùy ý là đáp số của bài toán.

❖ Xét trường hợp $a = 2$

$$2bc \mid 2(b+c) + bc - 1 \Rightarrow 2bc \mid 4(b+c) + 2bc - 2$$

$$\Rightarrow 2bc \mid 4(b+c) - 2 \Rightarrow bc \mid 2(b+c) - 1$$

$$\Rightarrow bc \leq 2(b+c) - 1 \Rightarrow (b-2)(c-2) \leq 3$$

$$\Rightarrow (b-2)(c-2) \in \{0, 1, 2, 3\}$$

a) Nếu $(b-2)(c-2) = 0 \Rightarrow$ nếu $c = 2 \rightarrow b = 2$

$$\text{Lúc đó } P = \frac{3(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} = \frac{3.3.3}{2.2.2} = \frac{27}{8} \text{ (loại)}$$

$$\text{Nếu } b = 2 \Rightarrow P = \frac{3(2c-1)^2}{4c} \text{ không là số nguyên } \Rightarrow \text{ loại}$$

b) Nếu $(b-2)(c-2) = 1 \Rightarrow b = 3, c = 3$

$$P = \frac{25.8}{2.3.3} = \frac{100}{9} \text{ (loại)}$$

c) Nếu $(b-2)(c-2) = 2 \Rightarrow b = 3, c = 4$ Lúc đó $P = \frac{5.11.7}{2.3.4} \text{ (loại)}$

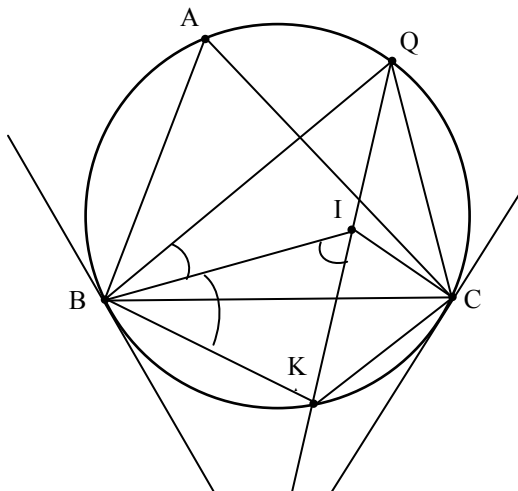
d) Nếu $(b-2)(c-2) = 3 \Rightarrow b = 3, c = 5$ Lúc đó $P = \frac{5.14.9}{2.3.5} = 21 \text{ (thỏa mãn)}$

Vậy ta được đáp số $a = 2, b = 3, c = 5$

Do vai trò của a, b, c như nhau nên trong trường hợp này các nghiệm của bài toán là các hoán vị của $(2, 3, 5)$.

Câu III: (3 điểm)

1) (1,5 điểm)



Giả sử phân giác của góc $\angle KBQ$ cắt PQ tại I . P

Nối IC ta chứng minh rằng CI là phân giác của góc $\angle KCQ$

Ta có $\angle BIP = \angle IBQ + \angle IQB$

Nhưng $\angle IBQ = \angle IBK$ (phân giác)

$\angle IQB = \angle KBP$ (góc nội tiếp)

$\Rightarrow \angle BIP = \angle IBP \Rightarrow \triangle PBI$ cân tại đỉnh P . Do $PB=PC \Rightarrow \triangle PCI$ cân tại đỉnh P

Ta có : $\angle PIC = \angle PQC + \angle QCI$

$\angle PCI = \angle KCI + \angle KCP$

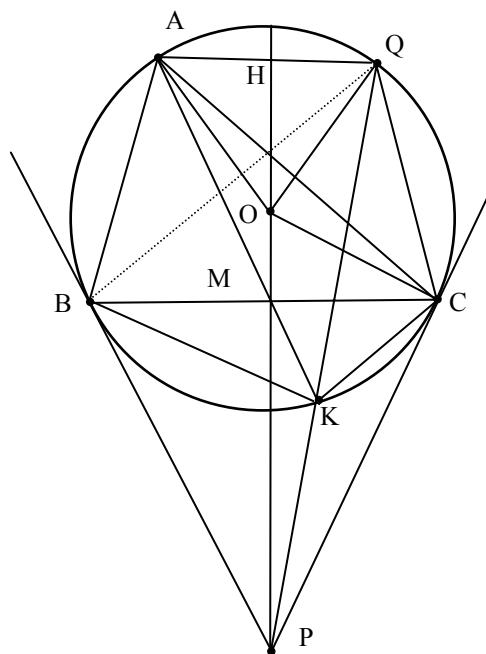
Do $\triangle PCI$ cân tại P nên $\angle PIC = \angle PCI$

$\Rightarrow \angle PQC + \angle QCI = \angle KCI + \angle KCP$

Nhưng do $\angle PQC = \angle KCP$ (góc nội tiếp)

$\Rightarrow \angle QCI = \angle KCI \Rightarrow CI$ là phân giác của góc $\angle KCQ \Rightarrow$ điều phải chứng minh

2)(1,5 điểm)



Cách thứ nhất: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Ta có : $PC^2 = PM \cdot PO$

$PC^2 = PK \cdot PQ$

$\Rightarrow PM \cdot PO = PK \cdot PQ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $KMOQ$ nội tiếp

$$\Rightarrow \angle AKQ = \angle QOH$$

Do $\angle AKQ = \frac{1}{2} \angle QOA \Rightarrow \angle QOH = \angle AOH \Rightarrow OH$ là phân giác của tam giác cân OAQ

$\Rightarrow OH \perp AQ \Rightarrow AQ \parallel BC$ vì cùng vuông góc với PH

Cách thứ hai:

$$\Delta MKC \sim \Delta MBA \Rightarrow \frac{MC}{KC} = \frac{MA}{BA} \quad (1)$$

$$\Delta MKB \sim \Delta MCA \Rightarrow \frac{MB}{KB} = \frac{MA}{CA} \quad (2)$$

$$\text{Chia (1) cho (2) về theo vế} \Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{CA}{BA} \quad (3)$$

Mặt khác, theo kết quả của câu 1) ta có

$$\frac{KB}{QB} = \frac{KC}{QC} \Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{QB}{QC} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{QB}{QC}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta QBC \Rightarrow \angle ACB = \angle QBC = \angle AQB \Rightarrow AQ \parallel BC$$

Câu IV: (1 điểm)

Ta chứng minh rằng với $|x| \geq 2$ thì

$$|x|^n > |x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + |x| + 1$$

$$\text{Thực vậy, ta có } |x|^n - 1 = (x - 1)(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + |x| + 1)$$

$$\text{Do } |x| \geq 2 \Rightarrow |x| - 1 \geq 1 \Rightarrow |x|^n - 1 \geq |x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + |x| + 1$$

$$\Rightarrow |x|^n > |x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + |x| + 1 \quad (1)$$

Do a_i nhận các giá trị $0, \pm 1$ nên ta có

$$|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + |x| + 1 \geq |a_1 x^{n-1}| + |a_2 x^{n-2}| + \dots + |a_n x| + |a_n|$$

$$\geq |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n| \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ với $|x| \geq 2$ thì

$$|a_0 x^n| = |x|^n > |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n| \quad (3)$$

Chú ý rằng nếu $|a| > |b|$ thì $a+b$ và a cùng dương hoặc cùng âm (thật vậy,

$$a(a+b) = a^2 + ab \geq a^2 - |ab| = a(|a| - |b|) > 0$$

Do đó từ (3) với $|x| \geq 2$, ta có:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \text{ và } a_0 x^n \text{ cùng dương hoặc cùng âm } (a_0 x^n \neq 0) \text{ Do vậy}$$

phương trình đã cho không có nghiệm x mà $|x| \geq 2$

Vậy, nếu phương trình có nghiệm x_0 thì $|x_0| < 2$.

TRƯỞNG TIỂU BAN CHẤM THI
MÔN TOÁN

Hà Nội, ngày tháng 6 năm 2008
HIỆU TRƯỞNG
CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH

