

IMO 2009
Bremen, Germany

Ngày thứ nhất:

Bài 1:

Cho n là một số nguyên dương và $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) là các số nguyên dương phân biệt trong tập $1, 2, \dots, n$ sao cho n chia hết cho $a_i(a_{i+1} - 1)$, $i = 1, k-1$. Chứng minh rằng n không chia hết cho $a_k(a_1 - 1)$

Ross Atkins, Australia

Bài 2:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. P, Q là hai điểm nằm trong phần trong của các đoạn thẳng CA và AB. Lấy K, L, M lần lượt là trung điểm của các đoạn BP, CQ và PQ. Gọi Γ là đường tròn đi qua K, L và M. Giả sử PQ là tiếp tuyến của đường tròn Γ . Chứng minh rằng $OP = OQ$

Sergei Berlov, Russia

Bài 3:

Giả sử $s_1, s_2, \dots, s_n$ là một dãy tăng ngặt các số nguyên dương thỏa mãn các dãy con $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots$ và $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$ là các cấp số cộng. Chứng minh rằng dãy $s_1, s_2, \dots, s_n$ chính nó cũng là một cấp số cộng.

Gabriel Carroll, USA

Ngày thứ 2:

Bài 1:

Cho tam giác ABC với $AB = AC$. Đường phân giác của các góc $\angle CAB$ và $\angle ABC$ cắt các cạnh BC và CA ở D và E. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADC. Giả sử rằng $\angle BEK = 45^\circ$. Tìm tất cả các giá trị có thể có của góc $\angle CAB$

Jan Vonk, Belgium, Peter Vandendriessche, Belgium and Hojoo Lee, Korea

Bài 2:

Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập các số nguyên dương và nhận giá trị nguyên dương thỏa mãn với mọi số nguyên dương a và b thì 3 số sau là ba cạnh của một tam giác: $a, f(b)$ và $f(b + f(a) - 1)$

Bài 3:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên dương phân biệt và M là tập $n-1$ các số nguyên dương không chứa $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Một con châu chấu nhảy trên đường thẳng thực, bắt đầu từ gốc O và thực hiện n bước nhảy sang phải với độ dài $a_1, a_2, \dots, a_n$ theo một thứ tự nào đó. Chứng minh rằng ta có thể chọn một thứ tự nhảy sao cho con châu chấu không nhảy qua bất kì một điểm nào thuộc M