0.1 Phương pháp phân tích bình phương S.O.S

0.1.1 Bài toán mở đầu

Thông thường khi đứng trước một bài toán quen biết, cách mà chúng ta thường bắt đầu để giải quyết chúng không phải là thử mò mẫm các bất đắt thức đã biết, không phải là tìm ngay một cách dồn biến nào đó mà thông thường nhất là đưa về các dạng bình phương. Điều này dựa trên tính chất cở bản nhất của số thực : $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in R$. Có rất nhiều bài toán, cho dù bạn chủ động hay vô tình, đều đã sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Tuy nhiên, rất có thể những điều bạn sắp đọc được trong mục này sẽ làm bạn thực sự ngạc nhiên...

Chúng ta sẽ mở đầu với bất đẳng thức $AM - GM$, đây có thể coi là bất đẳng thức cơ bản nhất trong những bất đẳng thức cơ bản. Nhưng chúng ta chỉ tìm hiểu bất đẳng thức này trong trường hợp các số n rất nhỏ. Với $n = 2$ chẳng hạn, ta có bất đẳng thức

Ví dụ 0.1.1. *Với mọi $a, b \geq 0$ ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$*

Sẽ không có nhiều điều cần phải bàn tới ở bất đẳng thức trên, ngay khi các bạn học về số thực thì việc chứng minh bất đẳng thức đó đã là quá dễ. Bất đẳng thức tương đương với $(a-b)^2 \geq 0$, một điều quá hiển nhiên. Bây giờ, chúng ta xét tiếp khi $n = 3$ và bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 0.1.2. *Với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$*

Khi hỏi về một chứng minh thật cụ thể cho bất đẳng thức này, chúng ta sẽ cảm thấy một chút bối rối. Tất nhiên, bất đẳng thức trên không khó, lời giải chỉ trong duy nhất một dòng ...

$$VT - VP = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right)$$

Và chắc chắn đây là cách làm thông minh nhất, vì chúng ta không phải qua một bước trung gian nào cả. Cả 2 ví dụ trên đều được chứng minh bằng phương pháp phân tích bình phương, nhưng theo một nghĩa tương đối hẹp. Thuận lợi rất lớn trong lời giải bài toán bằng cách này là việc sử dụng rất ít kiến thức cao cấp, thậm chí bạn không cần biết bất kì một định lí về bất đẳng thức nào cả. Ngoài ra, nó còn là một phương pháp rất tự nhiên theo suy nghĩ của chúng ta.

Nếu đọc kĩ các bài toán ở chương trước, các bạn đã gặp không ít những bài toán sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Còn bây giờ, chúng ta sẽ khái quát cách sử dụng và đi tìm bản chất của một phương pháp chứng minh cực kì hiệu quả.

Bài toán quan trọng mà chúng ta phải xem xét đến trong mục này là một bất đẳng thức nổi tiếng đã được giới thiệu ở chương trước, bất đẳng thức *Iran 96*.

BĐT * 1 (Iran 98). *Với mọi số thực không âm* a, b, c *ta có*

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

Đây cũng là bài toán có hình thức phát biểu rất đơn giản và đẹp mắt. Ngoài ra, nó còn là một bất đẳng thức rất khó khi bạn chưa được tiếp cận trước đó. Nhưng trước tiên, chúng ta hãy xem lại bất đẳng thức trong kì thi IMO 2005 và tìm một chứng minh thật tự nhiên cho nó.

Ví dụ 0.1.3 (IMO 2005 Pro. A3). *Giả sử* x, y, z *là các số thực dương và* $xyz \geq 1$. *Hãy chứng minh rằng*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+y^2+x^2} \geq 0$$

LỜI GIẢI. Việc đầu tiên, ta cần đưa bất đẳng thức về dạng chuẩn hoá- đồng bậc.

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^5-x^2.xyz}{x^5+(y^2+z^2)xyz} = \frac{x^4-x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)}$$
$$\frac{x^4-x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)} \geq \frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)}$$

Nếu đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ thì ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{a,b,c} \frac{2c^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{a,b,c} (a-b)\frac{a}{2a^2+(b+c)^2} - \frac{b}{2b^2+(a+c)^2}) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{a,b,c} (a-b)^2 \frac{c^2+c(a+b)+a^2-ab+b^2}{(2a^2+(b+c)^2)(2b^2+(a+c)^2)} \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Chứng minh trên không phải là chứng minh duy nhất, và có thể còn có nhiều chứng minh độc đáo hơn. Nhưng nếu xem xét khách quan thì chứng minh trên hoàn toàn rất tự nhiên và cơ bản. Nói khái quát, khi đứng trước một bất đẳng thức bất kì của 3 biến a, b, c, ta sẽ tìm cách đưa chúng về dạng tổng của các bình phương kí hiệu

$$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq 0$$

Phần đưa về dạng chính tắc trên là bước đầu tiên trong cách sử dụng phương pháp S.O.S. Nếu bạn đã khá quen với bất đẳng thức thì việc lập công thức trên là tương đối đơn giản, chỉ cần biết qua một số phép biến đổi và hằng đẳng thức, còn nếu bạn chưa quen, thì các thắc mắc sẽ được giải quyết trong mục "Biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S và một số kĩ thuật phân tích".

Tất nhiên, nếu trong biểu diễn cơ sở đó các hệ số S_a, S_b, S_c đều không âm thì bài toán được chứng minh. Từ trước tới nay, đây vẫn là cách mà cách bạn thường làm nhưng đây chỉ là trường hợp đơn giản nhất trong kĩ thuật chứng minh của phương pháp S.O.S. Điều quan trọng hơn. S.O.S giúp chúng ta giải quyết trong các trường hợp mà theo quan nệm cũ là không thể áp dụng được : Có một số hệ số trong S_a, S_b, S_c là không dương.

Thông thường, trong các bài toán đối xứng ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Với các bài toán hoán vị thì phải xét thêm trường hợp $c \geq b \geq a$. Trong trường hợp $a \geq b \geq c$ ta có các nhận xét sau

1. *Nếu $S_b \geq 0$: Do $(a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$ nên*

   $$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (S_c+S_b)(a-b)^2 + (S_b+S_a)(b-c)^2$$

   Và phần còn lại của bài toán là chứng minh $S_a + S_b \geq 0$, $S_c + S_b \geq 0$. Nhưng 2 bất đẳng thức này luôn có thể chứng minh khá đơn giản, vì chúng không còn phải nhân thêm với các bình phương $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ nữa.

2. *Nếu $S_b \leq 0$: Do $(a-c)^2 \leq 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$ nên*

   $$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (S_c+2S_b)(a-b)^2 + (2S_b+S_a)(b-c)^2$$

   Cũng vậy, việc chứng minh còn lại $S_c + 2S_b \geq 0$ và $2S_b + S_a \geq 0$ sẽ đơn giản hơn rất nhiều.

Trong nhiều trường hợp, ta cần thêm một số ước lượng mạnh hơn, chẳng hạn ước lượng hay dùng đến là

$$\frac{a-c}{b-c} \geq \frac{a}{b} (a \geq b \geq c)$$

Chẳng hạn khi ta có $S_b, S_c \geq 0$ thì

$$S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 = (b-c)^2 \left(S_b(\frac{a-c}{b-c})^2 + S_a \right) \geq (b-c)^2(\frac{a^2 S_b}{b^2} + S_b)$$

Và như vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu $a^2S_b + b^2S_a \geq 0$.
Ta có thể tóm tắt các kết quả trên thành một định lí như sau

Định lý 0.1 (Định lí S.O.S). *Xét biểu thức*

$$S = f(a,b,c) = S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2$$

Trong đó S_a, S_b, S_c là các hàm số của a, b, c.

1. *Nếu $S_a, S_b, S_c \geq 0$ thì $S \geq 0$.*
2. *Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b, S_b + S_c, S_b + S_a \geq 0$ thì $S \geq 0$.*
3. *Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b \geq 0$ thì $S \geq 0$.*
4. *Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_c, S_a \geq 0, a^2S_b + b^2S_a \geq 0$ thì $S \geq 0$.*
5. *Nếu $S_a + S_b + S_c \geq 0$ và $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$ thì $S \geq 0$.*

Ngoài ra để $S \geq 0$ với mọi a, b, c thì ta phải có $S_a + S_b|_{a=b} \geq 0$, $S_b + S_c|_{b=c} \geq 0$, $S_c + S_a|_{c=a} \geq 0$. Trong đó $S_a + S_b|_{a=b}$ có nghĩa là ta xét biểu thức $S_a + S_b$ khi $a = b$. Với các bài toán đối xứng ta có ngay $S_a = S_b$ nếu a=b. Nhận xét này rất quan trọng trong các các bài toán tìm hằng số tốt nhất.
Dường như định lí này còn có vẻ quá đơn giản và nếu nói rằng nó có ứng dụng với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến thì thật khó mà tưởng tượng được. Nhưng thực tế thì S.O.S đã làm được điều này và đây là một điều rất ngạc nhiên.

Một câu hỏi nữa đặt ta là với những biểu thức nào thì ta có thể chuyển về dạng chính tắc S.O.S như vậy? Câu trả lời là mọi hàm số đối xứng $f(a,b,c)$ thoả mãn $f(a,a,a) = 0$ và f có thể chứa căn thức, phân thức của a, b, c luôn luôn có biểu diễn ấy. Chứng minh điều này bạn xem trong phần tiếp theo.

Bây giờ là một số ví dụ cụ thể để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp này, và nếu có thể thì trước tiên bạn hãy thử chứng minh chúng theo cách khác

Ví dụ 0.1.4. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

LỜI GIẢI. Ta chú ý đến 2 đẳng thức sau đây

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right)$$
$$(a+b)(b+c)(c+a) - 8abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$$

Như thế sau khi thêm bớt 1 ở mỗi số hạng vế trái, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{2c(a-b)^2+2b(a-c)^2+2a(b-c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta tìm được

$$S_a = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2a = b+c-a-\frac{abc}{ab+bc+ca}$$
$$S_b = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2b = a+c-b-\frac{abc}{ab+bc+ca}$$
$$S_c = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2c = a+b-c-\frac{abc}{ab+bc+ca}$$

Do tính đối xứng nên có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c$, khi đó dễ thấy $S_b \geq 0, S_c \geq 0$. Dựa vào tiêu chuẩn thứ nhất, ta chỉ cần chứng minh rằng $S_a + S_b \geq 0$ là xong. Nhưng điều này rất hiển nhiên vì

$$S_a + S_b = 2c - \frac{2abc}{ab+bc+ca} = \frac{2c^2(a+b)}{ab+bc+ca} \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương tứng.

Chúng ta hãy trở lại với bất đẳng thức Iran 1996.

Ví dụ 0.1.5 (Iran TST 1996). *Chứng minh rằng với các số thực không âm x, y, z ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{4(xy+yz+zx)}$$

LỜI GIẢI. Đặt $a=x+y, b=y+z, c=z+x$. Ta phải chứng minh

$$(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}) \geq \frac{9}{4}$$

Bằng biến đổi đơn giản, ta có thể chuyển bất đẳng thức trên về dạng

$$(\frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2})(b-c)^2+(\frac{2}{ca}-\frac{1}{b^2})(a-c)^2+(\frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2})(a-b)^2 \geq 0$$
$$S_a = \frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2} \quad , \quad S_b = \frac{2}{ca}-\frac{1}{b^2} \quad , \quad S_c = \frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2}$$

Giả sử rằng $a \geq b \geq c$ thì $S_a \geq 0$. Sử dụng tiêu chuẩn 4 ta chỉ cần chứng minh $b^2S_b + c^2S_c \geq 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 \geq 2abc$, nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$a \leq b + c \Rightarrow b^3 + c^3 \geq bc(b + c) \geq abc$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Có một vài cách chứng minh khác cho bất đẳng thức Iran 96, cách thông thường chúng ta biết là khai triển và sử dụng bất đẳng thức *Schur*, hoặc dùng cách đa thức đối xứng. Tuy nhiên bạn đọc sẽ đồng ý với tôi rằng các phương pháp đó chỉ có ý nghĩa là chứng minh bất đẳng thức đúng về mặt toán học, chứ không để lại nhiều ấn tượng. Việc biết sử dụng phương pháp S.O.S đã làm bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều, đây thực sự là một lời giải đẹp và ngắn gọn, thoả mãn được mỹ quan toán học của nhiều người.

Phương pháp phân tích bình phương đã từng xuất hiện theo cách này hay cách khác trong một số bài toán bất đẳng thức, vì nó là một hướng suy nghĩ rất tự nhiên đối với bất đẳng thức. Nhưng chắc chắn đây sẽ là lần đầu tiên mà phương pháp này được hệ thống và được coi là phương pháp chính thống cho chúng ta. Nó đem lại cho chúng ta một cách nhìn chủ động và vô cùng hiệu quả đối với các bài toán, mà chỉ một thời gian ngắn trước còn là những bài toán vô cùng khó khăn. Bất đẳng thức Iran 96 được coi là bài toán cơ bản ứng dụng phương pháp này (mặc dù tác giả nghĩ đến S.O.S từ một bất đẳng thức cũ hơn). S.O.S là tên lấy từ chữ cái đầu tiên của cụm từ *Sum of Square*.