

NGUYỄN XUÂN HUY, LỚP 51CĐ1 TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI

Bài 213: cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn: $xyz = 1$. Chứng minh

$$P = \frac{1}{1+x^3+y^3} + \frac{1}{1+y^3+z^3} + \frac{1}{1+z^3+x^3} \leq 1.$$

Lg:

Ta để ý: $x^3 + y^3 = (x+y)((x-y)^2 + xy) \geq xy(x+y)$, do đó

$$\frac{1}{1+x^3+y^3} \leq \frac{1}{1+xy(x+y)} = \frac{z}{x+y+z}, \text{ tương tự ta}$$

được: $\frac{1}{1+y^3+z^3} \leq \frac{x}{x+y+z}, \frac{1}{1+z^3+x^3} \leq \frac{y}{x+y+z}$, cộng ba bất đẳng thức trên lại ta được điều phải chứng minh.

Bài 214: cho $x, y, z > 0, xyz = 1$, chứng minh

$$P = \frac{xy}{x^5 + xy + y^5} + \frac{yz}{y^5 + yz + z^5} + \frac{zx}{z^5 + zx + x^5} \leq 1.$$

Lg:

ta có

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \\ &= (x+y)[(x-y)(x^3 - y^3) + x^2y^2] \geq x^2y^2(x+y) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{x^5 + xy + y^5} \leq \frac{xy}{xy + x^2y^2(x+y)} = \frac{1}{1+xy(x+y)} = \frac{z}{x+y+z}$$

Tương tự ta được thêm 2 bất nữa, suy ra (đpcm)

Bài 215: $x, y, z > 0, xyz = 1$. Chứng minh:

$$P = \frac{x^2y^2}{x^7 + x^2y^2 + y^7} + \frac{y^2z^2}{y^7 + y^2z^2 + z^7} + \frac{z^2x^2}{z^7 + z^2x^2 + x^7} \leq 1$$

Lg:

Xét:

$$\begin{aligned}
x^7 + y^7 &= (x+y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6) \\
&= (x+y)[(x^6 + y^6) + (x^4y^2 + x^2y^4) - (x^5y + xy^5) - x^3y^3] \\
&= (x+y)[(x^2 + y^2)((x^2 - y^2)^2 + x^2y^2) + x^2y^2(x^2 + y^2) - xy((x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2) - x^3y^3] \\
&= (x+y)[(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 - xy(x^2 - y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) - 3x^3y^3] \\
&\geq (x+y)[2xy(x^2 - y^2)^2 - xy(x^2 - y^2)^2 + 4x^3y^3 - 3x^3y^3] \\
&= (x+y)[xy(x^2 - y^2)^2 + x^3y^3] \geq x^3y^3(x+y) \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{x^7 + x^2y^2 + y^7} \leq \frac{z}{x+y+z}
\end{aligned}$$

Hoặc có thể chứng minh $x^7 + y^7 \geq x^3y^3(x+y)$ bằng 2 cách sau:

Cách 1: biến đổi tương đương: $(x^3 - y^3)(x^4 - y^4) \geq 0$, đúng.

Cách 2: áp dụng cô si cho 7 số dương gồm 4 số x^7 và 3 số y^7

Ta được: $4x^7 + 3y^7 \geq 7\sqrt[7]{x^{28}y^{21}} = 7x^4y^3$ (i), tương tự $4y^7 + 3x^7 \geq 7y^4x^3$ (ii).

Từ (i) và (ii) ta suy ra điều phải chứng minh.

Tương tự ta có đpcm.

Bài 216: cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $xyz = 1$, cmr:

$$A = \frac{x^3y^3}{x^9 + x^3y^3 + y^9} + \frac{y^3z^3}{y^9 + y^3z^3 + z^9} + \frac{z^3x^3}{z^9 + z^3x^3 + x^9} \leq 1$$

Bài 217: $x, y, z > 0, xyz = 1$, chứng minh:

$$A = \frac{x^4y^4}{x^{14} + x^4y^4 + y^{14}} + \frac{y^4z^4}{y^{14} + y^4z^4 + z^{14}} + \frac{z^4x^4}{z^{14} + z^4x^4 + x^{14}} \leq 1$$

Bài 218: $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$, chứng minh:

$$A = \frac{x^6y^6}{x^{18} + x^6y^6 + y^{18}} + \frac{y^6z^6}{y^{18} + y^6z^6 + z^{18}} + \frac{z^6x^6}{z^{18} + z^6x^6 + x^{18}} \leq 1$$

Bài 219: cho x, y, z dương và $xyz = 1$, chứng minh:

$$A = \frac{x^2y^2}{x^{10} + x^2y^2 + y^{10}} + \frac{y^2z^2}{y^{10} + y^2z^2 + z^{10}} + \frac{z^2x^2}{z^{10} + z^2x^2 + x^{10}} \leq 1$$

Bài 220: cho x, y, z là ba số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$A = \frac{(xy)^{n-1}}{x^{2n+1} + (xy)^{n-1} + y^{2n+1}} + \frac{(yz)^{n-1}}{y^{2n+1} + (yz)^{n-1} + z^{2n+1}} + \frac{(zx)^{n-1}}{z^{2n+1} + (zx)^{n-1} + x^{2n+1}} \leq 1$$

Gợi ý:

Sử dụng $x^{2n+1} + y^{2n+1} \geq x^n y^n (x+y) \Leftrightarrow (x^n - y^n)(x^{n+1} - y^{n+1}) \geq 0$

Bài 221: cho x, y, z là ba số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$A = \frac{(xy)^n}{x^{5n} + (xy)^n + y^{5n}} + \frac{(yz)^n}{y^{5n} + (yz)^n + z^{5n}} + \frac{(zx)^n}{z^{5n} + (zx)^n + x^{5n}} \leq 1$$

Bài 222: cho x, y, z là ba số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$A = \frac{(xy)^{n-1}}{(xy)^{n-1} + x^k y^k (x^{2n-(2k-1)} + y^{2n-(2k-1)})} + \frac{(yz)^{n-1}}{(yz)^{n-1} + y^k z^k (y^{2n-(2k-1)} + z^{2n-(2k-1)})}$$

$$+ \frac{(zx)^{n-1}}{(zx)^{n-1} + z^k x^k (z^{2n-(2k-1)} + x^{2n-(2k-1)})} \leq 1$$

Với k,n là 2 số nguyên dương và $k \leq n$.

Bài223: cho a,b,c,d là bốn số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^4+b^4+c^4} + \frac{1}{1+b^4+c^4+d^4} + \frac{1}{1+c^4+d^4+a^4} + \frac{1}{1+d^4+a^4+b^4} \leq 1.$$

Gợi ý:

Sử dụng bất $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$

Bài 223: cho a,b,c,d là bốn số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{abc+a^7+b^7+c^7} + \frac{bcd}{bcd+b^7+c^7+d^7} + \frac{cda}{cda+c^7+d^7+a^7} + \frac{dab}{dab+d^7+a^7+b^7} \leq 1$$

Bài 224: cho a,b,c,d là bốn số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$A = \frac{(abc)^{n-1}}{(abc)^{n-1} + a^{3n+1} + b^{3n+1} + c^{3n+1}} + \frac{(bcd)^{n-1}}{(bcd)^{n-1} + b^{3n+1} + c^{3n+1} + d^{3n+1}} + \frac{(cda)^{n-1}}{(cda)^{n-1} + c^{3n+1} + d^{3n+1} + a^{3n+1}} \\ + \frac{(dab)^{n-1}}{(dab)^{n-1} + d^{3n+1} + a^{3n+1} + b^{3n+1}} \leq 1$$

Bài 225: cho a,b,c,d là bốn số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$A = \frac{(abc)^n}{(abc)^n + a^{7n} + b^{7n} + c^{7n}} + \frac{(bcd)^n}{(bcd)^n + b^{7n} + c^{7n} + d^{7n}} + \frac{(cda)^n}{(cda)^n + c^{7n} + d^{7n} + a^{7n}} \\ + \frac{(dab)^n}{(dab)^n + d^{7n} + a^{7n} + b^{7n}} \leq 1$$

Bài 226: cho các số dương a_i có tích bằng 1. chứng minh rằng: $A = \sum \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{n-1} (\sum_{i=1}^{n-1} a_i)} \leq 1$

Bài 227: cho các số dương a_i có tích bằng 1. chứng minh rằng: $A =$

$$\sum \frac{(\prod_{i=1}^{n-1} a_i)^{n-1}}{(\prod_{i=1}^{n-1} a_i)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n^2-n+1}} \leq 1$$

Lg:

Trước hết ta chứng minh nhận xét sau: $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n^2-n+1} \geq (\prod_{i=1}^{n-1} a_i^n)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)$

Áp dụng bất cô si cho $n^2 - n + 1$ số gồm $(n+1)$ số $a_1^{n^2-n+1}, n$ số $a_2^{n^2-n+1}, \dots, n$ số $a_{n-1}^{n^2-n+1}$ ta được:

$$(n+1)a_1^{n^2-n+1} + n(a_2^{n^2-n+1} + \dots + a_{n-1}^{n^2-n+1}) \geq (n^2 - n + 1) \sqrt[n^2-n+1]{(a_1^{n+1})^{(n^2-n+1)} [(a_2 \dots a_n)^n]^{(n^2-n+1)}}$$

$$= (n^2 - n + 1) a_1^{n+1} (a_2 a_3 \dots a_{n-1}).$$

Làm tương tự với các số $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ ta được thêm $(n-2)$ bất nữa rồi cộng về theo về

Theo về $(n-1)$ bất thức trên lại ta được

$$(n^2 - n + 1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n^2-n+1} \right) \geq (n^2 - n + 1) \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^n \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) \text{ suy ra (i).}$$

$$\text{Vậy } \frac{\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right)^{n-1}}{\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n^2-n+1}} \leq \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)} = \frac{a_n}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

Làm tương tự ta cũng có $(n-1)$ bất nữa, cộng về theo về n bất trên lại ta được điều phải chứng minh.

Bài 228: cho các số dương a_i có tích bằng 1. chứng minh rằng: B =

$$\sum \frac{\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right)^n}{\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right)^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{2n^2-1}} \leq 1$$

Bài 229: cho các số là các số thực x_i dương có tích bằng 1. chứng minh rằng:

$$B = \frac{1}{1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} + \frac{1}{1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n} + \dots + \frac{1}{1 + x_n + x_1 + \dots + x_{n-2}} \leq 1$$

Lg:

Đặt $x_i = a_i^n, i = 1, n$ khi đó:

$$1 + x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n = 1 + a_1^n + \dots + a_{k-1}^n + a_{k+1}^n + \dots + a_n^n$$

$$\geq 1 + a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_{k+1} + \dots + a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_k}$$

Do đó $\frac{1}{1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} \leq \frac{a_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$, cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng n bất lại ta được điều phải chứng minh.

Bài 230: cho các số là các số thực x_i dương có tích bằng 1. chứng minh rằng:

$$A = \frac{1}{n-1 + x_1} + \frac{1}{n-1 + x_2} + \dots + \frac{1}{n-1 + x_n} \leq 1$$

Lg:

Đặt $x_i = a_i^n$ ta có theo cô si thì

$$\frac{n-1}{n-1+x_i} = 1 - \frac{x_i}{n-1+x_i} = 1 - \frac{a_i^n}{a_i^n + (n-1)a_1a_2...a_n} = 1 - \frac{a_i^{n-1}}{a_i^{n-1} + (n-1)a_1a_2...a_{i-1}a_{i+1}...a_n} \leq 1 - \frac{a_i^{n-1}}{\sum_{i=1}^n a_i^{n-1}}$$

cho i chạy từ 1,2,...,n rồi cộng lại ta được: $(n-1)A \leq n-1 \Leftrightarrow A \leq 1$ (đpcm)

Bài 231: cho các số thực dương $a_i, i = \overline{1, n}$ có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$A = \frac{1}{a_1 + a_2^k + a_3^k + ... + a_n^k} + \frac{1}{a_1^k + a_2 + a_3^k + ... + a_n^k} + ... + \frac{1}{a_1^k + a_2^k + a_3^k + ... + a_n} \quad (k \geq 1)$$

Lg:

Ta chọn số thực m để:

$$\frac{1}{a_1 + a_2^k + a_3^k + ... + a_n^k} \leq \frac{a_1^{m-1}}{a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m}, \text{ bất tương đương với:}$$

$(a_2a_3...a_n)^{m-1}(a_2^m + ... + a_n^m) \leq a_2^k + a_3^k + ... + a_n^k$, ta cần chọn m thỏa mãn:

$$nm - (n-1) = k \Leftrightarrow m = \frac{k+n-1}{n} = 1 + \frac{k-1}{n} \geq 1, \text{ tương tự ta được (n-1) bất đẳng thức nữa}$$

$$\text{rồi cộng về theo về n bất lại ta được: } A \leq \frac{a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + ... + a_n^{m-1}}{a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m}$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh: $a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + ... + a_n^{m-1} \leq a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m$.

Theo trêbusep ta có:

$$n(\sum_{i=1}^n a_i^m) \geq (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n a_i^{m-1}) \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} (\sum_{i=1}^n a_i^{m-1}) = n(\sum_{i=1}^n a_i^{m-1})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^m \geq \sum_{i=1}^n a_i^{m-1}$$

Từ đây ta suy ra (đpcm)