

TIẾP NÓI CÂU CHUYỆN VỀ “BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT”

Cao Minh Quang, GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long, E-mail: kt13quang@yahoo.com

1. Lời giới thiệu

Tháng 3 năm 1903, trên tạp chí “Educational Times”, A. M. Nesbitt đã đề xuất bài toán sau

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ngoài ra, ta cũng nhận thấy rằng, (1) ở dạng đồng bậc nên để chứng minh (1), với điều kiện a, b, c là các số thực dương, ta còn có thể giả sử $a + b + c = 1$, tức là chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad (2),$$

trong đó x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 1.

Bài toán quả thật rất đơn giản và đẹp đẽ, nó đã được rất nhiều người quan tâm và tìm các cách giải. Trên Tạp chí Toán Học Tuổi Trẻ số 358 (tháng 4 – 2007), tác giả Vũ Đình Hòa đã giới thiệu cho bạn đọc một dạng tổng quát của bất đẳng thức (1), đó chính là bất đẳng thức Shapiro được phát biểu dưới dạng:

Với mọi $x_i \geq 0, x_i + x_{i+1} > 0 (i = 1, 2, \dots, n), x_{n+1} = x_1$ thì ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Trong bài viết nhỏ này, tôi xin tổng hợp các lời giải cho bất đẳng thức (1) và một số kết quả khác được phát triển từ (1) trong thời gian gần đây.

2. Một số lời giải cho bất đẳng thức Nesbitt

Thật sự bất đẳng thức (1) có rất nhiều cách giải, ngoài một số cách rất đơn giản còn có những cách phức tạp, đôi khi phải sử dụng đến các bất đẳng thức cổ điển (Jensen, Karamata), định lý dồn biến, ...

2.1. Nhóm các lời giải sử dụng phép biến đổi tương đương phối hợp với các bất đẳng thức thông dụng.

Lời giải 1. Cộng 3 vào hai vế của bất đẳng thức (1), ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 9.$$

Dễ thấy bất đẳng thức trên đúng vì ta luôn có $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \forall x, y, z > 0$.

Lời giải 2. Bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a-b+a-c}{b+c} + \frac{b-c+b-a}{a+c} + \frac{c-a+c-b}{a+b} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b) \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) + (b-c) \left(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{c+b} \right) + (a-c) \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{(b+c)(a+c)} + \frac{(b-c)^2}{(a+c)(a+b)} + \frac{(a-c)^2}{(b+c)(a+b)} \geq 0. \end{aligned}$$

Lời giải 3. Sử dụng đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow & 2[a(a+b)(a+c) + b(b+a)(b+c) + c(c+a)(c+b)] \geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ \Leftrightarrow & 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối được suy ra từ bất đẳng thức $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$, trong đó x, y là các số thực dương.

Lời giải 4. Ta nhận thấy rằng

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{a+c} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cuối.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a$$

Tương tự, ta có $\frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b$, $\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$.

Cộng các bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được điều phải chứng minh.

2.2. Nhóm các lời giải sử dụng bất đẳng thức cổ điển.

Lời giải 5. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, dạng $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1b_2 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}$, trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số thực dương. Ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}.$$

Lời giải 6. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ dàng kiểm tra được $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$. Do đó, sử dụng bất đẳng thức Chebyshev phối hợp với bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{3}(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{1}{3}(a+b+c) \cdot \frac{9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{3}{2}.$$

* Sử dụng bất đẳng thức của dãy sắp thứ tự, dạng:

Với 6 số thực $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ thỏa mãn điều kiện $x_1 \geq x_2 \geq x_3, y_1 \geq y_2 \geq y_3$. Khi đó

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + x_3y_{i_3} (*),$$

trong đó (i_1, i_2, i_3) là một hoán vị của bộ $(1, 2, 3)$.

Chứng minh. Đặt $z_1 = y_{i_1}, z_2 = y_{i_2}, z_3 = y_{i_3}$. Khi đó (*) trở thành

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 (**)$$

$$\text{hay } x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + x_3(y_3 - z_3) \geq 0.$$

Ta nhận thấy rằng $y_1 \geq z_1, y_1 + y_2 \geq z_1 + z_2$ và $y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + x_3(y_3 - z_3) &\geq x_2(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + x_3(y_3 - z_3) = \\ &= x_2[(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)] + x_3(y_3 - z_3) \geq x_3[(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)] + x_3(y_3 - z_3) = \\ &= x_3[(y_1 + y_2 + y_3) - (z_1 + z_2 + z_3)] = 0. \end{aligned}$$

Vậy (**) đã được chứng minh. Ta có lời giải sau:

Lời giải 7. [Cao Minh Quang] Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Ta kiểm tra được $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$.

Áp dụng bổ đề trên, ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}, \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} \text{ hay } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Với việc chuẩn hóa $x + y + z = 1$, giúp ta có những lời giải khác cho (2).

Lời giải 8. Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$. Ta chứng minh được hàm số này lồi trên $(0,1)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có

$$\frac{1}{3}[f(x) + f(y) + f(z)] \geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \text{ hay } \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Ngoài lời giải trên, với việc chứng minh được hàm số $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$ lồi trên $(0,1)$ còn giúp ta có một lời giải khác cho (1') như sau.

Lời giải 9. [Cao Minh Quang] Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó, dễ thấy $x \geq \frac{1}{3}, z \leq \frac{1}{3}$, suy ra $x+y = 1-z \geq 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, do đó $(x, y, z) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Karamata cho hàm $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$, lồi trên $(0,1)$, đối với bộ trội $(x, y, z) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, ta có

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ hay } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

2.3. Nhóm các lời giải sử dụng phương pháp đổi biến, phối hợp với các bất đẳng thức cổ điển.

Lời giải 10. Đặt $x = b+c, y = c+a, z = a+b$. Khi đó

$$a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}.$$

Do đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2}, \text{ hay } \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6.$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối luôn đúng, vì theo bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 6\sqrt[6]{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}} = 6.$$

Lời giải 11. Đặt $A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$, $B = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$, $C = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$. Ta có

$$B+C = \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3, A+B = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b}, A+C = \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+b}{a+b}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$A+B \geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} = 3, A+C \geq 3\sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c} \cdot \frac{b+a}{c+a} \cdot \frac{c+b}{a+b}} = 3.$$

Suy ra $2A+B+C \geq 6$ hay $A \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải 12. [Hojoo Lee] Đặt $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$, và $A = \frac{x+y+z}{3}$. Ta cần chứng minh $A \geq \frac{1}{2}$. Ta có

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

Suy ra $1 = 2xyz + xy + yz + zx$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$1 = 2xyz + xy + yz + zx \leq 2A^3 + 3A^2$$

Do đó $(2A-1)(A+1)^2 \geq 0$, hay $A \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải 13. [Hojoo Lee] Đặt $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$. Ta có

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1.$$

Xét hàm $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Ta chứng minh được hàm f là hàm lõm trên $(0, +\infty)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}[f(x) + f(y) + f(z)] \leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

Nhưng ta cũng chứng minh được f là hàm tăng, do đó

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}, \text{ tức là } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải 14. [Hojoo Lee] Vì vai trò của a, b, c là như nhau nên ta có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Ta đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ thì $x \geq y \geq 1$ và do đó (1) trở thành

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} \geq 2 \Rightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} (***)$$

Do đó, để chứng minh (***), ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} &\geq \frac{3}{2} - \frac{1}{x+y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{y+1} &\geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+y} \\ \Leftrightarrow \frac{y-1}{2(y+1)} &\geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)} \\ \Leftrightarrow \frac{(y-1)[(x+1)(x+y) - 2(y+1)]}{2(x+y)(x+1)(y+1)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $x \geq y \geq 1$.

Để chứng minh (***), ngoài lời giải trên, ta còn một lời giải khác như sau.

Lời giải 15. [Hojoo Lee] Đặt $m = x + y, n = xy$. Khi đó (**) trở thành

$$\frac{m^2 - 2n + m}{m + n + 1} + \frac{1}{m} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2m^3 - m^2 - m + 2 \geq n(7m - 2) (***)$$

Ta dễ ý rằng $7m - 2 > 0$ và $m^2 \geq 4n$. Do đó để chứng minh (****), ta sẽ chứng minh

$$4(2m^3 - m^2 - m + 2) \geq m^2(7m - 2) \Leftrightarrow m^3 - 2m^2 - 4m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2(m + 2) \geq 0 \text{ (hiển nhiên)}.$$

Lời giải 16. [Cao Minh Quang] Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ thì $x, y, z > 0, xyz = 1$. (1) được viết lại dưới dạng

$$\frac{x}{xz+1} + \frac{y}{yz+1} + \frac{z}{zx+1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x^2y + y^2z + z^2x) \geq (x+y+z) + (xy + yz + zx).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\begin{aligned} x^2y + y^2z + z^2x &= \frac{1}{3}(x^2y + y^2z + y^2z) + \frac{1}{3}(y^2z + z^2x + z^2x) + \\ &\quad + \frac{1}{3}(z^2x + x^2y + x^2y) \geq \sqrt[3]{x^2y^5z^2} + \sqrt[3]{y^2z^5x^2} + \sqrt[3]{z^2x^5y^2} = x + y + z. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta cũng nhận được

$$x^2y + y^2z + z^2x = \frac{1}{3}(x^2y + z^2x + x^2x) + \frac{1}{3}(y^2z + x^2y + x^2y) + \\ + \frac{1}{3}(z^2x + y^2z + y^2z) \geq \sqrt[3]{x^4z^4y} + \sqrt[3]{x^4y^4z} + \sqrt[3]{xy^4z^4} = xy + yz + zx.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta nhận được $2(x^2y + y^2z + z^2x) \geq (x + y + z) + (xy + yz + zx)$.

2.4. Nhóm các lời giải sử dụng phương pháp đánh giá đại diện, kỹ thuật chọn “điểm rơi” của bất đẳng thức AM – GM và các bất đẳng thức cổ điển.

Lời giải 17. [Hojoo Lee] Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6}} = 3\sqrt{ab}, \sqrt{a^3} + \sqrt{c^3} + \sqrt{c^3} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a^3c^6}} = 3\sqrt{ac}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$2(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}) \geq 3\sqrt{a}(b + c).$$

Do đó $\frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}}.$

Tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\frac{b}{c+a} \geq \frac{3}{2} \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}}, \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} = \frac{3}{2}.$$

Lời giải 18. [Hojoo Lee] Ta có $(x + y)^2 \geq 4xy \forall x, y > 0$. Do đó

$$\begin{aligned} [2a + (b+c)]^2 &\geq 8a(b+c) \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 4a(b+c) + (b+c)^2 &\geq 8a(b+c) \\ \Leftrightarrow 4a(a+b+c) &\geq (b+c)[8a - (b+c)] \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} &\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8a - b - c}{a + b + c}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\frac{b}{c+a} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8b - c - a}{a + b + c}, \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8c - a - b}{a + b + c}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8(a+b+c) - 2(a+b+c)}{a+b+c} = \frac{3}{2}.$$

Lời giải 19. [Cao Minh Quang] Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{2(a+b+c)}{3} = \frac{2a + (b+c) + (b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{2a(b+c)^2}.$$

Suy ra $\frac{a}{b+c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}.$

Tương tự, ta chứng minh được

$$\frac{b}{c+a} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}, \frac{c}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}}{\sqrt{(a+b+c)^3}} \right).$$

Do đó để chứng minh (1), ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{3} \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}}{\sqrt{(a+b+c)^3}} \right) \geq 1 \Leftrightarrow 3(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2 \geq (a+b+c)^3.$$

Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$, bất đẳng thức trên trở thành

$$3(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (x^3 + y^3 + z^3)(x + y + z).$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) \leq 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

Nhân hai bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được

$$3(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^3.$$

Lời giải 20. [Cao Minh Quang] Ta chứng minh bất đẳng thức (2)

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{x}{y+z} + \frac{9x(y+z)}{4} \geq 2\sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{x^2(y+z)}{(y+z)}} = 3x.$$

Tương tự, ta chứng minh được

$$\frac{y}{z+x} + \frac{9y(z+x)}{4} \geq 3y, \frac{z}{x+y} + \frac{9z(x+y)}{4} \geq 3z.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{9}{2}(xy + yz + zx) \geq 3(x+y+z) \quad (i)$$

Nhưng

$$\frac{3}{2}(x+y+z) = \frac{3}{2}(x+y+z)^2 \geq \frac{9}{2}(xy + yz + zx) \quad (ii)$$

Cộng 2 bất đẳng thức (i) và (ii) theo từng vế, ta được

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}(x+y+z) = \frac{3}{2}.$$

Ngoài lời giải trên, (2) còn có các lời giải sau.

Lời giải 21. [Hojoo Lee] Ta có $4x - (1-x)(9x-1) = (3x-1)^2 \geq 0$. Suy ra $4x \geq (1-x)(9x-1)$ hay $\frac{x}{1-x} \geq \frac{9x-1}{4}$.

Tương tự, ta có

$$\frac{y}{1-y} \geq \frac{9y-1}{4}, \frac{z}{1-z} \geq \frac{9z-1}{4}.$$

Do đó

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{9(x+y+z)-3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Lời giải 22. [Cao Minh Quang] Với $x \in (0,1)$, sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$(2-2x)(1+x)(1+x) \leq \left[\frac{(2-2x) + (1+x) + (1+x)}{3} \right]^3 = \frac{64}{27}.$$

Do đó, $\frac{x}{1-x} \geq \frac{27}{32} x(1+x)^2$. Tương tự, ta có

$$\frac{y}{1-y} \geq \frac{27}{32} y(1+y)^2, \frac{z}{1-z} \geq \frac{27}{32} z(1+z)^2.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức $\frac{x^r + y^r + z^r}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^r, \forall x, y, z \geq 0, r \geq 1$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} &\geq \frac{27}{32} [(x^3 + y^3 + z^3) + 2(x^2 + y^2 + z^2) + \\ &\quad + (x + y + z)] \geq \frac{27}{32} \left[3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \right] = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Lời giải 23. [Cao Minh Quang] Với $x \in (0,1)$, ta có

$$(3x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x+1 \geq 9x(1-x) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq \frac{9x^2}{3x+1}.$$

Chứng minh tương tự, có

$$\frac{y}{1-y} \geq \frac{9y^2}{3y+1}, \frac{z}{1-z} \geq \frac{9z^2}{3z+1}.$$

Do đó,

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} \geq \frac{9x^2}{3x+1} + \frac{9y^2}{3y+1} + \frac{9z^2}{3z+1} \geq \frac{(3x+3y+3z)^2}{3(x+y+z)+3} = \frac{3}{2}.$$

2.5. Nhóm các lời giải sử dụng phương pháp sử dụng định lý dồn biến, sử dụng bất đẳng thức phụ

Lời giải 24. Ta sử dụng định lý dồn biến để chứng minh (1). Đặt

$$E(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}, t = \frac{a+b}{2}, v = \frac{a+b+c}{3}.$$

Dễ thấy rằng

$$E(a,b,c) = \frac{a^2 + b^2 + c(a+b)}{ab + c^2 + c(a+b)} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2t^2 + 2tc}{t^2 + c^2 + 2ct} + \frac{c}{2t} = E(t,t,c).$$

Do đó, theo định lý dồn biến, ta được $E(a,b,c) \geq E(v,v,v) = \frac{3}{2}$.

Lời giải 25. [Cao Minh Quang] Trước hết, ta chứng minh nếu x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 1 thì

$$\frac{x+yz}{y+z} + \frac{y+zx}{z+x} + \frac{z+xy}{x+y} \geq 2.$$

Sử dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c > 0$, và để ý rằng $x + y + z = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{x+yz}{y+z} + \frac{y+zx}{z+x} + \frac{z+xy}{x+y} &= \frac{(x+y)(x+z)}{y+z} + \frac{(y+z)(y+x)}{z+x} + \\ &\quad + \frac{(z+x)(z+y)}{x+y} \geq (x+y) + (y+z) + (z+x) = 2. \end{aligned}$$

Bây giờ ta trở lại việc chứng minh (2). Dùng bất đẳng thức $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{4}(a+b), \forall a, b > 0$.

Ta có

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq 2 - \left(\frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} + \frac{xy}{x+y} \right) \geq 2 - \frac{1}{4} [(y+z) + (z+x) + (x+y)] = \frac{3}{2}.$$

3. Một số kết quả được phát triển từ bất đẳng thức Nesbitt

Trong thời gian gần đây, có rất nhiều người quan tâm và giải các bài toán bất đẳng thức, ta nhận được một số kết quả đẹp là mở rộng, tổng quát hoặc kết quả mạnh hơn (1). Xin được đề cập đến một số bài toán đó như sau

Bài 1. [Trần Nam Dũng] [Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Bài 2. [Vasile Cirtoaje] [Vasile Cirtoaje, Algebraic Inequalities, Old and New Methods, GIL, 2006] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{13}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Bài 3. [Titu Varescu, Mircea Lascu] [Titu Varescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, Old and New Inequalities, GIL, 2004] Cho a, b, c, α là các số thực dương sao cho $abc = 1, \alpha \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{c+a} + \frac{c^\alpha}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 4. [Trần Tuấn Anh] [Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ] Cho a, b, c, k là các số thực dương sao cho $k \geq \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c} \right)^k + \left(\frac{b}{c+a} \right)^k + \left(\frac{c}{a+b} \right)^k \geq \frac{3}{2^k}.$$

Bài 5. [Vasile Cirtoaje] [Vasile Cirtoaje, Algebraic Inequalities, Old and New Methods, GIL, 2006] Cho a, b, c, r là các số thực dương sao cho $r \geq \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{2a}{b+c} \right)^r + \left(\frac{2b}{c+a} \right)^r + \left(\frac{2c}{a+b} \right)^r \geq 3.$$

Bài 6. [Vasile Cirtoaje] [Vasile Cirtoaje, Algebraic Inequalities, Old and New Methods, GIL, 2006] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Bài 7. [Titu Zvonaru, Buchrest, Romania] [Problem 2970, CRUX 2006] Cho a, b, c là các số thực dương và m, n là các số nguyên dương sao cho $m \geq n$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^m}{b^m + c^m} + \frac{b^m}{c^m + a^m} + \frac{c^m}{a^m + b^m} \geq \frac{a^n}{b^n + c^n} + \frac{b^n}{c^n + a^n} + \frac{c^n}{a^n + b^n}.$$

Bài 8. [Phạm Văn Thuận] [Problem 3200, CRUX 2006] Cho r, s là các số thực dương, $r < s$ và $a, b, c \in (r, s)$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} + \frac{(r-s)^2}{2r(r+s)}.$$

Bài 9. [Việt Nam TST, 2006] Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 6 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

Bài 10. [Phạm Kim Hùng, Sáng Tạo Bất Đẳng Thức, Secrets in Inequalities, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \cdot \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq k + \frac{3}{2}, \quad k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Bài 11. [Phạm Kim Hùng, Sáng Tạo Bất Đẳng Thức, Secrets in Inequalities, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}.$$

Bài 12. [Cao Minh Quang] Cho a, b, c là các số thực dương, $a + b + c = 1$, m, n là các số thực không âm thỏa điều kiện $6m \geq 5n$. Chứng minh rằng

$$\frac{ma + nbc}{b+c} + \frac{mb + nbc}{c+a} + \frac{mc + nab}{a+b} \geq \frac{3m+n}{2}.$$

Bài 13. [Phạm Văn Thuận, Lê Vĩ, Bất Đẳng Thức, Suy Luận & Khám Phá] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2 \left[\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^{\frac{2}{3}} \geq 2.$$

Bài 14. [Cezar Lupu] [Mathematical Reflections 1 (2007)] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$$

Bài 15. [Phạm Hữu Đức] [Mathematical Reflections 4 (2007)] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{bc}{a^2+bc} + \frac{ca}{b^2+ca} + \frac{ab}{c^2+ab}.$$

Câu chuyện về “bất đẳng thức Nesbitt” chắc hẳn chưa dừng lại. Hy vọng một ngày nào đó bạn sẽ tìm được cho mình một lời giải đẹp của bài toán Nesbitt và phát triển nó theo nhiều hướng khác.

Tài liệu tham khảo

1. Hojoo Lee, Topics in Inequalities – Theorems and Techniques, 2007
2. D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic, 1993
3. Phạm Kim Hùng, Sáng Tạo Bất Đẳng Thức, Secrets in Inequalities, Nhà Xuất Bản Tri Thức, 2006
4. Titu Varescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, Old and New Inequalities, GIL, 2004
5. Vasile Cirtoaje, Algebraic Inequalities, Old and New Methods, GIL, 2006