Khảo sát môn chuyên lần 1
Môn: Toán 12
Thời gian 120 phút *

Ngày 25 tháng 9 năm 2009

Câu 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{4} \\ \sqrt{y} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{4} \\ \sqrt{z} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{4} \end{cases}$

Câu 2. Cho dãy số $(x_n)_{n\geq 0}$ xác định như sau $\begin{cases} x_0 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{x_n} \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Câu 3. Cho điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC. Các tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC kẻ từ P cắt lại (O) tại X, Y. Chứng minh rằng XY song song với một cạnh của tam giác khi và chỉ khi P là tiếp điểm của đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của tam giác và tiếp xúc trong với (O).

Câu 4. Tìm tất cả các tập hợp X chứa ít nhất hai số nguyên dương, có tính chất với mọi $m, n \in X, m < n$ thì tồn tại $k \in X$ sao cho $n = mk^2$

Câu 5. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

không có nghiệm nguyên dương dạng $(3t + 1; 2u^2)$

Câu 6. Với mỗi số nguyên không âm n, xác định các số nguyên a_n, b_n, c_n bởi công thức

$$a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4} = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^n$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^n}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k = \begin{cases} a_n & \text{nếu } n \equiv 0 \pmod 3 \\ b_n\sqrt[3]{2} & \text{nếu } n \equiv 1 \pmod 3 \\ c_n\sqrt[3]{4} & \text{nếu } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

---

* **Ghi chú.** *Học sinh làm ít nhất 04 bài*

Đáp án

Câu 1. Điều kiện $x, y, z > 0$ Viết lại hệ về dạng $\begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{7}{4} \\ \sqrt{y} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{7}{4} \\ \sqrt{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{4} \end{cases}$

Do hàm số $f(t) = \sqrt{t}, t > 0$ là hàm số đồng biến và hàm số $g(t) = \frac{1}{t} + \frac{7}{4}$, $t > 0$ là hàm số nghịch biến, nên $x = y = z$. Thay vào hệ, được $x = y = z = 4$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Lời giải 2. Điều kiện $x, y, z > 0$

Cộng ba phương trình với nhau, ta được

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{21}{4} \Rightarrow (\sqrt{x}-2)f(x)+(\sqrt{y}-2)f(y)+(\sqrt{z}-2)f(z) = 0$$

trong đó

$$f(t) = \frac{4t+\sqrt{t}+2}{4t} > 0 \quad \forall t > 0$$

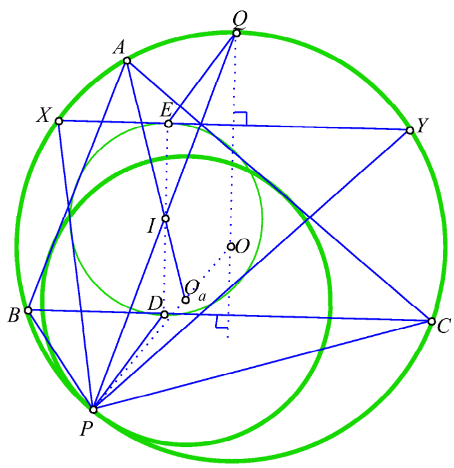
Nếu $\sqrt{x} < 2$ thì $\frac{1}{y} + \frac{7}{4} = \sqrt{x} < 2 \Rightarrow y > 4 \Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{7}{4} = \sqrt{y} > 2 \Rightarrow z < 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{7}{4} = \sqrt{z} < 2 \Rightarrow x > 4$ hay $\sqrt{x} > 2$ vô lý.

Vậy $\sqrt{x} \geq 2$. Tương tự $\sqrt{y}, \sqrt{z} \geq 2$. Từ đó $x = y = z = 4$

Câu 2. Vì hàm số $f(x) = (\sqrt{2})^x, x > 0$ là hàm số đồng biến và $x_1 = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$ nên dãy đã cho là dãy đơn điệu tăng.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $0 < x_n < 2 \quad \forall n$. Vậy dãy đã cho hội tụ về $\alpha \in (0; 2)$ thỏa mãn phương trình $\alpha = (\sqrt{2})^\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = 2^\alpha$. Giải phương trình, ta được $\alpha = 2$

Câu 3.



Bổ đề 1. Cho đường tròn (I) nằm trong đường tròn (O) và $P \in (O)$. Hai tiếp tuyến của (I) kẻ qua P cắt lại (O) tại QR. Khi đó QR tiếp xúc với (I).

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và ngoại tiếp quanh đường tròn (I). Gọi (O_a) là đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại A'. Các điểm B', C' được xác định một cách tương tự. Khi đó

1. Các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O) và (I).

2. Phân giác của các góc $\angle CA'B, \angle BC'A, \angle AB'C$ đồng quy tại I.

($\Leftarrow$) Giả sử đường tròn (O_a) tiếp xúc với hai cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại P. Áp dụng bổ đề 2, PI đi qua điểm chính giữa cung Q của cung $\overset{\frown}{BC}$ (chứa A). Nhưng theo bổ đề 1, I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PXY nên Q cũng là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{XY}$. Do đó $XY \parallel BC$ (cùng vuông góc với OQ)

($\Rightarrow$) Giả sử rằng $XY \parallel BC$. Gọi Q là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{XY}$ (chứa A) của (O). Do XY, BC là hai dây song song của (O) nên Q cũng là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$. Từ đó và do P, I, Q thẳng hàng, nên QI là phân giác của các góc $\angle BPC, \angle XPY$, đi qua P. Nếu đường tròn (O_a) tiếp xúc với hai cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại P', thế thì QI là phân giác của góc $\angle BP'C$, vậy $P' \equiv P$

Câu 4. Giả sử tìm được tập X thỏa mãn và $m < n$ là hai phần tử bé nhất của X. Khi đó, do cách xác định X tồn tại $k \in X$ sao cho $n = mk^2$ suy ra $m \leq k \leq n$, do đó $k = m$ hoặc $k = n$.

Nếu $|X| = 2$, dễ thấy $X = \{m; m^3\}$ thỏa mãn.

Nếu $|X| \geq 3$, gọi q là phần tử bé thứ ba của X (tức là $m < n < q$), khi đó tồn tại $\ell \in X$ sao cho $q = m\ell^2$. Do $q > \ell$ nên $\ell = m$ hoặc $\ell = n$. Nếu $\ell = m$ thì $q = n$, vô lý. Vậy $\ell = n = m^3$ và $q = m\ell^2 = m^7$. Nhưng tồn tại $t \in X$ sao cho $q = nt^2$, nên $t = m^2$, mà $m^2 \notin X$. Vô lý, vậy $|X| = 2$ và $X = \{m; m^3\}$

Câu 5. Giả sử trái lại, phương trình có nghiệm nguyên dương, và gọi $(x; y)$ là nghiệm nguyên dương với y nhỏ nhất.
Ta có

$$3y^2 = 3\cdot 4u^4 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = (3t+2)(3t) \Longrightarrow 4u^4 = t(3t+2) \equiv 0 \pmod 4$$

Từ đó, do $t, 3t+2$ cùng tính chẵn lẻ, suy ra $t, 3t+2$ cùng chẵn. Đặt $t = 2a$ và $3t + 2 = 2b$ (suy ra $b = 3a + 1$). Dễ thấy $a, b \in \mathbb{N}^\star$ và $(a; b) = 1$. Theo trên ta có $ab = u^4$ và do đó $a = m^4, b = n^4 \Longrightarrow n^4 - 1 = 3m^4$ (1)

\+ Nếu m lẻ, thì $m^4 \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow n^4 \equiv 4 \pmod 8$ vô lý

\+ Nếu m chẵn, thì $m^4 = a < u^4 = ab$ vì, nếu $m^4 = u^4$ thì $b = 1$ mâu thuẫn với $b = 3a + 1$. Vậy, có thể đặt $m = 2p, n^2 = 3q + 1$. Khi đó $48p^4 = 3q(3q + 2)$

Do (1), $n^2 \equiv 1 \pmod 4$, suy ra $q \equiv 0 \pmod 4$. Đặt $q = 2q_1, 3q + 2 = 2p_1 \Longrightarrow p_1 = 3q_1 + 1$ nguyên tố cùng nhau với q_1. Khi đó $4p^4 = p_1q_1$. Do q_1 chẵn, nên $q_1 = 4y_1^4, p_1 = x_1^4$ và khi đó

$$(x_1^2)^2 - 3(2y_1^2)^2 = 1 \qquad (2)$$

Đây là phương trình Pell có dạng $x^2 - 3y^2 = 1$. Và rõ ràng rằng x_1^2 là không chia hết cho 3, nên có dạng $3k + 1$.

Cần chứng minh $2y_1^2 < y$. Thật vậy $2y_1^2 = \sqrt{q_1} < 2p^2 = \dfrac{m^2}{2} < u^2 < 2u^2$. Vô lý, do tập số nguyên dương không chứa dãy giảm vô hạn. ĐPCM

Câu 6. Ta có

$$
\begin{aligned}
a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4} &= \frac{(\sqrt[3]{2})^n(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^n}{(\sqrt[3]{2})^n} = \frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2)^n}{(\sqrt[3]{2})^n} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^n}\Big(1+(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\Big)^n = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(a_k + b_k\sqrt[3]{2} + c_k\sqrt[3]{4})
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k\sqrt[3]{2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k c_k\sqrt[3]{4}
$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.