Khảo sát môn chuyên lần 2
Môn: Toán 12
Thời gian 180 phút

Ngày 21 tháng 10 năm 2009

Câu 1. Giải phương trình

$$x^3(x+1) = 2(x+m)(x+2m)$$

với m là tham số thực.

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi E, F, G theo thứ tự là giáo điểm của các cặp đường thẳng AB và CD, BC và DA, AC và BD. Các đường tròn $(DAE), (DCF)$ cắt nhau tại điểm thứ hai H. Phân giác của góc $\angle AHB$ cắt AB tại I, phân giác của góc $\angle DHC$ cắt CD tại J. Chứng minh rằng I, G, J thẳng hàng.

Câu 3. Ký hiệu $\mathbb{R}^\star$ là tập hợp tất cả các số thực khác 0. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\star$ thỏa mãn

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y) - f(x)f(y)}{1 + 2f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Câu 4. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn

$$(x+1)^{y+1} + 1 = (x+2)^{z+1}$$

Câu 5. Các số $1, 2, \ldots, n^2$ được điền vào bảng kích thước $n \times n$ theo cách như hình vẽ. Xóa đi n số từ bảng, sao cho không có hai số nào được xóa cùng hàng, cũng như không có hai số nào được xóa cùng cột. Hãy tìm tổng các số còn lại của bảng.

1	2	3	$\cdots$	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\cdots$	$2n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
n^2-n+1	n^2-n+2	n^2-n+3	$\cdots$	n^2

Đáp án

Câu 1. Phương trình đã cho tương đương với $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6mx - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 6xm - (x^4 + x^3 - 2x^2) = 0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn m và x là tham số. Ta có

$$\Delta' = 9x^2 + 4(x^4 + x^3 - 2x^2) = x^2(2x+1)^2 \geq 0$$

từ đó $m_1 = \frac{-3x - x(2x+1)}{4} = \frac{-2x^2 - 4x}{4} = -\frac{x^2}{2} - x$ và
$m_2 = \frac{-3x + x(2x+1)}{4} = \frac{2x^2 - 2x}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$

Từ đó, phương trình đã cho tương đương với

$$(m + \frac{x^2}{2} + x)(m - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}) = 0$$

Từ đó, giải được

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2m}\ ; x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1+8m}$$

với $m \in [-\frac{1}{8}; \frac{1}{2}]$

Câu 2.

Lời giải 1. Từ giả thiết suy ra $(HD;HE) = (AD;AE) = (AD;AB) = (CD;CB) = (CD;CF) = (HD;HF) \pmod{\pi}$ do đó H, D, F thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC, ta được các đường tròn $(BAF), (CFD)$ và (DEA) cùng đi qua một điểm (khác D). Do đó bốn đường tròn $(BAF), (CFD)$, $(DEA), (EAB)$ cùng đi qua H.

Vậy

$$(HA;HD) = (EA;ED) = (EB;EC) = (HB;HC) \pmod{\pi}$$

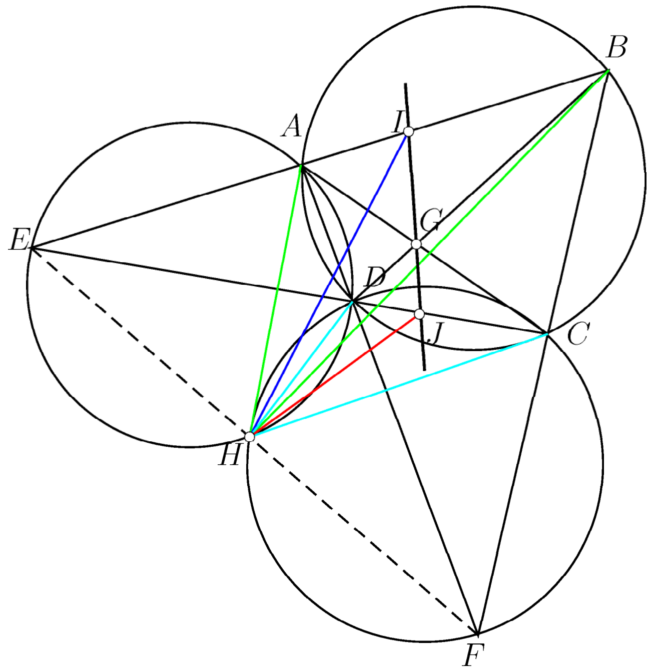
và

$$\begin{aligned}(CB;CH) &= (CB;CD) + (CD;CH) \pmod{\pi}\\ &= (AB;AD) + (FD;FH) \pmod{\pi}\\ &= (EA;EH) \pmod{\pi} = (DA;DH) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Suy ra $\triangle HCB \backsim \triangle HDA$. Vì vậy $\frac{HC}{HD} = \frac{HB}{HA} = \frac{BC}{DA}$

Ta có $\frac{IB}{IA} = \frac{JC}{JD} = \frac{HC}{HD} = \frac{BC}{DA} = \frac{GC}{GD} = \frac{GB}{GA} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{GC}{GD} \\ \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{GB}{GA} \end{cases}$

Suy ra GI, GJ là phân giác của góc $\angle AGB, \angle CGD$ theo thứ tự đó và vì vậy, I, G, J thẳng hàng.



Lời giải 2.

Từ giả thiết, suy ra $(HD; HE) \equiv (AD; AE) \equiv (AD; AB) \equiv (CD; CB) \equiv (CD; CF) \equiv (HD; HF) \pmod{\pi}$. Suy ra E, H, F thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC ta được các đường tròn $(BAF), (CFD)$ và (EDA) cùng đi qua một điểm (khác D) và do đó, bốn đường tròn $(EDA), (FCD), (FAB), (EBC)$ cùng đi qua H.

Mặt khác

$$(D, C, E, J) = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} : \frac{\overline{JD}}{\overline{JC}} = \frac{HD \cdot \sin(HE; HD)}{HC \sin(HE; HC)} : \frac{HD \sin(HJ; HD)}{HE \sin(HJ; HE)}$$
$$= \frac{\sin(AD; AB)}{\sin(BC; BA)}$$

và tương tự $(B, A, E, I) = \frac{\sin(AD;AB)}{\sin(BC;BA)}$ Từ đó, và do phép chiếu xuyên tâm (tâm G) bảo toàn tỷ số kép, suy ra G, I, J thẳng hàng.

Câu 3.

\+ Nếu $f(x) \equiv c \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ thì hoặc $c = -1$ hoặc $c = \dfrac{1}{2}$

Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = -1$ thì

$$f(y) = f(x_0 + (y - x_0)) = \frac{-1 + f(y - x_0) + f(y - x_0)}{1 - 2f(y - x_0)} = -1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = \dfrac{1}{2}$ thì

$$f(y) = f(x_0 + (y - x_0)) = \frac{\frac{1}{2} + f(y - x_0) - \frac{1}{2} \cdot f(y - x_0)}{1 + f(y - x_0)} = \frac{1}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

\+ Xét trường hợp $f(x)$ không đồng nhất bằng hằng số. Trong (1), thay x, y bởi $\frac{x}{2}$, ta được $f(x) = \dfrac{2f(\frac{x}{2}) - (f(\frac{x}{2}))^2}{1 + 2f(\frac{x}{2})}$

Từ đó suy ra $-1 < f(x) < \frac{1}{2} \quad \forall x$ (do $f(x) \neq -1; \frac{1}{2} \ \ \forall x$).

Đặt $g(x)=\dfrac{1-2f(x)}{1+f(x)}$, do nhận xét trên thì $g(x)>0\quad \forall x$ và do $f(x)$ liên tục, nên $g(x)$ liên tục. Ta có

$$\begin{aligned} g(x+y)=\frac{1-2f(x+y)}{1+f(x+y)}&=\frac{1-2\cdot\frac{f(x)+f(y)-f(x)f(y)}{1+2f(x)f(y)}}{1+\frac{f(x)+f(y)-f(x)f(y)}{1+2f(x)f(y)}}\\ &=\frac{1-2f(x)-2f(y)+4f(x)f(y)}{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}\\ &=\frac{1-2f(x)}{1+f(x)}\cdot\frac{1-2f(y)}{1+f(y)}=g(x)g(y) \end{aligned}\tag{2}$$

Từ (2) và do $g(x)$ liên tục, theo kết quả về phương trình hàm Cauchy, tồn tại $c>0$ sao cho $g(x)=c^x$. Do đó $f(x)=\dfrac{1-g(x)}{2+g(x)}=\dfrac{1-c^x}{2+c^x}$

+ Thử lại:

$$\begin{aligned} f(x+y)&=\frac{1-c^{x+y}}{2+c^{x+y}}=\frac{3-3c^{x+y}}{6+3c^{x+y}}\\ &=\frac{2-2c^x+c^y-c^{x+y}+2+c^x-2c^y-c^{x+y}-1+c^x+c^y-c^{x+y}}{4+2c^x+2c^y+c^{x+y}+2-2c^x-2c^y+2c^{x+y}}\\ &=\frac{\frac{1-c^x}{2+c^x}+\frac{1-c^y}{2+c^y}-\frac{1-c^x}{2+c^x}\cdot\frac{1-c^y}{2+c^y}}{1+2\frac{1-c^x}{2+c^x}\cdot\frac{1-c^y}{2+c^y}}=\frac{f(x)+f(y)-f(x)f(y)}{1+2f(x)f(y)} \end{aligned}$$

+ Vậy, tất cả các hàm số $f(x)$ phải tìm là $f(x)=-1, f(x)=\dfrac{1}{2}$ và $f(x)=\dfrac{1-c^x}{2+c^x}$ với $c>0$ nào đó.

Câu 4. Đặt $x+1=a, y+1=b, z+1=c$. Do $x,y,z\in\mathbb{Z}^+$ nên $a,b,c\in\mathbb{Z}^+, a,b,c\geq 2$ và

$$a^b+1=(a+1)^c\Leftrightarrow((a+1)-1)^b+1=(a+1)^c$$

Suy ra $(-1)^b+1\equiv 0\pmod{(a+1)}$ do đó b lẻ.

Do công thức khai triển nhị thức Newton, ta có

$$C_b^1(a+1)(-1)^{b-1}+(-1)^b+1\equiv 0\pmod{(a+1)^2}$$

suy ra $(a+1)\mid b$ và a chẵn

Mặt khác, do $b\geq 2$ nên $C_c^1a+1\equiv 1\pmod{a^2}$suy ra $a\mid c$ và c cũng chẵn.

Đặt $a=2a_1, c=2c_1$ ta có

$$2^ba_1^b+1=(a+1)^c-1=((a+1)^{c_1}-1)((a+1)^{c_1}+1)$$

Suy ra $\gcd(((a+1)^{c_1}-1);(a+1)^{c_1}+1)=2$. Từ đó, do $2a_1\mid(a+1)^{c_1}-1$, nên được

$$(a+1)^{c_1}-1=2a_1^b, (a+1)^{c_1}+1=2^{b-1}$$

Từ đó $a_1=1, c_1=1\Rightarrow a=2, b=3, c=2$. Vậy $(x;y;z)=(1;2;1)$

Câu 5. Ký hiệu a_{ij} là để chỉ số được ghi ở hàng i và cột j. Khi đó, do cách xác định bảng nên

$$a_{ij}=(i-1)n+j\quad\forall i,j=1,2,\ldots,n$$

Do cách xóa, nên hai số được xóa không cùng hàng, cũng như không cùng cột; hay nói một cách khác, trên mỗi hàng và mỗi cột chỉ có đúng một số được xóa bỏ. Gọi $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$ là các số xóa đi (ở đây $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ là một hoán vị nào đó của $(1, 2, \ldots, n)$)

Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj_k} = \sum_{k=1}^{n}((k-1)n + j_k) = n\sum_{k=1}^{n}(k-1) + \sum_{k=1}^{n} j_k = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Suy ra tổng cần tính bằng

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2} - \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{n(n-1)(n^2+1)}{2}$$