

**ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2009 – 2010 ~ TRƯỜNG PTNK ĐHQG TP HCM**

NGÀY THỨ NHẤT (23/11/2009)

Bài 1.

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có ít nhất một nghiệm thực. Hãy xác định tất cả các bộ (a, b, c) như thế sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi x_0 là nghiệm thực của $P(x)$. Ta có:

$$x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -(x_0^4 + 1) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thì:

$$(x_0^4 + 1)^2 = (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x_0^6 + x_0^4 + x_0^2)$$

Đặt $t = x_0^2$ với $t \geq 0$ thì từ điều trên ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3 + t^2 + t} \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - \frac{4}{3} &\geq \frac{(t^2 + 1)^2}{t^3 + t^2 + t} - \frac{4}{3} = \frac{(t-1)^2(3t^2 + 2t + 3)}{t(t^2 + t + 1)} \geq 0 \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} t = 1 \\ \frac{a}{x_0^3} = \frac{b}{x_0^2} = \frac{c}{x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ a = b = c \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = -1 \\ a = c = -b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3} \vee \begin{cases} a = c = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy các giá trị cần tìm của a, b, c là:

$$(a, b, c) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ và } (a, b, c) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Bài 2.

Cho n là một số nguyên dương và tập hợp $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$. Một tập con của A được gọi là *tốt* nếu nó gồm đúng hai phần tử x, y sao cho $|x - y| \in \{1, n\}$. Tìm số các tập hợp $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ thỏa mãn A_i là tập con *tốt* của A với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$.

Lời giải:

Gọi u_n ($n = 1, 2, \dots$) là số các tập hợp $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài đồng thời hai phần tử n và $n + 1$ không đi cùng nhau trong bất cứ tập A_i nào. Ta chia các số $1, 2, \dots, 2n$ vào một bảng $2 \times n$ như sau:

1	2	...	n
$n + 1$	$n + 2$	...	$2n$

Thế thì mỗi cách chọn được liệt kê trong u_n tương ứng với một cách chọn từ bảng trên các cặp gồm hai số ở cùng một cột hoặc hai số liên tiếp nhau trên cùng một hàng. Xét u_{n+1} , vì phần tử

$2(n+1)$ chỉ có thể đi cùng với $n+1$ hoặc $2n+1$ trong cùng một tập A_i nào đó nên ta xét hai khả năng như sau:

1. $2(n+1)$ và $n+1$ cùng thuộc một tập A_i , giả sử đó là A_{n+1} .

1	2	...	$n+1$
$n+2$	$n+3$	...	$2(n+1)$

Lúc này, mỗi cách chọn một bộ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ứng với một cách chọn các cặp số gồm các số ở cùng một cột hoặc ở cạnh nhau trong cùng một hàng từ một bảng $2 \times n$. Theo định nghĩa của ta số cách chọn như thế là u_n . Vậy trong trường hợp này có u_n cách chọn.

2. $2(n+1)$ và $2n+1$ cùng thuộc một tập A_i , giả sử đó là A_{n+1} .

1	2	...	n	$n+1$
$n+2$	$n+3$	...	$2n+1$	$2(n+1)$

Lúc này ta thấy $n+1$ chỉ có thể đi cùng với $2(n+1)$ (trường hợp $n+1$ đi cùng với $n+2$ không được xét trong u_{n+1}) nhưng $2(n+1)$ đã đi cùng với $2n+1$ nên $n+1$ phải đi cùng với n trong cùng một tập A_i nào đó, giả sử đó là A_n . Đến đây, sử dụng lý luận như trường hợp trên ta thấy số cách chọn các tập $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\}$ là u_{n-1} .

Vậy theo quy tắc cộng thì $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Mặt khác $u_1 = 1, u_2 = 2$ nên ta có công thức:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Bây giờ ta xét trường hợp sinh ra bộ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ có n và $n+1$ đi cùng trong một tập A_i nào đó.

1	2	...	n
$n+1$	$n+2$	...	$2n$

Rõ ràng 1 chỉ có thể đi cùng với 2 hoặc $n+1$ nhưng $n+1$ đã đi cùng n nên 1 chỉ có thể đi cùng với 2. Tiếp theo, $n+2$ có thể đi cùng với 2, $n+1$ hay $n+3$ nhưng 2 đã đi với 1 còn $n+1$ đã đi với n nên $n+2$ phải đi với $n+3$. Tiếp tục, 3 có thể đi cùng 2, 4 hay $n+3$ nhưng 2 đã đi với 1 còn $n+3$ đã đi với $n+2$ nên 3 phải đi với 4. Tiếp tục lý luận như trên ta suy ra các tập A_i phải có dạng $\{1,2\}, \{3,4\}, \dots, \{n-2, n-1\}, \{n, n+1\}, \{n+2, n+3\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$. Từ đó suy ra trường hợp này chỉ cho ta một bộ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ nếu n lẻ và không cho bộ nào nếu n chẵn.

Tóm lại, số các bộ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$\begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) & \text{nếu } n \text{ lẻ và } n > 1 \end{cases}$$

Bài 3.

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- i. f tăng ngặt trên $\mathbb{N}^*$;

- ii. $f(f(n)) = 4n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
 iii. $f(f(n) - n) = 2n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

Vì f làm hàm tăng và $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ nên $f(a) - f(b) \geq a - b, \forall a, b \in \mathbb{N}^*$ và $a > b$.

Từ iii. ta có:

$$\begin{aligned} 2 &= 2(n+1) + 9 - (2n+9) = f(f(n+1) - (n+1)) - f(f(n) - n) \\ &\geq f(n+1) - (n+1) - (f(n) - n) = f(n+1) - f(n) - 1 \end{aligned}$$

Suy ra $f(n+1) - f(n) \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$, tức là $f(n+1) - f(n) \in \{1, 2, 3\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(n+1) - f(n) = 1$ thì $f(n+1) - (n+1) = f(n) - n$, suy ra:

$$2(n+1) + 9 = f(f(n+1) - (n+1)) = f(f(n) - n) = 2n + 9, \text{ vô lý}$$

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(n+1) - f(n) = 3$ thì $f(n+1) - (n+1) = f(n) - n + 2$. Ta lại có $f(f(n+1) - (n+1)) - f(f(n) - n) = 2$ nên nếu $f(n) > n$ thì ta đặt $t = f(n) - n$, sẽ có $t \in \mathbb{N}^*$ hơn nữa $f(t+2) = f(t) + 2$, mà f tăng nên $f(t+1) - f(t) = 1$, mâu thuẫn. Vậy nên $f(n) \leq n$, song vì f tăng nên $f(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, dẫn đến $f(n) = n$. Nhưng từ đây ta lại có $n = f(n) = f(f(n)) = 4n + 9$, suy ra $n = -3$, vô lý.

Vậy nên $f(n+1) - f(n) \notin \{1, 3\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và vì thế $f(n+1) - f(n) = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $f(n) = 2n + k$ với k nguyên nào đó. Thay vào $f(f(n)) = 4n + 9$ ta có $k = 3$.

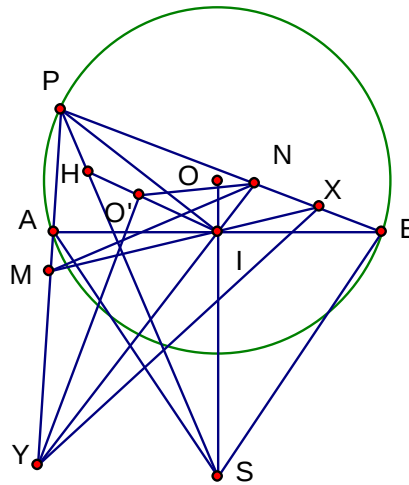
Vậy $f(n) = 2n + 3$ là hàm số duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 4.

Cho đường tròn (O) cố định và AB là một dây cố định khác đường kính của (O) . Gọi I là trung điểm của AB . P là một điểm di động trên cung lớn AB của (O) . Các điểm M, N lần lượt thuộc các tia PA, PB sao cho $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB$.

- Chứng minh rằng đường cao từ P của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.
- Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

Lời giải:



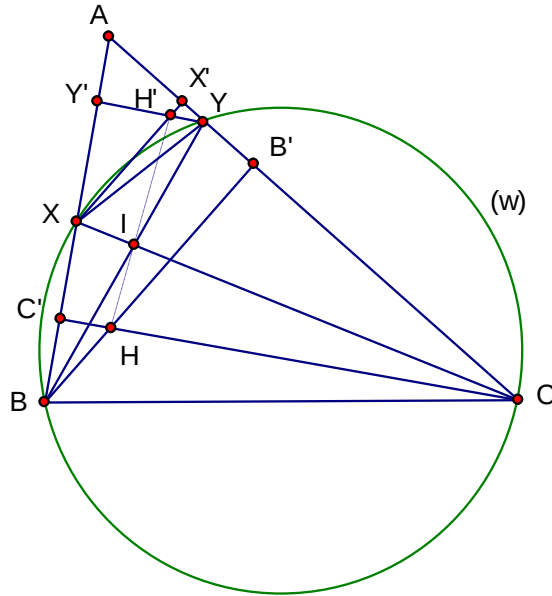
a. Ký hiệu $X \equiv MI \cap PB, Y \equiv NI \cap PA$. Ta có $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB$ nên các tam giác PMX và PNY cân tại X, Y . Từ đó suy ra $\angle PXM = \angle PYN = 180^\circ - 2\angle APB$, suy ra M, N, X, Y đồng viên. Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB thì S cố định. Ta có:

$$\angle ISB = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 2\angle APB = \angle PXM \text{ và tương tự } \angle ISA = \angle PYN$$

Suy ra I, S, X, B đồng viên và I, S, Y, A cũng đồng viên. Suy ra $\angle SXB = \angle SYA = \angle SIB = 90^\circ$, suy ra IS là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY . Mặt khác M, N, X, Y đồng viên nên MN và XY đối song với nhau trong $\angle APB$, suy ra $IS \perp MN$. Nói cách khác, đường cao từ M của tam giác PMN đi qua điểm S cố định (đpcm).

b. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Cho tam giác ABC và một đường tròn (ω) đi qua hai điểm B, C và cắt lại các cạnh AB, AC tại X, Y . Gọi XX', YY' là các đường cao của tam giác AXY và BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC , H, H' là trực tâm của tam giác ABC và tam giác AXY . Ký hiệu $I \equiv BY \cap CX$. Khi đó H, I, H' thẳng hàng.



Chứng minh bổ đề:

Ta có X, Y, X', Y' đồng viên nên $\overline{H'X} \cdot \overline{H'X'} = \overline{H'Y} \cdot \overline{H'Y'}$, tức là $\mathcal{P}_{H' \setminus [BY]} = \mathcal{P}_{H' \setminus [CX]}$ (ở đây ta dùng ký hiệu $[UV]$ để chỉ đường tròn đường kính UV).

Ta có B, C, B', C' đồng viên nên $\overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$, tức là $\mathcal{P}_{H \setminus [BY]} = \mathcal{P}_{H \setminus [CX]}$.

Cuối cùng B, C, X, Y đồng viên nên $\overline{IB} \cdot \overline{IY} = \overline{IC} \cdot \overline{IX}$, tức là $\mathcal{P}_{I \setminus [BY]} = \mathcal{P}_{I \setminus [CX]}$.

Suy ra H, I, H' thẳng hàng vì cùng thuộc trục đẳng phương của $[BY]$ và $[CX]$.

Bổ đề được chứng minh.

Vào bài, gọi H, O' lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác PMN . Ta có $O'P = O'M$ và $XP = XM$ nên XO' là đường trung trực của PM , suy ra $XO' \perp PY$. Tương tự ta cũng có $YO' \perp PX$. Vậy nên O' cũng chính là trực tâm của tam giác PXY . Áp dụng bổ đề cho

tam giác PXY với $(\omega) \equiv (MNX)$ thì ta có $O', H, I \equiv YN \cap MX$ thẳng hàng. Nói cách khác, đường thẳng Euler $O'H$ của tam giác PMN đi qua điểm I cố định (đpcm).

NGÀY THỨ HAI (24/11/2009)

Bài 5.

Cho a, b, c là các số thực dương. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax - aby + \frac{1}{xy} = bc^2 \\ abz - bc^2x + \frac{1}{zx} = a \\ bc^2y - az + \frac{1}{yz} = ab \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $(m, n, p) := (a, ab, bc^2)$ thế thì $m, n, p > 0$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases} mx - ny + \frac{1}{xy} = p \\ nz - px + \frac{1}{zx} = m \\ py - mz + \frac{1}{yz} = n \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} mx - ny - p = -\frac{1}{xy} \\ -m + nz - px = -\frac{1}{zx} \\ -mz - n + py = -\frac{1}{yz} \end{cases}$$

Xem $(*)$ là hệ phương trình tuyến tính ẩn (m, n, p) , ta có:

$$D = \begin{vmatrix} x & -y & -1 \\ -1 & z & -x \\ -z & -1 & y \end{vmatrix} = xyz - xyz - 1 - x^2 - y^2 - z^2 = -(1 + x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$$

$$D_m = \begin{vmatrix} -\frac{1}{xy} & -y & -1 \\ -\frac{1}{zx} & z & -x \\ -\frac{1}{yz} & -1 & y \end{vmatrix} = -\frac{z}{x} - \frac{x}{z} - \frac{y^2}{zx} - \frac{1}{zx} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = -\frac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{zx}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{xy} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{zx} & -x \\ -z & -\frac{1}{yz} & y \end{vmatrix} = -\frac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{yz}; D_p = \begin{vmatrix} x & -y & -\frac{1}{xy} \\ -1 & z & -\frac{1}{zx} \\ -z & -1 & -\frac{1}{yz} \end{vmatrix} = -\frac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{xy}$$

Từ đó:

$$(m, n, p) = \left(\frac{D_m}{D}, \frac{D_n}{D}, \frac{D_p}{D} \right) = \left(\frac{1}{zx}, \frac{1}{yz}, \frac{1}{xy} \right)$$

Suy ra:

$$\begin{cases} (xy)^{-1} = p = bc^2 \\ (yz)^{-1} = n = ab \Rightarrow (xyz)^{-1} = abc \vee (xyz)^{-1} = -abc \\ (zx)^{-1} = m = a \end{cases}$$

Giải ra ta thấy hệ có hai nghiệm là:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{c}, \frac{1}{bc}, \frac{c}{a}\right) \text{ và } (x, y, z) = \left(-\frac{1}{c}, -\frac{1}{bc}, -\frac{c}{a}\right)$$

Bài 6.

Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_1 = a; a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n - 2)^2, \forall n = 1, 2, \dots$. Ký hiệu:

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \forall n = 1, 2, \dots$$

Tìm tất cả các giá trị của a để $\{S_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra $S_{n+1} - S_n = (S_n - 2)^2$. Vậy nên dãy $\{S_n\}$ thực ra là được xác định như sau:

$$S_1 = a, S_{n+1} = f(S_n) = S_n^2 - 3S_n + 4$$

Ta có $S_{n+1} - S_n = (S_n - 2)^2 \geq 0$ nên $\{S_n\}$ là dãy không giảm. Mặt khác:

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

$\swarrow$ 2 $\searrow$ $\frac{7}{4}$ $\nearrow$ 2 $\nearrow$

Xét các trường hợp của a , ta thấy:

1. Nếu $a > 2$. Giả sử $\{S_n\}$ có giới hạn là L thì ta phải có $L = f(L)$ nên $L \in \{1, 2\}$, song vì $\{S_n\}$ không giảm nên $L \geq a > 2$, mâu thuẫn. Vậy nếu $a > 2$ thì $\{S_n\}$ không hội tụ.
2. Nếu $a < 1$ thì từ bảng biến thiên suy ra $S_2 = f(a) > 2$, quay về trường hợp 1 ta cũng có $\{S_n\}$ không hội tụ.
3. Nếu $1 \leq a \leq 2$ thì từ bảng biến thiên ta có:

$$\frac{7}{4} \leq S_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó, $\{S_n\}$ không giảm và bị chặn trên nên $\{S_n\}$ hội tụ.

Vậy các giá trị cần tìm của a là $a \in [1, 2]$.

Bài 7.

Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình sau có nghiệm nguyên dương x, y :

$$x^2 + y^2 + x + y = kxy$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$. Xét giá trị k sao cho phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương. Trong các nghiệm ấy, ta gọi (x_0, y_0) là nghiệm sao cho $x_0 \geq y_0 > 0$ và x_0 nhỏ nhất. Xét tam thức $f(x) = x^2 - (ky_0 - 1)x + y_0^2 + y_0$, ta có $f(x_0) = 0$ và theo định lý Viète thì $f(x)$ còn có một nghiệm $x'_0 = ky_0 - 1 - x_0$. Nhưng theo cách chọn (x_0, y_0) của ta thì $x'_0 \geq x_0 \geq y_0$ nên y_0 nằm ngoài khoảng hai nghiệm của tam thức bậc hai f có hệ số cao nhất là số dương. Từ đó $f(y_0) \geq 0$.

$$\Rightarrow y_0^2 - (ky_0 - 1)y_0 + y_0^2 + y_0 \geq 0 \Rightarrow k \leq 2 + \frac{2}{y_0} \leq 4 \text{ (vì } y_0 \geq 1)$$

Nếu $k = 1$ thì phương trình có dạng $x^2 + y^2 + x + y = xy$, tương đương với:

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + x + y = 0 \text{ (vô lý vì } x, y > 0)$$

Nếu $k = 2$ thì phương trình có dạng $x^2 + y^2 + x + y = 2xy$, tương đương với:

$$(x - y)^2 + x + y = 0 \text{ (vô lý vì } x, y > 0)$$

Nếu $k = 3$ thì phương trình có nghiệm $(x, y) = (2, 2)$.

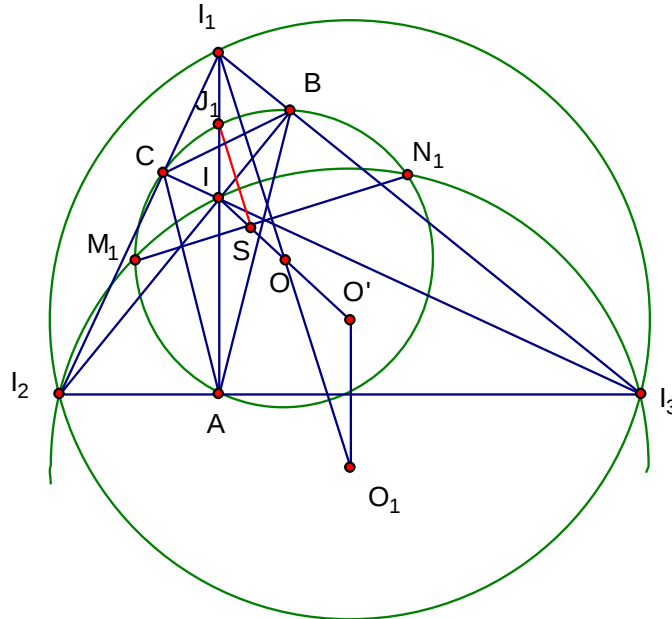
Nếu $k = 4$ thì phương trình có nghiệm $(x, y) = (1, 1)$.

Vậy các giá trị cần tìm của k là $k = 3$ và $k = 4$.

Bài 8.

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Ký hiệu I, I_1, I_2, I_3 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C của tam giác ABC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác II_2I_3 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm M_1, N_1 . AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại J_1 . Ký hiệu d_1 là đường thẳng đi qua J_1 và vuông góc với M_1N_1 . Các đường thẳng d_2, d_3 được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải:



Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_1I_2I_3$. Ta có $AI \perp I_2I_3, BI \perp I_3I_1$ nên I là trực tâm của tam giác $I_1I_2I_3$ và (O) là đường tròn Euler của tam giác $I_1I_2I_3$ nên O là trung điểm của IO' . Mà $\angle I_2O_1I_3 = 2(180^\circ - \angle I_2II_3) = 2\angle I_2I_1I_3 = \angle I_2O'I_3$ nên O' đối xứng với O_1 qua I_2I_3 , suy ra $\overrightarrow{O'O_1} = \overrightarrow{I_1I}$, tức là AIO_1O' là hình bình hành. Mà O là trung điểm của IO' nên O cũng là trung điểm của I_1O_1 . Hơn nữa $OO_1 \perp M_1N_1$ (đường nối tâm vuông góc với dây chung) nên $I_1O \perp M_1N_1$. Mặt khác, J_1 là trung điểm của II_1 (đường tròn Euler đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm của tam giác với đỉnh của tam giác ấy) nên phép vị tự:

$$\mathcal{H}\left(I, k = \frac{1}{2}\right): I_1O_1 \rightarrow d_1$$

Suy ra d_1 đi qua trung điểm S của OI . Lý luận tương tự thì d_2, d_3 cũng đi qua trung điểm S của OI . Vậy ta có d_1, d_2, d_3 đồng quy tại trung điểm S của OI (đpcm).