

TRẦN NAM DŨNG
(chủ biên)

LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI CÁC
TỈNH, CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC NĂM
HỌC 2009-2010

E-BOOK

Lời nói đầu

Lời cảm ơn

Xin cảm ơn sự nhiệt tình tham gia đóng góp của các bạn:

1. Phạm Đạt
2. Nguyễn Văn Năm
3. Võ Thành Văn

Cùng rất nhiều bạn yêu toán khác.

Mục lục

Lời nói đầu	iii
Lời cảm ơn	v
I Đề toán và lời giải	1
1 Số học	3
1.1 Đề bài	3
1.2 Lời giải	5
2 Phương trình, hệ phương trình	13
2.1 Đề bài	13
2.2 Lời giải	16
3 Bất đẳng thức và cực trị	25
3.1 Đề bài	25
3.2 Lời giải	28
II Một số bài giảng toán	41
4 Giải phương trình hàm bằng cách lập phương trình	43

Phần I

Đề toán và lời giải

Chương 1

Số học

1.1 Đề bài

1.1. Giả sử m, n là hai số nguyên dương thoả mãn $\frac{n}{d}$ là số lẻ với $d = (m, n)$. Xác định $(a_m + 1, a_n - 1)$ với a là số nguyên dương lớn hơn 1.

1.2. Dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6$ và

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

(a) Chứng minh rằng a_n chia hết cho n với mọi $n \geq 1$.

(b) Chứng minh rằng dãy số $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ chứa vô số số hạng chia hết cho 2009.

1.3. Cho m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, m là số chẵn. Tìm ước số chung lớn nhất của $m^2 + n^2$ và $m^3 + n^3$.

1.4. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thoả mãn $ac + bd$ chia hết cho $a^2 + b^2$. Chứng minh rằng

$$(c^2 + d^2, a^2 + b^2) > 1.$$

1.5. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình

$$x^2 + y^2 + x + y = kxy$$

có nghiệm nguyên dương.

1.6. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thoả mãn

$$x^2 + 15y^2 + 8xy - 8x - 36y - 28 = 0.$$

1.7. Chứng minh rằng

$$|12^m - 5^n| \geq 7$$

với mọi m, n nguyên dương.

1.8. Cho n là số nguyên dương sao cho 3^{n-1} chia hết cho 2^{2009} . Chứng minh rằng

$$n \geq 2^{2007}.$$

1.9. (1) Cho $a = 5^{2^{100}+100}$. Chứng minh số a có ít nhất 25 chữ số 0 đứng liền nhau.

(2) Chứng minh tồn tại vô số số tự nhiên n mà 5^n có ít nhất 100 chữ số 0 đứng liền nhau.

1.10. Cho $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thoả mãn các điều kiện

(i) $f(xy) = f(x)f(y)$ với mọi x, y thoả mãn $(x, y) = 1$;

(ii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi bộ số nguyên tố x, y .

Hãy tính $f(2), f(3), f(2009)$.

1.11. Tìm tất cả các bộ số tự nhiên a, b, c, d đôi một phân biệt thoả mãn

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2 = c^2 - d^2.$$

1.2 Lời giải

Bài 1.1. Giả sử m, n là hai số nguyên dương thỏa mãn $\frac{n}{d}$ là số lẻ với $d = (m, n)$.
Xác định $(a_m + 1, a_n - 1)$ với a là số nguyên dương lớn hơn 1.
(Đại học Vinh)

Lời giải. Do $d = (m, n)$ nên $\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$. Vì $\frac{n}{d}$ là số lẻ nên ta có $\left(\frac{2m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$, suy ra $(2m, n) = d$. Theo định lý Bezout, tồn tại u, v nguyên sao cho $2mu + nv = d$. Đặt $D = (a_m + 1, a_n - 1)$. Khi đó

$$a^m \equiv -1 \pmod{D},$$

suy ra

$$a^{2m} \equiv 1 \pmod{D}.$$

Ngoài ra ta đã có

$$a^n \equiv 1 \pmod{D}.$$

Từ những điều trên, ta suy ra

$$a^d = a^{2mu+nv} \equiv 1 \pmod{D}.$$

Do $m = dm'$ nên từ đây ta suy ra $a^m \equiv 1 \pmod{D}$. Kết hợp với $a^m \equiv -1 \pmod{D}$ ta suy ra $2 \equiv 0 \pmod{D}$. Từ đây suy ra $D = 1$ hoặc $D = 2$. Dễ thấy với a lẻ thì $D = 2$ còn với a chẵn thì $D = 1$. Đó chính là kết luận của bài toán.

Bình luận. Đây là một bài toán khá căn bản về bậc của một số theo modulo. Trong các bài toán như vậy, định lý Bezout luôn là một kết quả hữu ích.

Bài 1.2. Dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6$ và

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

(a) Chứng minh rằng a_n chia hết cho n với mọi $n \geq 1$.

(b) Chứng minh rằng dãy số $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ chứa vô số số hạng chia hết cho 2009.

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Phương trình đặc trưng của dãy $\{a_n\}$ có dạng $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$, tương đương $(x^2 - x - 1)^2 = 0$. Từ đó số hạng tổng quát của a_n có dạng

$$a_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n + n(c_3 \alpha^n + c_4 \beta^n),$$

trong đó $\alpha > \beta$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Từ đây, từ các điều kiện ban đầu, ta tìm được $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Suy ra

$$a_n = n \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^n \right).$$

Từ đây ta được $\frac{a_n}{n} = F_n$, với $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$ tức là dãy số Fibonacci. Kết luận câu (a) đến đây là hiển nhiên.

Để giải phần (b), ta có thể đi theo các hướng sau.

Cách 1. Dùng quy nạp chứng minh rằng $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$. Sau đó tiếp tục dùng quy nạp chứng minh rằng F_{kn} chia hết cho F_n . Từ đây, để chứng minh kết luận của bài toán, ta chỉ cần chỉ ra một giá trị nguyên dương n sao cho F_n chia hết cho 2009 là xong. Có thể tính toán được rằng F_{56} chia hết cho 49, còn F_{20} chia hết cho 41, từ đó F_{280} chia hết cho 2009.

Cách 2. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: Với mọi số nguyên dương N , tồn tại vô số số hạng của dãy số Fibonacci chia hết cho N .

Để thực hiện điều này, ta bổ sung thêm số hạng $F_0 = 0$ cho dãy Fibonacci. Chú ý là ta vẫn có hệ thức $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$. Gọi r_i là số dư trong phép chia F_i cho N . Xét $N^2 + 1$ cặp số dư $(r_0, r_1), (r_1, r_2), \dots, (r_N, r_{N+1})$. Do $0 \leq r_i \leq N - 1$ nên chỉ có N^2 cặp giá trị (r_i, r_{i+1}) khác nhau. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại cặp chỉ số $i < j$ sao cho $(r_i, r_{i+1}) \equiv (r_j, r_{j+1})$. Từ đây, do r_{k-1} chính là số dư trong phép chia $r_{k+1} - r_k$ cho N nên ta suy ra $r_{i-1} = r_{j-1}$, $r_{i-2} = r_{j-2}$, $\dots$, $r_0 = r_{j-i}$. Suy ra dãy số dư tuần hoàn với chu kỳ $j - i$. Vì $r_0 = 0$ nên $r_{k(j-i)} = 0$ với mọi $k = 1, 2, \dots$ và ta có $r_{k(j-i)}$ chia hết cho N với mọi $k = 1, 2, \dots$ (đpcm).

Bình luận. Ý tưởng dùng nguyên lý Dirichlet để chứng minh tính tuần hoàn của dãy số dư không mới. Đề thi vô địch Liên Xô trước đây có câu: Chứng minh rằng trong dãy số Fibonacci tồn tại ít nhất một số tận cùng bằng bốn chữ số 0.

Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2004 cũng có ý tưởng tương tự:

Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi: $x_1 = 603$, $x_2 = 102$ và

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_{n+1}x_n - 2} \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng

- (1) Tất cả các số hạng của dãy số đã cho đều là các số nguyên dương.
- (2) Tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho biểu diễn thập phân của x_n có bốn chữ số tận cùng là 2003.

- (3) Không tồn tại số nguyên dương n mà biểu diễn thập phân của x_n có bốn chữ số tận cùng là 2004.

Bài 1.3. Cho m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, m là số chẵn. Tìm ước số chung lớn nhất của $m^2 + n^2$ và $m^3 + n^3$.

(Đồng Nai)

Lời giải. Do (m, n) nguyên tố cùng nhau và m chẵn nên n lẻ. Đặt

$$d = (m^2 + n^2, m^3 + n^3).$$

Dễ thấy d lẻ. Do $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 + n^2 - mn)$ nên từ đây suy ra

$$d \mid mn(m + n).$$

Từ đây lại suy ra d là ước của $(m + n)^3$. Giả sử $d > 1$. Khi đó gọi p là một ước số nguyên tố của d thì $p \mid (m + n)^3$, suy ra $p \mid m + n$. Mặt khác

$$(m + n)^2 - (m^2 + n^2) = 2mn,$$

suy ra $p \mid 2mn$. Vì p lẻ nên $p \mid mn$. Vì p nguyên tố và $(m, n) = 1$ nên từ đây suy ra $p \mid m$ hoặc $p \mid n$. Nhưng do $p \mid m + n$ nên từ đây lại suy ra $p \mid n$ và tương ứng là $p \mid m$. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là $d = 1$.

Bài 1.4. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $ac + bd$ chia hết cho $a^2 + b^2$. Chứng minh rằng

$$(c^2 + d^2, a^2 + b^2) > 1.$$

(Đại học Sư phạm)

Bài 1.5. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình

$$x^2 + y^2 + x + y = kxy \tag{1}$$

có nghiệm nguyên dương.

(Phổ thông Năng khiếu)

Lời giải. Giả sử k là một giá trị sao cho phương trình (1) có nghiệm nguyên dương. Khi đó tồn tại nghiệm (x_0, y_0) của (1) với $x_0 + y_0$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x_0 \geq y_0$. Xét phương trình bậc hai

$$x^2 - (ky_0 - 1)x + y_0^2 + y_0 = 0. \tag{2}$$

Theo giả sử ở trên thì x_0 là một nghiệm của (2). Theo định lý Viet thì

$$x_1 = ky_0 - 1 - x_0 = \frac{y_0^2 + y_0}{x_0}$$

cũng là một nghiệm của (2). Để thấy x_1 là một số nguyên dương, vì thế (x_1, y_0) cũng là một nghiệm nguyên dương của (1). Từ giả thiết $x_0 + y_0$ nhỏ nhất ta suy ra

$$x_1 + y_0 \geq x_0 + y_0.$$

Tức là $\frac{y_0^2 + y_0}{x_0} \geq x_0$, suy ra $y_0^2 + y_0 \geq x_0^2$. Từ đây ta có bất đẳng thức kép

$$y_0^2 \leq x_0^2 \leq y_0^2 + y_0 < (y_0 + 1)^2,$$

suy ra $x_0 = y_0$. Thay vào (1) ta được $2 + \frac{2}{x_0} = k$, suy ra x_0 chỉ có thể bằng 1 hoặc 2, tương ứng k bằng 4 hoặc 3. Với $k = 3$ ta có $(2, 2)$ là nghiệm của (1), với $k = 4$ ta có $(1, 1)$ là nghiệm của (1). Vậy $k = 3$ và $k = 4$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Ta cũng có thể đánh giá k khác một chút, như sau.

Cách 1. Từ đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 + x_0 + y_0 = kx_0y_0$, chia hai vế cho x_0, y_0 , ta được

$$\frac{x_0}{y_0} + \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{x_0} = k.$$

Mặt khác, cũng theo lý luận ở trên thì $ky_0 - 1 - x_0 \geq x_0$ nên suy ra $\frac{x_0}{y_0} \leq \frac{k}{2} - \frac{1}{2y_0}$. Từ đó ta có

$$k \leq \frac{k}{2} - \frac{1}{2y_0} + \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{x_0} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2y_0} + \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{x_0} \leq \frac{k}{2} + \frac{5}{2}.$$

Từ đó suy ra $k \leq 5$. Hơn nữa k chỉ có thể bằng 5 khi $x_0 = y_0 = 1$ (trường hợp này dẫn đến mâu thuẫn). Trường hợp $k = 3$ ta có nghiệm $x = y = 2$, $k = 4$ ta có nghiệm $x = y = 1$. Còn với $k \leq 2$ thì rõ ràng là phương trình vô nghiệm.

Cách 2. Lý luận như trên thì

$$x_0 \leq x_1 = \frac{y_0^2 + y_0}{x_0} \leq y_0 + 1.$$

Như vậy $y_0 + 1$ nằm ngoài hai nghiệm của tam thức $f(x) = x^2 - (ky_0 - 1)x + y_0^2 + y_0$, suy ra $f(y_0 + 1) \geq 0$. Từ đó

$$k \leq \frac{2(y_0 + 1)}{y_0} = 2 + \frac{2}{y_0} \leq 4.$$

Bình luận. Kỹ thuật sử dụng trong lời giải trên được gọi là kỹ thuật phương trình Markov. Kỹ thuật này hiện nay đã trở nên khá quen thuộc. Dưới đây là một số bài toán có thể giải được bằng kỹ thuật này:

1. Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên dương sao cho $n = \frac{x^2 + y^2}{xy + 1}$ là một số nguyên thì n là một số chính phương.

(IMO 1988)

2. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình

$$x + y + z + t = n\sqrt{xyzt}$$

có nghiệm nguyên dương.

(VMO 2002)

Sẽ thú vị nếu chúng ta xét bài toán tìm tất cả các nghiệm của (1) khi $k = 3$ và $k = 4$.

Bài 1.6. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thoả mãn*

$$x^2 + 15y^2 + 8xy - 8x - 36y - 28 = 0.$$

(Cần Thơ)

Bài 1.7. *Chứng minh rằng*

$$|12^m - 5^n| \geq 7$$

với mọi m, n nguyên dương.

(Hải Phòng)

Bài 1.8. *Cho n là số nguyên dương sao cho 3^{n-1} chia hết cho 2^{2009} . Chứng minh rằng*

$$n \geq 2^{2007}.$$

(Bình Định)

Bài 1.9. (1) *Cho $a = 5^{2^{100}+100}$. Chứng minh số a có ít nhất 25 chữ số 0 đứng liền nhau.*

(2) Chứng minh tồn tại vô số số tự nhiên n mà 5^n có ít nhất 100 chữ số 0 đứng liền nhau.

(Bắc Ninh)

Hướng dẫn. Hãy chứng minh rằng $5^{2^{100}+100} - 5^{100}$ tận cùng bằng ít nhất 100 chữ số 0 (tức là chia hết cho 10^{100}) và $5^{100} < 10^{75}$.

Bình luận. Bài toán này kiến thức sử dụng không khó nhưng phát biểu khá đẹp và thú vị.

Bài 1.10. Cho $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thoả mãn các điều kiện

(i) $f(xy) = f(x)f(y)$ với mọi x, y thoả mãn $(x, y) = 1$;

(ii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi bộ số nguyên tố x, y .

Hãy tính $f(2)$, $f(3)$, $f(2009)$.

(Ninh Bình)

Lời giải. Thay $x = 2, y = 3$ vào (i), ta được $f(6) = f(2)f(3)$. Thay $x = y = 3$ vào (ii), ta được $f(6) = 2f(3)$. Từ đây suy ra $f(2) = 2$. Từ đó $f(4) = 2f(2) = 4$. Đặt $f(3) = a$, ta lần lượt tính được

$$f(5) = f(3) + f(2) = a + 2,$$

$$f(7) = f(5) + f(2) = a + 4,$$

$$f(12) = f(7) + f(5) = 2a + 6.$$

Mặt khác $f(12) = f(3)f(4) = 4a$ nên ta suy ra $2a + 6 = 4a$, tức là $a = 3$. Vậy $f(3) = 3$. Từ đây suy ra $f(5) = 5, f(7) = 7$. Ta lại có

$$f(11) + f(3) = f(14) = f(2)f(7) = 2 \cdot 7 = 14,$$

suy ra

$$f(11) = f(14) - f(3) = 11.$$

Để tính $f(2009)$, ta sẽ lần lượt tính $f(41)$ và $f(49)$. Vì 41 là số nguyên tố nên

$$f(41) + f(3) = f(44) = f(4)f(11) = 4f(11) = 44,$$

suy ra $f(41) = 41$. Ta có

$$f(49) = f(47) + f(2) = 2 + f(47).$$

Mà

$$f(47) + f(5) = f(52) = f(4)f(13) = 4(f(11) + f(2)) = 4(11 + 2) = 52,$$

suy ra $f(47) = 47$ và $f(49) = 49$. Cuối cùng

$$f(2009) = f(41)f(49) = 41 \cdot 49 = 2009.$$

Bình luận. Điều đáng ngại nhất trong lời giải bài này là rất dễ nhầm vì ngộ nhận. Sẽ thú vị nếu xét bài toán tổng quát: Chứng minh $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương.

Bài 1.11. *Tìm tất cả các bộ số tự nhiên a, b, c, d đôi một phân biệt thỏa mãn*

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2 = c^2 - d^2.$$

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Chương 2

Phương trình, hệ phương trình

2.1 Đề bài

2.1. Giải phương trình

$$\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 2 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

2.2. Giải phương trình

$$9 \left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} \right) = x + 3.$$

2.3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = z + a \\ z^2 = x + a \end{cases},$$

trong đó a là tham số thoả mãn điều kiện $0 < a < 1$.

2.4. Giải phương trình

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin 3x - \cos 3x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}.$$

2.5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

2.6. Giải phương trình

$$-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2 \sqrt[3]{5x - x^3}.$$

2.7. (a) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a sao cho phương trình

$$a(\sin 2x + 1) + 1 = (a - 3)(\sin x + \cos x)$$

có nghiệm.

(b) Phương trình $2^x - 1 - x^2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm số thực? Hãy giải thích.

2.8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x + 5} + \sqrt{y^2 + 8} = 6 \end{cases}.$$

2.9. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$3x^2 + 11x - 1 = 13\sqrt{2x^3 + 2x^2 + x - 1}.$$

2.10. Giải trong tập hợp các số thực hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2009} x_i = 2009 \\ \sum_{i=1}^{2009} x_i^8 = \sum_{i=1}^{2009} x_i^6 \end{cases}.$$

2.11. Cho a, b, c là các số thực dương. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax - aby + \frac{1}{xy} = bc^2 \\ abz - bc^2x + \frac{1}{zx} = a \\ bc^2 - az + \frac{1}{yz} = ab \end{cases} .$$

2.12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) = -125 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases} .$$

2.13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + xy + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2 + xy + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2 \end{cases} .$$

2.14. (a) Giải phương trình

$$(x-1)(x+2) - (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} - 2 = 0.$$

(b) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = (1 + \sqrt[3]{xyz})^3 \end{cases} .$$

2.2 Lời giải

Bài 2.1. Giải phương trình

$$\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 2 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}. \quad (1)$$

(Đại học Vinh)

Lời giải. Điều kiện để phương trình (1) xác định là $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$. Bây giờ, ta biến đổi phương trình (1) như sau

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + x + 3 &= \log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) - \left(4 + \frac{2}{x}\right) + \frac{2}{x} + 4 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2, \\ \log_2 \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + x + 2 &= \log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) - 2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - 2t + t^2$ với $t > 0$. Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2t - 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{t \ln 2}} 2t - 2 = 2\sqrt{\frac{2}{\ln 2}} - 2 > 0,$$

nên $f(t)$ là hàm đồng biến với $t > 0$. Mặt khác, ta thấy rằng phương trình (2) có dạng

$$f(\sqrt{x+2}) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right),$$

nên từ việc sử dụng kết quả $f(t)$ đồng biến, ta thấy rằng nó tương đương với

$$\sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn, ta viết được phương trình này thành

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Giải ra, ta tìm được $x = -1$ (nhận), $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ (nhận) và $x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ (loại). Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{-1, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bình luận. Với bài toán vừa có hàm log (hay mũ) và vừa có hàm đa thức (phân thức) thông thường thì việc nghĩ đến dùng tính đơn điệu của hàm số để giải là điều dễ hiểu. Bài này chỉ khó hơn đề đại học một tí.

Bài 2.2. Giải phương trình

$$9(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}) = x+3.$$

(Hà Nội)

Lời giải. Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Nhân hai vế của phương trình với $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}$, ta được

$$9[(4x+1) - (3x-2)] = (x+3)(\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}).$$

Sau khi thu gọn, ta viết được phương trình này dưới dạng

$$9(x+3) = (x+3)(\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}).$$

Do $x+3 > 0$ nên ta có phương trình tương đương

$$9 = \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}.$$

Đến đây ta có thể giải bằng nhiều cách.

Cách 1. Kết hợp với phương trình $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{9}$ để được phương trình $\sqrt{4x+1} = \frac{x+84}{9}$ từ đó giải được bằng cách bình phương hai vế.

Cách 2. Giải phương trình $9 = \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}$ bằng phương pháp bình phương liên tiếp.

Cách 3. Chú ý rằng $f(x) = \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}$ là một hàm số tăng trên miền xác định. Do đó phương trình $f(x) = 9$ có không quá một nghiệm. Nhận thấy $x = 6$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 9$, suy ra $x = 6$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 9$, và cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đề bài.

Bài 2.3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = y+a \\ y^2 = z+a \\ z^2 = x+a \end{cases},$$

trong đó a là tham số thoả mãn điều kiện $0 < a < 1$.

(Ninh Bình)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Từ đó suy ra $z^2 = \max\{x^2, y^2, z^2\}$. Đến đây, ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $z \geq 0$. Trong trường hợp này, ta dễ dàng tìm được nghiệm của hệ đã cho là $x = y = z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

Trường hợp 2. $z < 0$. Nếu $x \geq 0$ thì từ phương trình thứ ba ta có $z^2 \geq a$, suy ra $z \leq -\sqrt{a} < -a$, dẫn tới $y^2 < 0$, mâu thuẫn. Vậy ta phải có $0 > x \geq y$. Từ $x + a \geq z + a$ ta có $z^2 \geq y^2$, suy ra $y \geq z$ (vì $y, z < 0$). Như thế $y + a \geq z + a$, dẫn tới $x^2 \geq y^2$, hay $x \leq y$ (vì $x, y < 0$). Từ đây và từ $x \geq y$, ta có $x = y$. Thay vào hai phương trình đầu, ta tìm được $x = y = z$. Với kết quả vừa tìm được này, thay vào hệ đã cho ta dễ dàng giải ra được $x = y = z = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = y = z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ và $x = y = z = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

Bài 2.4. Giải phương trình

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin 3x - \cos 3x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}.$$

(Đồng Nai)

Lời giải. Sử dụng hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} \sin 3x - \cos 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x + 3 \cos x - 4 \cos^3 x \\ &= (\sin x + \cos x)[3 - 4(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)] \\ &= (\sin x + \cos x)(2 \sin 2x - 1), \end{aligned}$$

ta được điều kiện để phương trình có nghĩa là $(\sin x + \cos x)(2 \sin 2x - 1) \neq 0$ và trong điều kiện đó, phương trình được rút gọn lại thành

$$\sin x - \cos x = (\sin^3 x - \cos^3 x)(2 \sin 2x - 1),$$

tương đương

$$(\sin x - \cos x)[1 - (\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)(2 \sin 2x - 1)] = 0,$$

hay

$$(\sin x - \cos x) \left(-\sin^2 2x - \frac{3}{2} \sin 2x + 2 \right) = 0.$$

Từ đó giải ra được phương trình.

Bình luận. Bài này giống đề thi đại học hơn, không có ý tưởng gì.

Bài 2.5. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

(Đồng Nai)

Lời giải. Hệ phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$\begin{cases} (x^2 + y) + x(1 - 2y) = 0 \\ (x^2 + y)^2 + 3x^2(1 - 2y) \geq 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất, ta tìm được $x^2 + y = -x(1 - 2y)$. Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$x^2(1 - 2y)^2 + 3x^2(1 - 2y) = 0,$$

hay

$$2x^2(1 - 2y)(2 - y) = 0,$$

suy ra $x = 0$, hoặc $1 - 2y = 0$, hoặc $2 - y = 0$.

+ Xét $x = 0$. Khi đó từ $x^2 + y = -x(1 - 2y)$, ta tìm được $x = y = 0$.

+ Xét $1 - 2y = 0$. Từ đây và từ $x^2 + y = -x(1 - 2y)$, ta suy ra $x^2 = -y = -\frac{1}{2} < 0$, vô nghiệm.

+ Xét $2 - y = 0$. Thay vào phương trình thứ nhất, ta có $x^2 - 3x + 2 = 0$. Giải ra tìm được $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Tóm lại, hệ đã cho có ba nghiệm là $(x, y) = (0, 0)$, $(1, 2)$ và $(2, 2)$.

Bài 2.6. *Giải phương trình*

$$-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}.$$

(Bình Định)

Lời giải. Để thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho x^3 , ta được

$$-2 + \frac{10}{x} - \frac{17}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1},$$

tương đương

$$8t^3 - 17t^2 + 10t - 2 = 2\sqrt[3]{5t^2 - 1}, \quad (1)$$

với $t = \frac{1}{x}$ ($t \neq 0$).

Ta tiếp tục biến đổi phương trình (1) thành

$$(2t - 1)^3 + 2(2t - 1) = 5t^2 - 1 + 2\sqrt[3]{5t^2 - 1}.$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ thì $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ nên f là một hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Phương trình cuối cùng có thể viết lại thành

$$f(2t - 1) = f\left(\sqrt[3]{5t^2 - 1}\right).$$

Do f là hàm số tăng nên phương trình này tương đương với

$$2t - 1 = \sqrt[3]{5t^2 - 1},$$

hay

$$8t^3 - 12t^2 + 6t - 1 = 5t^2 - 1.$$

Giải ra ta được $t = 0$ (loại), $t = \frac{17 \pm \sqrt{97}}{16}$. Tương ứng ta tìm được $x = \frac{17 \pm \sqrt{97}}{12}$.

Bài 2.7. (a) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a sao cho phương trình

$$a(\sin 2x + 1) + 1 = (a - 3)(\sin x + \cos x)$$

có nghiệm.

(b) Phương trình $2^x - 1 - x^2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm số thực? Hãy giải thích.

Hướng dẫn. (a) Đặt $t = \sin x + \cos x$ thì $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Đưa bài toán về tìm a sao cho phương trình $at^2 + (3 - a)t + 1 = 0$ có nghiệm $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Có thể giải bằng phương pháp tam thức bậc hai hoặc khảo sát hàm số $y = \frac{3t + 1}{t - t^2}$ trên đoạn $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Đáp số: $a \leq 1$ hoặc $a \geq 9$.

(b) Đặt $f(x) = 2^x - 1 - x^2$ thì $f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2$. Phương trình $f''(x) = 0$ có một nghiệm thực, suy ra $f'(x)$ có không quá hai nghiệm thực và $f(x)$ có không quá ba nghiệm thực. Mặt khác, ta có 0, 1 là nghiệm của $f(x)$, ngoài ra $f(4) = -1$, $f(5) = 6$ nên $f(x)$ có một nghiệm nữa nằm giữa 4 và 5. Suy ra số nghiệm thực của phương trình là 3.

Bài 2.8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$$

(Đồng Nai)

Lời giải. Nếu $y = 0$ thì từ phương trình (1) suy ra $x = 0$, và phương trình (2) không được thoả mãn. Vậy $y \neq 0$. Chia hai vế của phương trình (1) cho y^5 , ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y. \quad (3)$$

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x$, ta có $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, suy ra f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Phương trình (3) có thể viết lại thành $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y)$ và do f là hàm tăng nên tương đương với $\frac{x}{y} = y$, suy ra $x = y^2$. Thay vào phương trình (2), ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6. \quad (4)$$

Giải ra ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (4). Từ đó hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 1)$ và $(x, y) = (1, -1)$.

Ghi chú. Tham khảo thêm lời giải bài 2.2 (Hà Nội) và bài 2.6 (Bình Định).

Bài 2.9. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$3x^2 + 11x - 1 = 13\sqrt{2x^3 + 2x^2 + x - 1}.$$

(Cần Thơ)

Bài 2.10. Giải trong tập hợp các số thực hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2009} x_i = 2009 \\ \sum_{i=1}^{2009} x_i^8 = \sum_{i=1}^{2009} x_i^6 \end{cases}.$$

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. Giả sử $(x_1, x_2, \dots, x_{2009})$ là một nghiệm của hệ. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$2009 \sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{2009} x_i \right)^2,$$

suy ra

$$\sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \geq 2009. \quad (1)$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho các bộ số $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{2009}^2)$ và $(x_1^6, x_2^6, \dots, x_{2009}^6)$ được sắp thứ tự như nhau, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{2009} x_i^6 \right) \leq 2009 \sum_{i=1}^{2009} x_i^8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{2009} x_i^8 \geq \sum_{i=1}^{2009} x_i^6. \quad (3)$$

Từ phương trình thứ hai của hệ đã cho ta suy ra dấu bằng xảy ra ở (3), tức là dấu bằng phải xảy ra ở (1) và ở (2), tức là ta phải có tất cả các x_i bằng nhau. Từ đó suy ra tất cả các x_i bằng 1. Vậy $x_1 = x_2 = \dots = x_{2009} = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Bài 2.11. Cho a, b, c là các số thực dương. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax - aby + \frac{1}{xy} = bc^2 \\ abz - bc^2x + \frac{1}{zx} = a \\ bc^2 - az + \frac{1}{yz} = ab \end{cases}.$$

(Phổ thông Năng khiếu)

Hướng dẫn. Viết hệ dưới dạng

$$\begin{cases} Ax - By + \frac{1}{xy} = C \\ Bz - Cx + \frac{1}{zx} = A \\ C - Az + \frac{1}{yz} = B \end{cases}.$$

rồi giải hệ tìm A, B, C theo x, y, z (phương pháp giải theo tham số).

Bài 2.12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) = -125 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}.$$

(Đồng Tháp)

Lời giải. Cách 1. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 27x^3y^3 + 125 = 9y^3 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $y \neq 0$. Nhân hai vế của phương trình thứ hai với $\frac{3}{2}y$, ta được

$$\begin{cases} 27x^3y^3 + 125 = 9y^3 \\ \frac{135}{2}x^2y^2 + \frac{225}{2}xy = 9y^3 \end{cases}.$$

Trong hệ hai phương trình này, trừ tương ứng vế theo vế cho ta

$$27(xy)^3 - \frac{135}{2}(xy)^2 - \frac{225}{2}xy + 125 = 0.$$

Giải ra ta tìm được $xy = -\frac{5}{3}$, hoặc $xy = \frac{10}{3}$, hoặc $xy = \frac{5}{6}$. Thay vào phương trình thứ nhất ở trên, ta tìm được tương ứng $y = 0$ (loại), $y = 5$ và $y = \frac{5}{2}$. Từ đó suy ra các nghiệm x tương ứng là $x = \frac{2}{3}$ và $x = \frac{1}{3}$.

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, 5\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$.

Cách 2. Viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 27x^3y^3 + 125 = 9y^3 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $y \neq 0$. Do đó hệ trên có thể được viết dưới dạng tương đương là

$$\begin{cases} 27x^3 + \frac{125}{y^3} = 9 \\ \frac{45x^2}{y} + \frac{75x}{y^2} = 6 \end{cases},$$

hay

$$\begin{cases} (3x)^3 + \left(\frac{5}{y}\right)^3 = 9 \\ 3x \cdot \frac{5}{y} \cdot \left(3x + \frac{5}{y}\right) = 6 \end{cases}.$$

Đặt $a = 3x$ và $b = \frac{5}{y}$. Thế thì ta có

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ ab(a + b) = 6 \end{cases}.$$

Bằng một chút biến đổi đơn giản, dễ thấy hệ này tương đương với

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}.$$

Giải ra ta tìm được $a = 2, b = 1$ (tương ứng với $x = \frac{2}{3}, y = 5$) hoặc $a = 1, b = 2$ (tương ứng với $x = \frac{1}{3}, y = \frac{5}{2}$).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, 5\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$.

Bình luận. Thực chất bài hệ trên xuất phát từ đề thi đề nghị 30-4 lần thứ XIV của trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}.$$

Bài 2.13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + xy + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2 + xy + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2 \end{cases}.$$

(An Giang)

Bài 2.14. (a) Giải phương trình

$$(x-1)(x+2) - (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} - 2 = 0.$$

(b) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = (1 + \sqrt[3]{xyz})^3 \end{cases}.$$

(Phú Yên)

Chương 3

Bất đẳng thức và cực trị

3.1 Đề bài

3.1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $1 \geq x \geq y \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3y^2 + y^3 + x^2}{x^2 + y^2 + 1} \geq xy.$$

3.2. Cho a, b, c là ba số thực cho trước thỏa mãn $D = ac - b^2 > 0$ và hàm số $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên u, v không đồng thời bằng 0 sao cho

$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}.$$

3.3. Tìm điều kiện của số dương k sao cho với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$, ta luôn có

$$\frac{1}{a^k(b+c)} + \frac{1}{b^k(c+a)} + \frac{1}{c^k(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

3.4. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn

$$a < b < c, \quad a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = -3.$$

Chứng minh rằng

$$-2 < abc < 2 \quad \text{và} \quad -2 < a < -1 < b < 1 < c < 2.$$

3.5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $SA = SB = SC = a$, trong đó a là một số thực dương cho trước.

- (1) Chứng minh rằng $SD < \sqrt{3}a$.
- (2) Xác định độ dài cạnh SD theo a để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

3.6. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{MB \cdot MC}{bc} + \frac{MC \cdot MA}{ca} + \frac{MA \cdot MB}{ab} \geq 1.$$

3.7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi R và r lần lượt là bán kính hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp của nó. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{R}{r}$.

3.8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

3.9. Với ba số dương x, y, z , ta kí hiệu M là số lớn nhất trong ba số

$$\ln z + \ln\left(\frac{x}{yz} + 1\right), \quad \ln \frac{1}{z} + \ln(xyz + 1), \quad \ln y + \ln\left(\frac{1}{xyz} + 1\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của M khi x, y, z thay đổi.

3.10. Cho x, y, z là ba số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4.$$

3.11. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

3.12. (1) Xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^{3/2} - \frac{3x}{2}$ trên $(0, +\infty)$.

(2) Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

3.13. Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 + c^2$.

3.2 Lời giải

Bài 3.1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $1 \geq x \geq y \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3y^2 + y^3 + x^2}{x^2 + y^2 + 1} \geq xy.$$

(Hà Nội)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $x^3y^2 + y^3 \geq 2xy^2\sqrt{xy}$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$2y^2\sqrt{xy} + x \geq y(x^2 + y^2 + 1),$$

tương đương

$$(x - y) + 2y^2\sqrt{xy} - y(x^2 + y^2) \geq 0.$$

Do $(1 - x^2)(x - y) \geq 0$ nên $x - y \geq x^2(x - y)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$x^2(x - y) + 2y^2\sqrt{xy} - y(x^2 + y^2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này được viết lại như sau

$$x^2(x - y) + y^2(x + y) - y(x^2 + y^2) \geq y^2(x + y - 2\sqrt{xy}),$$

hay

$$x(x - y)^2 \geq y^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$$

Ta có

$$x(x - y)^2 = x(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq x^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq y^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2,$$

nên bất đẳng thức cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$ và $x = y = 0$.

Bình luận. Lời giải trên sử dụng kỹ thuật "thuần nhất hóa", một kỹ thuật rất hữu hiệu đối với các dạng bài toán không thuần nhất. Chẳng hạn, bạn đọc có thể thử sử dụng kỹ thuật này để giải hai bài toán sau:

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

2. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c).$$

Một điều thú vị là sử dụng kết quả hai bài toán này, ta có thể giải bài toán thi APMO 2004: Cho a, b, c là các số thực dương. Khi đó

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Bài 3.2. Cho a, b, c là ba số thực cho trước thỏa mãn $D = ac - b^2 > 0$ và hàm số $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên u, v không đồng thời bằng 0 sao cho

$$|f(u, v)| \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}.$$

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Để ý rằng $|-f(x, y)| = |f(x, y)|$ nên ta chỉ cần xét $a \geq 0$ là được. Kết hợp với giả thiết $D = ac - b^2 > 0$, ta có $a > 0$ và $c > 0$. Lúc này ta có

$$f(x, y) = a\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + \frac{D}{a}y^2 \geq 0.$$

Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với việc chỉ ra cặp số nguyên (u, v) không đồng thời bằng 0 sao cho

$$f(u, v) \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}.$$

Gọi $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 > 0\}$. Thế thì ta có $f(x, y) > 0$ với mọi $(x, y) \in A$. Gọi $(u, v) \in A$ sao cho $f(u, v) = \min_{(x, y) \in A} f(x, y)$ và đặt $K = f(u, v)$,

$K > 0$. Rõ ràng u, v phải là hai số nguyên tố cùng nhau, do đó tồn tại hai số nguyên s, t sao cho

$$us - vt = 1. \quad (*)$$

Đặt $g(x, y) = f(ux + ty, vx + sy)$, ta có

$$\min_{(x, y) \in A} g(x, y) = \min_{(x, y) \in A} f(ux + ty, vx + sy) = f(u, v) = K$$

(đạt được tại $x = 1$ và $y = 0$). Đặt $L = uta + vsc + btv + usb$, sau một vài tính toán đơn giản ta viết được

$$g(x, y) = f(ux + ty, vx + sy) = f(u, v) \cdot x^2 + 2Lxy + f(t, s) \cdot y^2.$$

Từ $(*)$, ta có

$$K \cdot f(t, s) = f(u, v) \cdot f(t, s) = L^2 + D,$$

suy ra

$$g(x, y) = K\left(x + \frac{Ly}{K}\right)^2 + \frac{Dy^2}{K}.$$

Bây giờ, ta chọn số n như sau

$$n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{K} \right\rfloor & \text{nếu } \left\{ \frac{L}{K} \right\} \leq \frac{1}{2} \\ \left\lfloor \frac{L}{K} \right\rfloor + 1 & \text{nếu } \left\{ \frac{L}{K} \right\} > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dễ thấy $\left| n - \frac{L}{K} \right| \leq \frac{1}{2}$, do đó

$$K \leq g(n, -1) = K \left(n - \frac{L}{K} \right)^2 + \frac{D}{K} \leq \frac{K}{4} + \frac{D}{K},$$

suy ra $K^2 \leq \frac{4D}{3}$, hay $K \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}$. Đó là điều phải chứng minh.

Bài 3.3. *Tìm điều kiện của số dương k sao cho với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$, ta luôn có*

$$\frac{1}{a^k(b+c)} + \frac{1}{b^k(c+a)} + \frac{1}{c^k(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(Bắc Ninh)

Lời giải. Xét $t > 0$, cho $a = b = t$ và $c = \frac{1}{t^2}$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{2}t^{2k-1} + \frac{2t^{2-k}}{t^3+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Nếu $k < \frac{1}{2}$ thì cho $t \rightarrow +\infty$, vế trái tiến dần về 0, trong khi vế phải là hằng số và lớn hơn 0, mâu thuẫn. Do đó ta phải có $k \geq \frac{1}{2}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $k \geq 2$. Thật vậy, giả sử $\frac{1}{2} < k < 2$, cho $t \rightarrow 0$, vế trái tiến dần về 0, trong khi đó vế phải là hằng số là lớn hơn 0, mâu thuẫn. Vậy ta phải có $k \geq 2$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với $k \geq 2$ thì bất đẳng thức đã cho đúng. Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai bộ đơn điệu cùng chiều

$$\left(\frac{1}{a^{k-2}}, \frac{1}{b^{k-2}}, \frac{1}{c^{k-2}} \right) \quad \text{và} \quad \left(\frac{1}{a^2(b+c)}, \frac{1}{b^2(c+a)}, \frac{1}{c^2(a+b)} \right),$$

ta được

$$\sum \frac{1}{a^k(b+c)} \geq \frac{1}{3} \left(\sum \frac{1}{a^{k-2}} \right) \left[\sum \frac{1}{a^2(b+c)} \right].$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\frac{1}{a^{k-2}} + \frac{1}{b^{k-2}} + \frac{1}{c^{k-2}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^{k-2}b^{k-2}c^{k-2}}} = 3.$$

Kết hợp với trên, ta có

$$\frac{1}{a^k(b+c)} + \frac{1}{b^k(c+a)} + \frac{1}{c^k(a+b)} \geq \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

tương đương

$$\frac{bc}{a(b+c)} + \frac{ca}{b(c+a)} + \frac{ab}{c(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Đây chính là bất đẳng thức Nesbitt được áp dụng cho ba số dương bc, ca, ab . Tóm lại, ta có $k \geq 2$ là tập hợp các giá trị cần tìm.

Bình luận. Có thể thấy bài này cho ta một kết quả tổng quát cho bài toán thi IMO 1995: Nếu a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$ thì

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Mặt khác khi thay lũy thừa k ở từng phân số bởi a, b, c ta được một bất đẳng thức thú vị với chiều ngược lại là

$$\frac{1}{a^a(b+c)} + \frac{1}{b^b(c+a)} + \frac{1}{c^c(a+b)} \leq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh bất đẳng thức này bằng cách dùng bất đẳng thức Bernoulli.

Bài 3.4. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn

$$a < b < c, \quad a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = -3.$$

Chứng minh rằng

$$-2 < abc < 2 \quad \text{và} \quad -2 < a < -1 < b < 1 < c < 2.$$

(Ninh Bình)

Lời giải. Xét hàm số

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \\ &= x^3 - 3x - abc. \end{aligned}$$

Ta có $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, $f'(x)$ có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 1$. Do $f(x)$ có ba nghiệm phân biệt $a < b < c$ nên ta phải có $-1 < b < 1$ và $f(-1)f(1) < 0$. Mà $f(-1) = 2 - abc$, $f(1) = -(2 + abc)$, nên $-(2 - abc)(2 + abc) < 0$, hay $-2 < abc < 2$. Lại có $f(-2) = -(2 + abc) = f(1)$ và $f(2) = 2 - abc = f(-1)$, suy ra $f(-2)f(-1) < 0$ và $f(1)f(2) < 0$. Điều này có nghĩa là $-2 < a < -1$ và $1 < c < 2$.

Tóm lại, ta có

$$-2 < abc < 2 \quad \text{và} \quad -2 < a < -1 < b < 1 < c < 2.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Bình luận. Bài này bản chất chính là bài chọn đội tuyển Anh năm 1995: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời các tính chất $a < b < c$, $a + b + c = 6$ và $ab + bc + ca = 9$. Chứng minh rằng

$$0 < a < 1 < b < 3 < c < 4.$$

Nhưng đã bị che giấu đi, người ra đề đã sử dụng phép đặt đổi biến $(a, b, c) \mapsto (a+2, b+2, c+2)$ rồi biến đổi để ra được bài "Ninh Bình" trên.

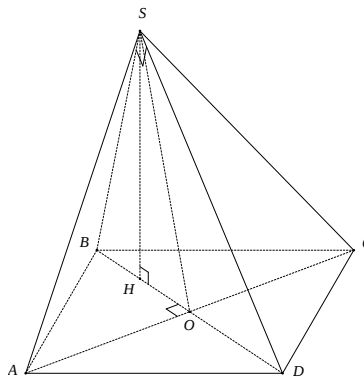
Bài 3.5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $SA = SB = SC = a$, trong đó a là một số thực dương cho trước.

(1) Chứng minh rằng $SD < \sqrt{3}a$.

(2) Xác định độ dài cạnh SD theo a để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

(Đồng Nai)

Lời giải.



(1) Xét chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau nên SH là đường cao của chóp với H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Do $AB = BC$ nên H thuộc đường trung trực BD của AC , suy ra $AC \perp (SBD)$.

Tương tự với chóp $A.BSD$ có các cạnh bên bằng nhau mà $AO \perp (SBD)$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD . Vì $OB = OD$ nên tam giác SBD vuông tại S . Từ đó ta tính được

$$BD^2 = SB^2 + SD^2 = a^2 + SD^2,$$

suy ra

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = AB^2 - \frac{BD^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + SD^2}{4} = \frac{3a^2 - SD^2}{4}.$$

Do $AO^2 > 0$ nên ta phải có $SD^2 < 3a^2$, hay $SD < \sqrt{3}a$.

(2) Theo trên, ta có $AC = 2AO = \sqrt{3a^2 - SD^2}$. Do tam giác SBD vuông tại S có SH là đường cao nên

$$SH = \frac{2S_{SBD}}{BD} = \frac{SB \cdot SD}{BD} = \frac{a \cdot SD}{BD}.$$

Do vậy

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6}SH \cdot BD \cdot AC = \frac{1}{6}a \cdot SD \cdot \sqrt{3a^2 - SD^2}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$SD \cdot \sqrt{3a^2 - SD^2} \leq \frac{SD^2 + (3a^2 - SD^2)}{2} = \frac{3a^2}{2},$$

suy ra

$$V_{S.ABCD} \leq \frac{a^3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $SD^2 = 3a^2 - SD^2$, hay $SD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Vậy thể tích hình chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $SD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Bài 3.6. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{MB \cdot MC}{bc} + \frac{MC \cdot MA}{ca} + \frac{MA \cdot MB}{ab} \geq 1.$$

(Bình Định)

Bài 3.7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi R và r lần lượt là bán kính hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp của nó. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{R}{r}$.

(Bình Định)

Bài 3.8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(a+2b)^2 \leq 3(a^2+2b^2).$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2} + \frac{b^2}{b^2+2c^2} + \frac{c^2}{c^2+2a^2} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz một lần nữa, ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2} + \frac{b^2}{b^2+2c^2} + \frac{c^2}{c^2+2a^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(a^2+2b^2)+b^2(b^2+2c^2)+c^2(c^2+2a^2)} = 1.$$

Bài toán được chứng minh xong. Để thấy đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b = c$.

Cách 2. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức chặt hơn là

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 + \frac{18abc}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)} \geq 1.$$

Đặt $x = \frac{a}{a+2b}$, $y = \frac{b}{b+2c}$ và $z = \frac{c}{c+2a}$. Khi đó ta có

$$\frac{2b}{a} = \frac{1}{x} - 1, \quad \frac{2c}{b} = \frac{1}{y} - 1, \quad \frac{2a}{c} = \frac{1}{z} - 1,$$

suy ra

$$8 = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{y} - 1\right) \left(\frac{1}{z} - 1\right),$$

hay

$$9xyz = 1 - (x+y+z) + xy + yz + zx.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 18xyz \geq 1.$$

Thay $18xyz = 2 - 2(x + y + z) + 2(xy + yz + zx)$ vào, ta viết được bất đẳng thức này thành

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) + 1 \geq 0,$$

hay

$$(x + y + z - 1)^2 \geq 0.$$

Bình luận. Bất đẳng thức đã cho vẫn đúng khi thay giả thiết $a, b, c > 0$ bởi giả thiết $(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \neq 0$.

Bài 3.9. Với ba số dương x, y, z , ta kí hiệu M là số lớn nhất trong ba số

$$\ln z + \ln \left(\frac{x}{yz} + 1 \right), \quad \ln \frac{1}{z} + \ln(xyz + 1), \quad \ln y + \ln \left(\frac{1}{xyz} + 1 \right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của M khi x, y, z thay đổi.

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. Từ định nghĩa của số M , ta có

$$M \geq \ln z + \ln \left(\frac{x}{yz} + 1 \right), \quad M \geq \ln y + \ln \left(\frac{1}{xyz} + 1 \right),$$

suy ra

$$2M \geq \ln z + \ln \left(\frac{x}{yz} + 1 \right) + \ln y + \ln \left(\frac{1}{xyz} + 1 \right) = \ln \frac{(x + yz)(xyz + 1)}{xyz}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\frac{(x + yz)(xyz + 1)}{xyz} \geq 4,$$

suy ra $2M \geq \ln 4$, hay $M \geq \ln 2$. Để thấy đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ nên ta có kết luận $\min M = \ln 2$.

Bài 3.10. Cho x, y, z là ba số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4.$$

(Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Lời giải. Ta biết rằng trong ba số $x - 1$, $y - 1$ và $z - 1$ luôn có hai số cùng dấu với nhau. Giả sử hai số đó là $x - 1$ và $y - 1$, thế thì ta có $z(x - 1)(y - 1) \geq 0$, suy ra

$$xyz \geq z(x + y - 1) = z(2 - z).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} = \frac{(3 - z)^2}{2}.$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh được bất đẳng thức sau là đủ

$$\frac{(3 - z)^2}{2} + z^2 + z(2 - z) \geq 4.$$

Biến đổi tương đương ta được $\frac{1}{2}(z - 1)^2 \geq 0$, hiển nhiên đúng. Ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 3.11. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

(Kon Tum)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a}{a^2 + 2} \leq \frac{a}{2a + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2a + 1)}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2a + 1)} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2b + 1)} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2c + 1)} \right] \leq 1,$$

hay

$$\frac{1}{2a + 1} + \frac{1}{2b + 1} + \frac{1}{2c + 1} \geq 1. \quad (*)$$

Đến đây có nhiều cách đánh giá.

Cách 1. Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, ta có $ab \geq 1$. Sau đó sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} \geq \frac{2}{\sqrt{xy} + 1} \quad \forall x, y > 0, xy \geq 1$$

cho $x = 2a, y = 2b$, ta có

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} \geq \frac{2}{2\sqrt{ab}+1}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{2}{2\sqrt{ab}+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1.$$

Công việc này khá đơn, ta chỉ cần đặt ẩn $t = \sqrt{ab}$ rồi thay $c = \frac{1}{t^2}$ vào rồi biến đổi tương đương là được.

Cách 2. Đặt $a = x^3, b = y^3$ và $c = z^3$, ta có

$$\frac{1}{2a+1} = \frac{1}{2x^3+1} = \frac{xyz}{2x^3+xyz} = \frac{yz}{yz+2x^2},$$

suy ra bất đẳng thức (*) tương đương với

$$\frac{yz}{yz+2x^2} + \frac{zx}{zx+2y^2} + \frac{xy}{xy+2z^2} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\frac{yz}{yz+2x^2} + \frac{zx}{zx+2y^2} + \frac{xy}{xy+2z^2} \geq \frac{(yz+zx+xy)^2}{yz(yz+2x^2) + zx(zx+2y^2) + xy(xy+2z^2)} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 3. Quy đồng và rút gọn, ta có bất đẳng thức (*) tương đương

$$(2a+1)(2b+1) + (2b+1)(2c+1) + (2c+1)(2a+1) \geq (2a+1)(2b+1)(2c+1),$$

hay

$$a + b + c \geq 3.$$

Bất đẳng thức này đúng theo AM-GM.

Bình luận. Một bài toán thú vị được đặt ra từ bài toán này, đó là: Tìm tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{a^2+k} + \frac{b}{b^2+k} + \frac{c}{c^2+k} \leq \frac{3}{1+k}$$

đúng với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$.

Đây là một bài toán khó. Hiện đã chứng minh được bất đẳng thức này đúng cho $\frac{1}{5} \leq k \leq 5$ (với lời giải sơ cấp), còn giá trị tốt nhất của k là một số rất lẻ.

Nói riêng về bất đẳng thức (*), nó chính là một trường hợp riêng của bài toán chọn đội tuyển Romania năm 1999: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Khi đó

$$\frac{1}{a_1 + n - 1} + \frac{1}{a_2 + n - 1} + \cdots + \frac{1}{a_n + n - 1} \leq 1.$$

Trong bất đẳng thức này, cho $n = 3$ và thay lần lượt a_1, a_2, a_3 bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, ta sẽ thu được (*).

Bài 3.12. (1) Xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^{3/2} - \frac{3x}{2}$ trên $(0, +\infty)$.

(2) Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

(Cần Thơ)

Lời giải. (1) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^{3/2} + x^{3/2} + 1 \geq 3x.$$

Từ đó suy ra

$$y = x^{3/2} - \frac{3x}{2} \geq -\frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

(2) Sử dụng kết quả câu (1), ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{2}, \quad \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{c} - \frac{1}{2}, \quad \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{a} - \frac{1}{2}.$$

Cộng lại ta được

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - \frac{3}{2}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - \frac{3}{2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3,$$

hiển nhiên đúng theo AM-GM. Ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bình luận. Đây là một dạng bài cũ và không có ý tưởng gì mới mẻ. Hơn nữa, việc cho thêm câu (1) lại càng làm cho nó trở nên tầm thường hơn, vì kết quả câu (1) đã gợi mở ngay đường đi nước bước của câu (2).

Bài 3.13. Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 + c^2$.

(Phổ thông Năng khiếu)

Lời giải. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Dễ thấy $x_0 \neq 0$, từ đó suy ra

$$b = -\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + ax_0 + \frac{c}{x_0}\right).$$

Do đó

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + c^2 + \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + ax_0 + \frac{c}{x_0}\right)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} \left[a^2 + c^2 + \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + ax_0 + \frac{c}{x_0}\right)^2\right] & \left[(-x_0)^2 + \left(-\frac{1}{x_0}\right)^2 + 1\right] \geq \\ & \geq \left(-ax_0 - \frac{c}{x_0} + x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + ax_0 + \frac{c}{x_0}\right)^2 \\ & = \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right)^2, \end{aligned}$$

suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right)^2}{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1}.$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh được

$$\frac{\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right)^2}{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1} \geq \frac{4}{3},$$

với dấu bằng đạt được tại $x_0 = \pm 1$, nên

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{a}{-x_0} = \frac{c}{-\frac{1}{x_0}} = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + ax_0 + \frac{c}{x_0} \\ x_0 \pm 1 \\ b = -\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + ax_0 + \frac{c}{x_0}\right) \end{cases}.$$

Giải hệ này ta tìm được $a = b = c = -\frac{2}{3}$ (ứng với $x_0 = 1$) và $a = c = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$ (ứng với $x_0 = -1$). Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 + c^2$ là $\frac{4}{3}$.

Bình luận. Có thể thấy rằng bài toán này được lấy ý tưởng từ bài toán Tournament of the Towns 1993: Nếu a, b là các số thực sao cho phương trình $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực thì $a^2 + b^2 \geq 8$.

Phần II

Một số bài giảng toán

Chương 4

Giải phương trình hàm bằng cách lập phương trình

“Cuộc sống là chuỗi những phương trình mà ta kiếm tìm lời giải.”

Giải bài toán bằng cách lập phương trình và hệ phương trình là một phương pháp thông dụng trong các bài toán đại số. Ý tưởng là để tìm một ẩn số nào đó, ta đưa vào các ẩn số phụ, sử dụng các dữ kiện đã cho tạo ra mối liên hệ giữa các ẩn số đó (các phương trình), giải hệ phương trình, tìm ra giá trị của ẩn số cần tìm. Phương pháp tương tự cũng có thể áp dụng cho các bài toán hình học tính toán (chẳng hạn bài toán giải tam giác, tứ giác), các bài toán đếm (phương pháp dãy số phụ).

Trong bài này, chúng ta đề cập tới phương pháp lập phương trình, hệ phương trình để giải các bài toán phương trình hàm. Ý tưởng chung cũng là để tìm một giá trị $f(x)$ hoặc $f(a)$ nào đó, ta sử dụng phương trình hàm để tìm ra mối liên kết giữa các đại lượng, nói cách khác, tạo ra các phương trình số. Giải các phương trình số này, ta có thể tìm ra $f(x)$ hoặc $f(a)$ với a là một giá trị nào đó.

Với những phương trình hàm có hai (hoặc nhiều hơn) phương trình điều kiện, ta có thể tìm cách kết hợp các phương trình đó để tìm ra $f(x)$. Phương pháp cơ bản vẫn là tạo ra các mối liên kết, hay các phương trình bằng cách tính một giá trị bằng hai cách khác nhau.

Ví dụ 4.1. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

- (i) $f(-x) = -f(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$;
- (ii) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$;

$$(iii) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2} \text{ với mọi } x \text{ khác } 0.$$

Lời giải. Tất cả các điều kiện đều trên một biến x . Trong trường hợp này, ta có thể dùng một chút khái niệm về đồ thị để hiểu con đường đi đến lời giải. Ta xem các số thực như các đỉnh của một đồ thị. Đỉnh x sẽ được nối với các đỉnh $x+1$, $-x$, $\frac{1}{x}$. Các điều kiện đề bài sẽ cho chúng ta các mối liên hệ giữa giá trị của hàm số tại các đỉnh được nối bởi một cạnh. Nếu chúng ta tìm được một chu trình thì một cách tự nhiên, chúng ta sẽ có một phương trình (để tránh hàm số có hai giá trị khác nhau).

Ta thử tìm một chu trình như vậy

$$x \rightarrow x+1 \rightarrow \frac{1}{x+1} \rightarrow -\frac{1}{x+1} \rightarrow 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \rightarrow \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow x.$$

Đặt $y = f(x)$ thì từ chu trình ở trên, ta lần lượt có

$$f(x+1) = y+1, \quad f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{y+1}{(x+1)^2}, \quad f\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{y+1}{(x+1)^2},$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 - \frac{y+1}{(x+1)^2}, \quad f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1 - \frac{y+1}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{x^2 + 2x - y}{x^2},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-y}{x^2}, \quad f(x) = 2x-y.$$

Từ đó suy ra $2x-y = y$, tức là $y = x$. Vậy $f(x) = x$.

Trong lý luận trên, ta cần đến điều kiện x khác 0 và -1 . Tuy nhiên từ hai điều kiện $f(-x) = -f(x)$, $f(x+1) = f(x) + 1$ ta dễ dàng suy ra $f(0) = 0$ và $f(-1) = 1$. Vậy $f(x) = x$ là tất cả các nghiệm của bài toán.

Ví dụ 4.2. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(x^2 - y) = xf(x) - f(y) \quad \text{với mọi } x, y \text{ thuộc } \mathbb{R}.$$

Lời giải. Thay $x = y = 0$ vào phương trình hàm, ta được $f(0) = -f(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Thay $y = 0$ vào phương trình hàm, ta được

$$f(x^2) = xf(x). \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$f(x^2 - y) = f(x^2) - f(y).$$

Thay $x = 0$, ta được $f(-y) = -f(y)$. Thay y bằng $-y$, ta được

$$f(x^2 + y) = f(x^2) - f(-y) = f(x^2) + f(y)$$

với mọi x, y . Từ đó, kết hợp với tính chất hàm lẻ, ta suy ra $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y . Bây giờ ta có $f((x + 1)^2)$ một mặt có thể tính theo công thức (1), tức là bằng $(x + 1)f(x + 1) = (x + 1)[f(x) + f(1)]$. Mặt khác, ta có thể khai triển

$$f((x + 1)^2) = f(x^2 + 2x + 1) = f(x^2) + 2f(x) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1).$$

Từ đó ta được phương trình $(x + 1)[f(x) + f(1)] = xf(x) + 2f(x) + f(1)$, suy ra $f(x) = f(1)x$. Đặt $f(1) = a$, ta được $f(x) = ax$. Thử lại vào phương trình ta thấy nghiệm đúng.

Vậy $f(x) = ax$ với $a \in \mathbb{R}$ là tất cả các nghiệm của bài toán.

Phương pháp tạo ra các mối liên kết cũng có thể áp dụng hiệu quả trong các bài toán phương trình hàm trên $\mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$. Ta xem xét một số ví dụ.

Ví dụ 4.3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ thỏa mãn các điều kiện

$$(i) \quad f(x + 1) = f(x) + 1 \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{Q}^+;$$

$$(ii) \quad f(x^2) = f^2(x) \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{Q}^+.$$

Lời giải. Từ điều kiện (ii), ta suy ra được $f(1) = 1$. Sử dụng kết quả này kết hợp với điều kiện (i) ta dễ dàng suy ra $f(n) = n$ với mọi n thuộc $\mathbb{Z}^+$ và $f(r + n) = f(r) + n$ với mọi r thuộc $\mathbb{Q}^+$ và n thuộc $\mathbb{Z}^+$. Bây giờ ta tính $f(r)$ với $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Ý tưởng ta sẽ tính $f((r + q)^2)$ theo $f(r)$ bằng hai cách. Trước hết

$$f((r + q)^2) = f^2(r + q) = (f(r) + q)^2. \quad (1)$$

Mặt khác

$$f((r + q)^2) = f(r^2 + 2p + q^2) = f(r^2) + 2p + q^2 = f^2(r) + 2p + q^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $f^2(r) + 2qf(r) + q^2 = f^2(r) + 2p + q^2$, do đó $f(r) = \frac{p}{q} = r$.

Vậy $f(r) = r$ với mọi r thuộc $\mathbb{Q}^+$.

Ví dụ 4.4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho

$$f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n) \quad \text{với mọi } m, n \text{ thuộc } \mathbb{N}.$$

Lời giải. Cho $m = n = 0$, ta được $f(0) = 2f^2(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Cho $m = 1, n = 0$, ta được $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$. Ta xét trường hợp $f(1) = 1$, trường hợp $f(1) = 0$ xét tương tự. Với $f(1) = 1$, ta lần lượt tính được

$$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2,$$

$$f(4) = f(2^2 + 0^2) = f^2(2) + f^2(0) = 4,$$

$$f(5) = f(2^2 + 1^2) = f^2(2) + f^2(1) = 5.$$

Nhưng làm sao để tính, chẳng hạn $f(3)$? Rõ ràng $f(3)$ không thể tính được theo sơ đồ trên được, vì 3 không biểu diễn được dưới dạng tổng của hai bình phương.

Ta nhớ lại một bài toán lớp 3. Có một cái cân đĩa với 2 quả cân 1kg, 5kg và một bao đường nặng 10kg. Hãy cân ra 7kg đường bằng một lần cân. Rõ ràng, với cách cân thông thường thì ta chỉ cân được 1kg đường, 4kg đường ($5 - 1$), 5kg đường và 6kg đường. Tuy nhiên, nếu tinh ý một chút, ta có thể có phương án cân được 7kg đường như sau: Đặt vào đĩa bên trái quả cân 1kg và 10kg đường, đĩa bên phải là quả cân 5kg, sau đó chuyển dần đường từ bên trái sang bên phải sao cho cân cân bằng, khi đó số đường còn lại ở đĩa bên phải là 7kg!

Bây giờ ta cũng thử thuật tương với bài toán này. Ta không tính được trực tiếp $f(3)$ nhưng ta lại có $f^2(5) = f(25) = f(3^2 + 4^2) = f^2(3) + f^2(4)$. Từ đó ta được $f(3) = 3$.

Tương tự như vậy ta có thể tính được $f(6)$ nhờ vào đẳng thức $6^2 + 8^2 = 10^2$, trong đó $f(8) = f(2^2 + 2^2) = 2f^2(2) = 8$, $f(10) = f(3^2 + 1^2) = f^2(3) + f^2(1) = 10$.

Tiếp tục, để tính $f(7)$, ta để ý $7^2 + 1^2 = 50 = 5^2 + 5^2$, từ đó $f(7) = 7$. Cũng như thế, do $11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2$ nên ta suy ra $f(11) = 11$.

Cách làm này có thể tổng quát hoá như thế nào? Ý tưởng là nếu $m^2 + n^2 = p^2 + q^2$ (1) thì $f^2(m) + f^2(n) = f^2(p) + f^2(q)$. Do đó nếu ta đã tính được $f(n)$, $f(p)$, $f(q)$ thì $f(m)$ cũng sẽ tính được.

Làm thế nào để có được những đẳng thức dạng (1) ở dạng tổng quát, cho phép ta chứng minh $f(n) = n$ với mọi n bằng quy nạp? Chú ý rằng (1) có thể viết lại thành $(m - p)(m + p) = (q - n)(q + n) = N$. Do đó nếu chọn những số N có hai cách phân tích thành tích của những số có cùng tính chẵn lẻ, ta sẽ tìm được nghiệm cho (1). Chọn $N = 8k = 2 \cdot 4k = 4 \cdot 2k$ và $N = 16k = 4 \cdot 4k = 8 \cdot 2k$, ta được hệ

$$m - p = 2, \quad m + p = 4k, \quad q - n = 4, \quad q + n = 2k,$$

và

$$m - p = 4, \quad m + p = 4k, \quad q - n = 8, \quad q + n = 2k.$$

Từ đó được các hằng đẳng thức tương ứng

$$(2k+1)^2 + (k-2)^2 = (2k-1)^2 + (k+2)^2,$$

và

$$(2k+2)^2 + (k-4)^2 = (2k-2)^2 + (k+4)^2.$$

Từ hai đẳng thức này, với chú ý là ta đã chứng minh được $f(n) = n$ với $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được rằng $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Trường hợp $f(1) = 0$, cũng bằng cách lý luận nêu trên ta suy ra $f(n) = 0$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}$.

Bài tập

1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thoả mãn các điều kiện

(i) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi x thuộc $\mathbb{Q}$;

(ii) $f(x^3) = f^3(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{Q}$.

2. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện

(i) $f(1) = 1$;

(ii) $f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$;

(iii) $(x+y)f(x+y) = xyf(x)f(y)$ với mọi x, y mà $xy(x+y) \neq 0$.

3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x^5 - y^5) = x^2 f(x^3) - y^2 f(y^3) \quad \text{với mọi } x, y \text{ thuộc } \mathbb{R}.$$

4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện

$$f(a^3 + b^3 + c^3) = f^3(a) + f^3(b) + f^3(c) \quad \text{với mọi } a, b, c \text{ thuộc } \mathbb{Z}.$$

5. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

(i) $f(x^2) = f^2(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$;

(ii) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $f(x) = x$.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục 2001.
- [2] Nguyễn Trọng Tuấn, *Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olympic*, Nhà xuất bản Giáo dục 2005.
- [3] Phan Đức Chính, Lê Đình Thịnh, Phạm Tấn Dương, *Tuyển tập các bài toán sơ cấp*, Tập 1, Đại số, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp 1977.
- [4] Phan Huy Khải, *Các bài toán về hàm số*, Nhà xuất bản Giáo dục 2007.
- [5] B. J. Venkatachala, *Functional Equations – A Problem Solving Approach*, PRISM 2002.
- [6] Pierre Bornsztein, Mobinool Omarjee, *Cours – Equations fonctionnelles*, Electronic Edition 2003.
- [7] Titu Andreescu, Iurie Boreico, *Functional Equations*, Electronic Edition 2007.