

Phương trình Diophant

Trần Nam Dũng, ĐHKHTN Tp HCM

Phiên bản 2.0

Viết xong tháng 7/2004, bổ sung và chỉnh lý, tháng 9/2009

1. Mở đầu

Phương trình nghiệm nguyên hay còn được gọi là phương trình Diophant là một trong những dạng toán lâu đời nhất của Toán học. Từ Euclid, Diophantus, qua Fibonacci, rồi đến Fermat, Euler, Lebesgue ... và thời hiện đại là Gelfond, Matiassevich, Shenzen, Serpinsky ... phương trình Diophant đã trải qua một lịch sử phát triển lâu dài.

Thông qua việc giải các phương trình Diophant, các nhà toán học đã tìm ra được những tính chất sâu sắc của số nguyên, số hữu tỷ, số đại số. Giải phương trình Diophant đã đưa đến sự ra đời của Liên phân số, Lý thuyết đường cong elliptic, Lý thuyết xấp xỉ Diophant, Thặng dư bình phương, Số học modular ...

Trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế, phương trình Diophant vẫn thường xuyên xuất hiện dưới các hình thức khác nhau và luôn được đánh giá là khó do tính không mẫu mực của nó.

Bài giảng này có mục đích đưa ra một số phương pháp cơ bản để tấn công các bài toán về phương trình Diophant. Tuy nhiên, với khả năng còn hạn hẹp của mình, chúng tôi hoàn toàn không có tham vọng bao quát hết các vấn đề về phương trình Diophant. Chúng tôi chủ yếu chỉ giới hạn trong các phương trình đa thức, bỏ qua các phương trình Diophant bậc nhất và không đề cập đến các phương trình có chứa hàm mũ.

Đây là một tập tài liệu mở, một số chứng minh được bỏ qua, một số lời giải chỉ trình bày sơ lược hoặc bỏ qua. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý thầy cô, quý anh chị và bạn bè đồng nghiệp, cũng như của các em sinh viên, học sinh để tập tài liệu được hoàn thiện hơn.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn GS Nguyễn Văn Mậu và Trường Đại học Khoa học Tự nhiên ĐHQG HN đã tổ chức khoá bồi dưỡng này và cho phép chúng tôi được báo cáo trước các thầy cô, anh chị và các bạn.

Phiên bản 2.0 này của bài viết đã được sửa chữa, chỉnh lý và bổ sung thêm một số vấn đề sau:

- 1) Có lời giải và phân tích chi tiết cho một số ví dụ và bài tập
- 2) Bổ sung một số kết quả quan trọng liên quan đến phương trình Pell
- 3) Bổ sung thêm một số bài tập mới
- 4) Bổ sung thêm phần đọc thêm về đường cong hữu tỷ và đường cong elliptic.

2. Phương pháp chọn mô-đun

Một số chính phương không thể tận cùng bằng 2, 3, 7, 8. Một số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1. Một số chính phương chia 8 dư 0, 1 hoặc 4. Những tính chất đơn giản đó nhiều khi lại là chìa khóa để giải nhiều phương trình Diophant. Và đó chính là ý tưởng chính của phương pháp chọn mô-đun.

Ví dụ 2.1: (Việt Nam 2003, bảng B) Hỏi có tồn tại hay không các số nguyên x, y, u, v, t thỏa mãn điều kiện sau

$$x^2 + y^2 = (x+1)^2 + u^2 = (x+2)^2 + v^2 = (x+3)^2 + t^2.$$

Lời giải: Không.

Cách 1: Thật vậy, giả sử hệ trên tồn tại nghiệm. Đặt N là giá trị chung của cả 4 biểu thức.

Ta có $x^2 \bmod 8 \in \{0, 1, 4\}$, suy ra $x^2 + y^2 \in \{0, 1, 2, 4, 5\}$. Ngoài ra, nếu x chạy qua một hệ thặng dư đầy đủ mod 4 thì $x^2 \bmod 8$ sẽ là $(0, 1, 0, 4)$ hay một hoán vị vòng quanh của bộ trên.

Như thế $N \bmod 8 \in \{0, 1, 4\} \cap \{1, 2, 5\} \cap \{0, 1, 4\} \cap \{0, 4, 5\} = \emptyset$. Mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, u, v, t thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Từ hai phương trình đầu ta suy ra $y^2 + v^2 - 2u^2 = 2(x+1)^2 - x^2 - (x+2)^2 = -2$. Như thế, $y^2 + v^2 = 2(u^2 - 1)$, suy ra y, v cùng tính chẵn lẻ. Nếu y, v cùng lẻ thì về trái chia 8 dư 2, suy ra u chẵn, nhưng khi đó, về trái chia 8 dư -2, mâu thuẫn.

Ví dụ 2.2. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - 3y^2 = -1$ không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải: $x^2 + 1$ không thể chia hết cho 3!

Ví dụ 2.3. (Đề đề nghị IMO 1981) Cho phương trình nghiệm nguyên $z^2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + n$. Hỏi phương trình có nghiệm không nếu

- (a) $n = 1981$ (b) $n = 1985$ (c) $n = 1984$?

Lời giải:

- (a) Ta có $z^2 \equiv (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 5 \pmod{8}$. Vì $z^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$, $x^2 - 1 \equiv 0, 3, 7 \pmod{8}$, $(x^2 - 1)(y^2 - 1) \equiv 0, 1, 5 \pmod{8}$ và $(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 5 \equiv 2, 5, 6 \pmod{8}$ nên ta có

$$z^2 \not\equiv (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 5 \pmod{8}$$

Mâu thuẫn.

- (b) Tương tự, xét mod 9.

- (c) $n = 1984$. Rút gọn phương trình, ta được $x^2 + y^2 + z^2 - x^2 y^2 = 1985$ (1). Ý tưởng của ta là đi tìm biểu diễn $x^2 + y^2 = 1985$. Khi đó $z = xy$ cho ta nghiệm.

Bằng cách xét chữ số cuối cùng, ta nhanh chóng đi đến nghiệm $7^2 + 44^2$ và $31^2 + 32^2$ bằng phương pháp và sai. Từ đó được các nghiệm $(x, y, z) = (7, 44, 7.44)$ và $(31, 32, 31.32)$.

Ghi chú: phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương, hãy thử chứng minh.

Bài tập

2.1. (Thụy Điền 2003) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y sao cho $x^2 - 3xy = 2002$.

2.2. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

1) $x^2 - 2y^2 = 3$

2) $2x^2 - 5y^2 = 7$

3) $5x^2 + 6x + 11 = y^2 + 4y$

2.3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^{10} + y^{10} - z^{10} = 1999$.

2.4. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ không có nghiệm nguyên x, y, z .

2.5. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương $1 < k < 10$ sao cho hệ phương trình $x^2 + ky^2 = z^2, kx^2 + y^2 = t^2$ có nghiệm nguyên dương.

2.6. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ không có nghiệm hữu tỷ.

3. Giới hạn miền nghiệm. Thử và sai

Cho x là số nguyên. Nếu $|x| \leq N$ với số nguyên dương N cho trước thì x chỉ có thể nhận hữu hạn giá trị. Cụ thể $x \in \{-N, -N+1, \dots, 0, 1, \dots, N\}$. Điều đơn giản là chìa khóa để giải nhiều phương trình Diophant bằng cách giới hạn miền nghiệm, sau đó dùng phép thử.

Ví dụ 1: (Bài toán Arnold) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương sao cho tích của hai số bất kỳ cộng 1 chia hết cho số còn lại.

Lời giải: Gọi a, b, c là 3 số nguyên dương cần tìm. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$. Theo đề bài, ta có

$$ab+1 \vdots c, bc+1 \vdots a, ca+1 \vdots b$$

Suy ra $\frac{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}{abc}$ là số nguyên. Điều này tương đương với

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Như vậy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geq 1$. Sử dụng điều kiện $a \leq b \leq c$ ta suy ra

$$\frac{3}{a} + \frac{1}{a^3} \geq 1$$

Từ đó dễ dàng suy ra $a \leq 3$.

Ta xét các trường hợp

$+ a = 1$. Khi đó (1) tương đương với $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} \in \mathbb{Z}$. Lý luận tương tự ta suy ra $b \leq 2$. Nếu $b = 1$, ta được ngay $\frac{2}{c} \in \mathbb{Z}$ suy ra $c = 1$, hoặc $c = 2$. Ta được bộ nghiệm $(1; 1; 1)$, $(1; 1; 2)$. Các nghiệm này thoả mãn điều kiện (chú ý (1) chỉ là điều kiện cần!). Nếu $b = 2$, ta được $\frac{1}{2} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2c} = k \in \mathbb{Z}$. Do $c \geq 2$ nên $\frac{1}{2} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2c} \leq \frac{5}{4}$ suy ra $k = 1$. Từ đó tính được $c = 3$. Thử lại ta thấy nghiệm $(1; 2; 3)$ thoả mãn điều kiện.

$+ a = 2$. Khi đó (1) tương đương với $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2bc} = k \in \mathbb{Z}$. Do $c \geq b \geq a = 2$ nên $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2bc} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$ nên suy ra $k = 1$. Ta được phương trình $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(b+c)+1=bc \Leftrightarrow (b-2)(c-2)=5=1.5$

Suy ra $b = 3, c = 7$. Thử lại bộ $(2; 3; 7)$ thoả mãn điều kiện.

$+ a = 3$. Khi đó (1) tương đương với $\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{3bc} = k \in \mathbb{Z}$. Lý luận tương tự như ở trên, ta được $k = 1$. Tức là

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{3bc} = \frac{2}{3}$$

Nếu $b > 3$ thì ta có $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{3bc} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{48} < \frac{2}{3}$. Như vậy chỉ còn khả năng $b = 3$.

Nhưng khi đó tính ra được $c = \frac{10}{3}$ không nguyên, loại.

Vậy bài toán có các nghiệm là $(1; 1; 1)$, $(1; 1; 2)$, $(1; 2; 3)$, $(2; 3; 7)$ (và các hoán vị).

Ví dụ 2: (Olympic 30/4 năm 1999) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $1/m, 1/n, 1/p$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tìm m, n, p sao cho 3 đường thẳng đó tạo với trục hoành 3 góc có tổng số đo là 45° .

Lời giải: Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi ba đường thẳng đó với trục hoành. Theo đề bài ta có $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m}, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{n}, \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{p}$. Ta cần tìm m, n, p nguyên dương sao cho $\alpha +$

$\beta + \gamma = 45^\circ$. Điều này tương đương với

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mn} + \frac{1}{np} + \frac{1}{pm} - \frac{1}{mnp} = 1 \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $m \leq n \leq p$. Khi đó

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mn} + \frac{1}{np} + \frac{1}{pm} - \frac{1}{mnp} < \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}$$

Từ phương trình (1) ta suy ra

$$\frac{3}{m} + \frac{3}{m^2} > 1$$

Từ đó $n \leq 3$. Dễ thấy $n > 1$ nên ta chỉ có 2 trường hợp cần phải xét

$+ m = 2$. Thay vào (1) ta được

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{np} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2np} = 1$$

$$\Leftrightarrow np = 3(n + p) + 1 \Leftrightarrow (n - 3)(p - 3) = 10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$$

Suy ra $(n; p) = (4; 13)$ hoặc $(5; 8)$.

$+ m = 3$. Thay vào (1), ta được

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{np} + \frac{1}{3p} - \frac{1}{3np} = 1$$

$$\Leftrightarrow np = 2(n + p) + 1 \Leftrightarrow (n - 2)(p - 2) = 5 = 1 \cdot 5$$

Suy ra $(n; p) = (3; 7)$.

Kết hợp lại ta được các đáp số của bài toán là $(m; n; p) = (2; 4; 13), (2; 5; 8), (3; 3; 7)$ và các hoán vị.

Bài tập

3.1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 4$$

3.2. Giải phương trình trong tập hợp các số nguyên dương

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

3.3. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x, y) sao cho $x^2 + 1$ chia hết cho y , $y^3 + 1$ chia hết cho x^2 .

3.4. (Bulgaria 2001) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho a^2b , b^2c , c^2a .

3.5. (Ailen 2003) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $(m^2+n)(n^2+m) = (m+n)^3$.

3.6. (Moldova 2003) Chứng minh rằng phương trình $1/a + 1/b + 1/c + 1/abc = 12/(a+b+c)$ có vô số nghiệm nguyên dương.

3.7. (Rio Plate 2002) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho

$$\frac{a^2b+b}{ab^2+9}$$

là một số nguyên.

3.8. (Litva 2003) Tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình $3xy - x - 2y = 8$.

3.9. (IMO 2003) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho số

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

là số nguyên.

3.10. (Na Uy 2003) Tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y, z) sao cho $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2003$.

3.11. (THTT 3/209) Tìm tất cả nghiệm nguyên (x, y) của phương trình $(x+y^2)(y+x^2) = (x-y)^3$

4. Phương pháp xuống thang

Fermat đã dùng phương pháp này để chứng minh phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm nguyên dương. Và cũng từ đây, bằng vài dòng ngắn ngủi trên lề cuốn sách Diophantus, ông đã làm đau đầu các nhà toán học suốt 300 năm qua bằng định lý lớn nổi tiếng mang tên ông.

Cơ sở của phương pháp xuống thang là *tính sắp thứ tự tốt* của N (và N^k , tích Đề các của k phiên bản N): Một tập con khác rỗng bất kỳ của N đều có phần tử nhỏ nhất.

Để chứng minh một phương trình là vô nghiệm, ta giả sử ngược lại rằng tập R các nghiệm nguyên (tự nhiên, nguyên dương) của phương trình khác rỗng. Ta đưa ra một thứ tự tốt trên R và giả sử α_0 là nghiệm nhỏ nhất (theo thứ tự nêu trên). Nếu bằng cách nào đó ta xây dựng được nghiệm α_1 nhỏ hơn α_0 thì chúng ta sẽ đi

đến mâu thuẫn. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử là sai và như vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nghiệm nguyên duy nhất của phương trình $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ là $(0, 0, 0)$.

Lời giải: Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên khác $(0, 0, 0)$. Trong số các nghiệm đó, gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm nguyên có $|x_0| + |y_0| + |z_0| = d$ nhỏ nhất. Rõ ràng $d > 0$.

Từ đẳng thức $x_0^3 = 3(y_0^3 + 3z_0^3)$ suy ra x_0 chia hết cho 3. Đặt $x_0 = 3x_1$, ta được

$$27x_1^3 = 3(y_0^3 + 3z_0^3) \Rightarrow y_0^3 = 3(3x_1^3 - z_0^3)$$

Từ đây ta lại suy ra y_0 chia hết cho 3. Đặt $y_0 = 3y_1$, ta được

$$27y_1^3 = 3(3x_0^3 - z_0^3) \Rightarrow z_0^3 = 3(x_1^3 - 3y_1^3)$$

Từ đẳng thức cuối cùng này ta suy ra z_0 chia hết cho 3. Đặt $z_0 = 3z_1$ thay vào thì ta được

$$x_1^3 - 3y_1^3 - 9z_1^3 = 0$$

tức là x_1, y_1, z_1 cũng là một nghiệm của phương trình đề bài.

Nhưng $|x_1| + |y_1| + |z_1| = (|x_0| + |y_0| + |z_0|)/3 = d/3$. Vì $0 < d/3 < d$ nên điều này mâu thuẫn với cách chọn (x_0, y_0, z_0) .

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên khác $(0, 0, 0)$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải: Giả sử rằng phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương. Giả sử $(x, y) = d$, tức là $x = da, y = db$, trong đó $(a, b) = 1$. Khi đó $a^4 + b^4 = (z/d^2)^2$. Giả sử $z = d^2c$, trong đó $c \in \mathbb{Q}$, khi đó

$$a^4 + b^4 = c^2 \quad (1)$$

Vì $c \in \mathbb{Q}$, $c^2 \in \mathbb{N}$ nên theo Định lý 6.1, $c \in \mathbb{N}^+$. Trong tất cả các nghiệm của phương trình (1), chọn nghiệm có c nhỏ nhất. Ta có $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$ trong đó $(a, b) = 1$, suy ra $(a^2, b^2) = 1$, tức là (a^2, b^2, c) là bộ ba Pythagore nguyên thủy. Theo định lý 6.5, tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho $a^2 = m^2 - n^2$, $b^2 = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ trong đó m, n khác tính chẵn lẻ, $m > n$ và $(m, n) = 1$, nghĩa là $a^2 = m^2 - n^2$ lẻ. Giả sử m chẵn, n lẻ. Khi đó n^2, a^2 chia 4 dư 1, nghĩa là $m^2 = n^2 + a^2$ chia 4 dư 2 mâu thuẫn. Vậy m lẻ, n chẵn, Ngoài ra (a, n, m) lập thành bộ Pythagore nguyên thủy, do đó tồn tại $p, q \in \mathbb{N}^+$ sao cho $a = p^2 - q^2$, $n = 2pq$, $m = p^2 + q^2$, trong đó p, q khác tính chẵn lẻ, $p > q$ và $(p, q) = 1$, Ngoài ra $b^2 = 2mn$, nghĩa là $b^2 = 4pq(p^2 + q^2)$, suy ra $b = 2h$, $h \in \mathbb{N}^+$, khi đó

$$h^2 = pq(p^2 + q^2) \quad (2)$$

Giả sử rằng tồn tại số nguyên tố r chia hết $pq, p^2 + q^2$. Vì r chia hết pq nên không mất tổng quát, có thể giả sử r chia hết p , khi đó r chia hết $(p^2 + q^2) - p^2 = q^2$, suy ra r chia hết q , mâu thuẫn vì $(p, q) = 1$. Vậy $(pq, p^2 + q^2) = 1$, như thế, từ (2), theo định

lý 6.1, ta có $pq = s^2$, $p^2 + q^2 = t^2$ với $s, t \in \mathbb{N}^+$. Vì $pq = s^2$, $(p, q) = 1$ nên $p = u^2$, $q = v^2$ với $u, v \in \mathbb{N}^+$, nghĩa là $(u^2)^2 + (v^2)^2 = t^2$ hay $u^4 + v^4 = t^2$, trong đó $c = m^2 + n^2 > m = p^2 + q^2 = t^2 > t$, mâu thuẫn với cách chọn c .
Như vậy điều giả sử ban đầu là sai và ta có đpcm.

Bài tập

4.1. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ không có nghiệm nguyên khác $(0, 0, 0)$

4.2. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 - t^2 \\ xy = zt \end{cases}$$

không có nghiệm nguyên dương.

4.3. (Hungary 2001) Tìm tất cả các số nguyên x, y, z sao cho $5x^2 - 14y^2 = 11z^2$.

4.4. Chứng minh rằng hệ phương trình $x^2 + 2y^2 = z^2$, $2x^2 + y^2 = t^2$ không có nghiệm nguyên dương.

4.5. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

5. Xây dựng nghiệm

Có nhiều bài toán không yêu cầu tìm tất cả các nghiệm của phương trình, mà chỉ yêu cầu chứng minh phương trình có vô số nghiệm. Trong trường hợp như thế, ta chỉ cần xây dựng một họ nghiệm chứa tham số là đủ. Việc xây dựng như thế có thể được thực hiện bằng các giả định, giới hạn miền nghiệm. Các siêu phẳng là những miền giới hạn thông dụng.

Ví dụ 5.1. (Italy 1996) Chứng minh rằng phương trình $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ có vô số nghiệm nguyên (a, b, c) .

Lời giải: Chọn $c = b+1$ thì ta được phương trình $a^2 = 2b + 4$ (*). Bây giờ chỉ cần chọn $a = 2k$, $b = 2(k^2-1)$ là ta được nghiệm của (*) và như vậy phương trình ban đầu có họ nghiệm $a = 2k$, $b = 2(k^2-1)$, $c = 2k^2 - 1$.

Ví dụ 5.2. (Canada 1991) Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^3 = z^5$ có vô số nghiệm nguyên dương.

Lời giải: Chú ý rằng $2^m + 2^m = 2^{m+1}$. Đặt $x = 2^{m/2}$, $y = 2^{m/3}$, $z = 2^{(m+1)/5}$, khi đó $x^2 + y^3 = z^5$. Ta chỉ cần tìm m sao cho $m/2$, $m/3$ và $(m+1)/5$ nguyên là xong. Đây là một bài toán bậc nhất đơn giản và ta có thể tìm được $m = 6(5k+4)$.

Ví dụ 5.3. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 2$, phương trình $x^2 + y^2 = z^n$ luôn luôn có vô số nghiệm nguyên dương.

Lời giải. Xét số phức $\alpha = a + bi$. Giả sử $\alpha^n = x + yi$ thì ta có

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |\alpha^n| = |\alpha|^n = (\sqrt{a^2 + b^2})^n$$

Từ đó $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^n$.

Ví dụ 5.4. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ có vô số nghiệm nguyên.

Lời giải. Đặt $x = 1 - a$, $y = 1 + a$ thay vào phương trình, ta được

$$6a^2 + z^3 = 0$$

Từ đây, nếu chọn a sao cho $-6a^2$ là một lập phương đúng thì ta sẽ được $(1-a; 1+a, (1-a; 1+a; \sqrt[3]{-6a^2})$ là một nghiệm nguyên của phương trình. Rõ ràng có thể chọn $a = -6k^3$.

Vậy $(1-6k^3, 1+6k^3, -6k^2)$ với k nguyên là một họ nghiệm của phương trình $x^3 + y^3 + z^3 = 2$. Do đó, phương trình đã cho có vô số nghiệm nguyên.

Ví dụ 5.5. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^4 + z^4 = 2$ có vô số nghiệm hữu tỷ.

Lời giải. Ta tìm các nghiệm (x, y, z) trong mặt phẳng $z = x + y$. Khi đó

$$x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + y^2 + xy)^2$$

Từ đó, nếu ta chứng minh được phương trình $x^2 + xy + y^2 = 1$ có vô số nghiệm hữu tỷ thì bài toán được giải quyết. Về cách giải bài toán này, xem phương pháp cát tuyến trong phần 7.

Bài tập

5.1. Dựa vào hằng đẳng thức $[2(3x+2y+1)+1]^2 - 2(4x+3y+2)^2 = (2x+1)^2 - 2y^2$ chứng minh rằng phương trình $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ có vô số nghiệm nguyên dương.

5.2. Dựa vào hằng đẳng thức $[2(7y+12x+6)]^2 - 3[2(4y+7x+3)+1]^2 = (2y)^2 - 3(2x+1)^2$ chứng minh rằng phương trình $(x+1)^3 - x^3 = y^2$ có vô số nghiệm nguyên dương.

5.3. Chứng minh rằng tồn tại vô số các cặp số hữu tỷ dương (x, y) sao cho $x^3 + y^3 = 9$.

5.4. (Bulgaria 1999) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ có vô số nghiệm nguyên.

5.5. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 2$, luôn tồn tại n số nguyên dương có tổng bằng tích.

5.6. (IMO 82) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương sao cho phương trình $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ có nghiệm nguyên (x, y) , thì phương trình này có ít nhất 3 nghiệm như vậy. Chứng minh rằng phương trình đã cho không có nghiệm khi $n = 2891$.

5.7. Chứng minh rằng phương trình $(x^2+x+1)(y^2+y+1) = z^2 + z + 1$ có vô số nghiệm nguyên.

5.8. (THTT 4/187, dự tuyển IMO 92) Chứng minh rằng, với số nguyên dương m bất kỳ sẽ tồn tại vô số các cặp số nguyên (x, y) sao cho:

- 1) x và y nguyên tố cùng nhau
- 2) y chia hết $x^2 + m$;
- 3) x chia hết $y^2 + m$.

5.9. (Saint Peterburg 2003) Chứng rằng tồn tại các số nguyên dương $a > 1, b > 1, c > 1$ sao cho $a^2 - 1$ chia hết cho b , $b^2 - 1$ chia hết cho c và $c^2 - 1$ chia hết cho a và $a + b + c > 2003$.

5.10. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ có vô số nghiệm nguyên dương.

6. Phương pháp số học

Các tính chất của số nguyên liên quan đến số nguyên tố, ước số chung, bội số chung như Định lý cơ bản của số học, các định lý Fermat, Euler, Wilson ... đóng một vai trò quan trọng trong việc tìm kiếm lời giải của phương trình Diophant. Chúng tôi nhắc lại một số định lý (không chứng minh) và đưa ra một số ví dụ áp dụng.

Định lý 6.1. (Bổ đề) 1) Cho $n > 1$ là một số nguyên dương. Nếu a, b, c là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $a.b = c^n$ và $(a, b) = 1$ thì $a = (a')^n, b = (b')^n$ với các số nguyên a', b' nào đó.

2) Nếu a hữu tỷ, a^n nguyên với n nguyên dương nào đó thì a nguyên.

3) Nếu a nguyên $\sqrt[n]{a}$ hữu tỷ thì $\sqrt[n]{a}$ nguyên.

Định lý 6.2. (Định lý nhỏ Fermat) Nếu p là số nguyên tố và a là một số nguyên tùy ý thì $a^p - a$ chia hết cho p . Nếu $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Định lý 6.3. (Định lý Euler). Nếu m là số nguyên dương, $(a, m) = 1$ thì $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, trong đó φ là Phi-hàm Euler – số các số nguyên dương nhỏ hơn m nguyên tố cùng nhau với m .

Định lý 6.4. (Định lý Wilson). p là số nguyên tố khi và chỉ khi $(p-1)! + 1$ chia hết cho p .

Định lý 6.5. (Định lý Fermat-Euler) Nếu $p = 4k+1$ thì tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho $p = a^2 + b^2$.

Định lý 6.6. (Một tính chất quan trọng) Cho p là số nguyên tố dạng $4k+3$ và $(a, b) = 1$. Khi đó $a^2 + b^2$ không chia hết cho p .

Ví dụ 6.1: (Phương trình Pythagore) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ trong tập hợp các số nguyên dương.

Giải bài toán này ta có kết quả sau mà ta phát biểu như một định lý:

Định lý 6.7. Mọi nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ đều có thể viết dưới dạng $x = (m^2 - n^2)k$, $y = 2mnk$, $z = (m^2 + n^2)k$ hoặc $x = 2mnk$, $y = (m^2 - n^2)k$, $z = (m^2 + n^2)k$, trong đó các số nguyên m, n, k thỏa mãn các điều kiện sau:

- 1) $(m, n) = 1$, $(x, y) = k$
- 2) các số m, n khác tính chẵn lẻ
- 3) $m > n > 0$, $k > 0$.

Chứng minh.

Giả sử $(x, y) = k$, khi đó $x = ka$, $y = kb$ trong đó $(a, b) = 1$. Ta có $(ka)^2 + (kb)^2 = z^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (z/k)^2$. Đặt $z = kc$, $c \in \mathbb{Q}$, khi đó $a^2 + b^2 = c^2$. Do $c \in \mathbb{Q}$, $c^2 \in \mathbb{N}$ nên theo định lý 6.1, $c \in \mathbb{N}$. Vì $(a, b) = 1$ nên ít nhất 1 trong hai số a, b phải lẻ. Giả sử rằng b lẻ, khi đó a^2, b^2 khi chia 4 dư 1, như thế c^2 chia 4 dư 2, điều này không thể vì c^2 chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4. Vậy b chẵn và như thế $c^2 = a^2 + b^2$ lẻ. Ta có

$$b^2 = (c-a)(c+a) \Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c-a}{2} \cdot \frac{c+a}{2}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $(c-a)/2$, $(c+a)/2$ là các số nguyên nguyên tố cùng nhau. Như thế, theo định lý 6.1, tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho $(c-a)/2 = n^2$, $(c+a)/2 = m^2$, từ đó $c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$ và $b = 2mn$, trong đó $(m, n) = 1$.

Ví dụ 2: (Lebesgue) Giải phương trình $x^2 - y^3 = 7$ trong tập hợp các số tự nhiên.

Lời giải: Nếu y là số chẵn, tức là $y = 2k$ thì $x = 8k^3 + 7$ chia 8 dư 7 là điều không thể. Vậy y lẻ. Ta có

$$x^2 + 1 = y^3 + 8 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$$

Nếu y chia 4 dư 1 thì $y+2$ có dạng $4k+3$. Nếu y chia 4 dư 3 thì $y^2 - 2y + 4$ có dạng $4k+3$. Vì vậy, trong mọi trường hợp, vế trái đều có ước dạng $4k+3$ và do đó có ước nguyên tố dạng $4k+3$, điều này mâu thuẫn với định lý 6.6.

Ví dụ 3: (Euler) Chứng minh rằng phương trình $4xy - x - y = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn: Viết phương trình dưới dạng $(4x - 1)(4y - 1) = 4z^2 + 1$ và sử dụng định lý 6.6.

Ví dụ 4: a) Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $x/y + y/z + z/x$ nguyên. Chứng minh rằng xyz là lập phương của một số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x/y + y/z + z/x = 3$.

Hướng dẫn: Viết phương trình dưới dạng $x^2z + y^2x + z^2y = kxyz$. Gọi p là ước nguyên tố của (x, y) . Hãy chứng minh rằng xyz chia hết cho p^3 .

Bài tập

6.1. Giải phương trình trong tập hợp các số nguyên dương

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2003}$$

6.2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - 5y^2 = 13$.

6.4. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3 = 4y(y+1)$ không có nghiệm nguyên.

6.5*. Chứng minh rằng phương trình $x^7 + y^7 = 1998^z$ không có nghiệm nguyên dương.

6.6*. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố, n là số nguyên dương thì phương trình

$$x(x+1) = p^{2n}y(y+1)$$

không có nghiệm nguyên dương.

6.7*. Tìm tất cả nghiệm của phương trình

$$y^2 = x^3 + (x+4)^2$$

trong tập hợp các số nguyên.

6.8. Chứng minh rằng nếu c là số nguyên dương lẻ thì phương trình

$$x^2 - y^3 = (2c)^3 - 1$$

không có nghiệm nguyên dương.

6.9. (Euler) Chứng minh rằng phương trình

$$4xyz - x - y - z^2 = 0$$

không có nghiệm nguyên dương.

6.10. (Nga 1997) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố sao cho $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

6.11*. (Legendre) Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + by^2 = cz^2$ trong đó a, b, c là các tham số không có ước chính phương, đôi một nguyên tố cùng nhau có

nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi hệ phương trình đồng dư sau có nghiệm (α, β, γ) :

$$bc \equiv \alpha^2 \pmod{a}, ca \equiv \beta^2 \pmod{b}, ab \equiv -\gamma^2 \pmod{c}.$$

7. Phương pháp hình học

Hình học có những ứng dụng rất bất ngờ trong việc giải các bài toán số học. Chúng ta chắc chắn còn nhớ bài toán của IMO 42 “Cho các số nguyên dương a, b, c, d với $a > b > c > d > 0$. Giả sử $ac + bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c)$. Chứng minh rằng $ab + cd$ không phải là số nguyên tố” đã được giải hết sức ấn tượng bằng ... định lý hàm số cos và định lý Ptolémé. Dưới đây, ta sẽ xét hai ví dụ ứng dụng của hình học trong số học với hai phương pháp tiếp cận khác nhau.

Phương pháp thứ nhất được gọi là *phương pháp cát tuyến*, sử dụng ý tưởng của hình học giải tích vào việc nghiên cứu các điểm nguyên và điểm hữu tỷ trên đường cong. Chính hướng đi này đã dẫn đến khái niệm đường cong elliptic, một trong những viên gạch cơ bản đặt nền móng cho việc chứng minh định lý lớn Fermat. Ở đây, chúng ta chỉ giới hạn ở một ví dụ nhỏ.

Ví dụ 1: Tìm tất cả các nghiệm nguyên khác $(0, 0, 0)$ của phương trình

$$x^2 + 2y^2 = 3z^2 \quad (1)$$

Lời giải: Chia hay vế của phương trình cho z^2 , ta được phương trình

$$(x/z)^2 + 2(y/z)^2 = 3$$

Đặt $u = x/z, v = y/z$, ta được phương trình

$$u^2 + 2v^2 = 3 \quad (2)$$

trong đó u, v hữu tỷ. Bài toán quy về việc tìm tất cả các nghiệm hữu tỷ của (2)

Ta cần tìm tất cả các điểm hữu tỷ nằm trên đường cong $(E): u^2 + 2v^2 = 3$. Chú ý rằng $(1, 1)$ là một điểm hữu tỷ của (E) . Nếu (u_0, v_0) là một điểm hữu tỷ khác $(1, 1)$ thì đường thẳng qua $(1, 1)$ và (u_0, v_0) sẽ có hệ số góc hữu tỷ. Mặt khác, nếu $y = k(x-1) + 1$ là đường thẳng qua $(1, 1)$ với hệ số góc k hữu tỷ thì, áp dụng định lý Viet cho phương trình hoành độ giao điểm, giao điểm thứ hai của đường thẳng trên với (C) cũng có tọa độ hữu tỷ. Tính toán trực tiếp ta có tọa độ của điểm này là

$$u = \frac{2k^2 - 4k - 1}{2k^2 + 1}, v = \frac{-2k^2 - 2k + 1}{2k^2 + 1}$$

Từ đây ta cũng tìm được nghiệm tổng quát của (1). Ví dụ với $k=-1$ ta được $u = 5/3, v = 1/3$ và ta có nghiệm $(5, 1, 3)$ của (1).

Phương pháp thứ hai là phương pháp điểm nguyên, lưới nguyên. Rất nhiều định lý sâu sắc của số học được chứng minh bằng cách tính số điểm nguyên trong một miền. Chẳng hạn Luật thuận nghịch bình phương cho ký hiệu Legendre đã được chứng minh như vậy. Dưới đây, chúng ta xét một ứng dụng khác của phương pháp lưới nguyên.

Ví dụ 2: Bổ đề Minkowsky và định lý Minkowsky

Định lý Minkowsky là một ví dụ rất thú vị về ứng dụng của hình học trong lý thuyết số. Chúng ta bắt đầu từ một kết quả rất đơn giản nhưng hữu ích

Bổ đề 7.1. *Trên mặt phẳng cho hình F có diện tích lớn hơn 1. Khi đó tồn tại hai điểm A, B thuộc F , sao cho véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ nguyên.*

Chứng minh: Lưới nguyên cắt hình G thành các mẫu nhỏ. Chồng các mẫu này lên nhau, do tổng diện tích của các mẫu lớn hơn 1, nên có ít nhất 2 mẫu có điểm chung. Gọi A, B là hai điểm nguyên thuộc cùng với điểm chung này thì A, B là hai điểm cần tìm.

Bổ đề 7.2. (Bổ đề Minkowsky) *Trên mặt phẳng cho hình lồi F nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng và có diện tích lớn hơn 4. Khi đó nó chứa một điểm nguyên khác gốc tọa độ.*

Chứng minh: Xét phép vị tự tâm O , tỷ số $1/2$, biến F thành G . Do G có diện tích lớn hơn 1 nên theo bổ đề 1, tồn tại hai điểm A, B thuộc G sao cho véc-tơ AB có tọa độ nguyên. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O . Do hình G đối xứng qua gốc tọa độ nên A' thuộc G . Do G lồi nên trung điểm M của $A'B$ thuộc G . Gọi N là điểm đối xứng của O qua M thì N thuộc F và $ON = AB$, suy ra N là điểm nguyên khác O (đpcm).

Định lý 7.3. (Định lý Minkowsky) *Cho a, b, c là các số nguyên, trong đó $a > 0$ và $ac - b^2 = 1$. Khi đó phương trình $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ có nghiệm nguyên.*

Bài tập

7.1. Tìm tất cả các cặp (x, y) các số hữu tỷ dương sao cho $x^2 + 3y^2 = 1$.

7.2. Chứng minh rằng một đường cong bậc hai bất kỳ hoặc không chứa điểm hữu tỷ nào, hoặc chứa vô số điểm hữu tỷ.

7.3. Hãy tìm ví dụ một đường cong bậc hai không chứa điểm hữu tỷ nào.

7.4*. Chứng minh rằng nếu D là số nguyên không chính phương thì phương trình $x^2 - Dy^2 = 1$ luôn có nghiệm nguyên dương.

7.5. Cho p, q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Bằng cách đếm các điểm nguyên, hãy chứng minh công thức

$$\left[\frac{q}{p} \right] + \left[\frac{2q}{p} \right] + \dots + \left[\frac{(p-1)q}{p} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

8. Phương pháp đại số (Phương pháp gien)

Nếu từ một nghiệm của phương trình đã cho ta có quy tắc để xây dựng ra một nghiệm mới thì quy tắc đó chính là gien. Phương pháp gien là phương pháp

dựa vào gien để tìm tất cả các nghiệm của phương trình đã cho từ các nghiệm cơ sở. Để tìm các nghiệm cơ sở, ta áp dụng bước lùi, tức là quy tắc ngược của quy tắc tiến nói trên. Minh họa tốt nhất cho ý tưởng này là phương trình Pell và phương trình Markov. Ta bắt đầu bằng phương trình Pell.

Phương trình Pell cổ điển là phương trình dạng, $x^2 - Dy^2 = 1$ trong đó D là số nguyên dương không chính phương. Nếu $D = k^2$ thì từ phân tích $(x - ky)(x + ky) = 1$ ta suy ra phương trình đã cho có các nghiệm nguyên duy nhất là $(\pm 1, 0)$. Trong trường hợp D bất kỳ thì $(\pm 1, 0)$ cũng là nghiệm của phương trình Pell. Ta gọi nghiệm này là *ngiem tầm thường*.

Với số nguyên dương D không chính phương cho trước, đặt $S = \{ (x, y) \in (\mathbb{N}^+)^2 \mid x^2 - Dy^2 = 1 \}$ là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1 \quad (1).$$

Ta có định lý quan trọng sau

Định lý 8.1. Nếu D là số nguyên dương không chính phương thì $S \neq \emptyset$, tức là phương trình (1) có nghiệm không tầm thường.

Chứng minh định lý này khá phức tạp, dựa vào lý thuyết liên phân số hoặc phương pháp hình học. Tuy nhiên, về mặt ứng dụng (trong các bài toán phổ thông), định lý này là không thực sự cần thiết vì với D cho trước, ta có thể tìm ra một nghiệm nguyên dương của (1) bằng phương pháp thử và sai. Ta bỏ qua định lý này và chuyển sang định lý mô tả tất cả các nghiệm của (1) khi biết nghiệm cơ sở.

Với $(x, y), (x', y') \in S$ ta có nếu $x > x'$ thì $y > y'$. Do đó có thể định nghĩa $(x, y) > (x', y') \Leftrightarrow x > x'$. Với thứ tự này, S là một tập sắp thứ tự tốt. Gọi (a, b) là phần tử nhỏ nhất của S theo thứ tự trên. Ta gọi (a, b) là *ngiem cơ sở* của (1).

Định lý 8.2. Nếu (a, b) là nghiệm cơ sở của (1) và (x, y) là một nghiệm nguyên dương tùy ý của (1) thì tồn tại số nguyên dương n sao cho $x + y\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^n$ và từ đó mọi nghiệm của (1) đều có thể tìm được bởi công thức

$$x = \frac{(a + b\sqrt{D})^n + (a - b\sqrt{D})^n}{2}, y = \frac{(a + b\sqrt{D})^n - (a - b\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}} \quad (2).$$

Chứng minh: Nhận xét rằng nếu (x, y) là nghiệm của (1) thì

$$x' = ax - Dby$$

$$y' = ay - bx$$

cũng là nghiệm của (1) (có thể không nguyên dương)

Trước hết, do $\sqrt{D}$ vô tỷ nên nếu $x + y\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^n$ thì $x - y\sqrt{D} = (a - b\sqrt{D})^n$ và từ đó $x^2 - Dy^2 = (a + b\sqrt{D})^n(a - b\sqrt{D})^n = (a^2 - Db^2)^n = 1$, suy ra (x, y) là nghiệm của (1) và ta có công thức như trên.

Tiếp theo, giả sử không phải nghiệm nào của (1) cũng có dạng (2). Gọi (x^*, y^*) là nghiệm nhỏ nhất không có dạng (2) thì rõ ràng $x^* > a, y^* > b$.

Theo nhận xét: $x' = ax^* - Dby^*$

$$y' = ay^* - bx^* \quad (3)$$

là nghiệm của (1)

Để dàng kiểm tra được rằng 1) $x^* > x' > 0$ và 2) $y^* > y' > 0$. Từ đó, do tính nhỏ nhất của (x^*, y^*) , tồn tại n nguyên dương sao cho $x' + y' \sqrt{D} = (a+b\sqrt{D})^n$. Giải hệ (3) với ẩn là (x^*, y^*) , ta được (chú ý $a^2 - Db^2 = 1$) $x^* = ax' + Dby'$, $y^* = ay' + bx'$. Từ đó

$$x^* + y^* \sqrt{D} = ax' + Dby' + (ay' + bx') \sqrt{D} = (a+b\sqrt{D})(x' + y' \sqrt{D}) = (a+b\sqrt{D})^{n+1}$$

mâu thuẫn!.

Vậy điều giả sử là sai và (2) là tất cả các nghiệm của (1).

Tiếp theo, ta xét phương trình dạng Pell, tức là phương trình dạng

$$x^2 - Dy^2 = k \quad (4)$$

trong đó D không chính phương và $k \notin \{0, 1\}$.

Ta có một số nhận xét sau

+ Không phải với cặp D, k nào phương trình (4) cũng có nghiệm. Ví dụ: phương trình $x^2 - 3y^2 = -1$.

+ Nếu phương trình (4) có nghiệm nguyên dương thì nó có vô số nghiệm nguyên dương. Lý do: nếu (x, y) là nghiệm của (4) thì

$$x' = ax + Dby$$

$$y' = ay + bx$$

cũng là nghiệm của (4), trong đó (a, b) là nghiệm cơ sở của phương trình.

Như thường lệ, ta đặt $S = \{(x, y) \in (\mathbb{N}^+)^2 \mid x^2 - Dy^2 = k\}$ và gọi (a, b) là nghiệm cơ sở của phương trình Pell tương ứng $x^2 - Dy^2 = 1$. Nghiệm (x_0, y_0) thuộc S được gọi là *nguyên cơ sở* của (4) nếu không tồn tại $(x', y') \in S$ sao cho

$$x = ax' + Dby'$$

$$y = ay' + bx'$$

Gọi S_0 là tập hợp tất cả các nghiệm cơ sở. Ta có định lý quan trọng sau:

Định lý 8.3. Với mọi D, k ta có $|S_0| < \infty$.

Chứng minh: Nếu $S_0 = \emptyset$ thì $|S_0| = 0 < \infty$. Tiếp theo giả sử $S_0 \neq \emptyset$. Gọi (x, y) là một nghiệm cơ sở nào đó của (4). Xét hệ

$$ax' + Dby' = x$$

$$ay' + bx' = y$$

có nghiệm $x' = ax - Dby$, $y' = ay - bx$. Để dàng chứng minh được $(x')^2 - D(y')^2 = 1$. Vì $(x, y) \in S_0$ nên theo định nghĩa $(x', y') \notin S$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x' \leq 0 \\ y' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \leq Dby \\ ay \leq bx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq -kDb^2 \\ y^2 \leq kb^2 \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

Nếu (5) xảy ra thì ta có đánh giá $y^2 = (x^2 - k)/D \leq -k(Db^2 + 1)/D$

Nếu (6) xảy ra thì ta có $x^2 = Dy^2 + k \leq Dkb^2 + D$.

Trong cả hai trường hợp, ta có $|S_0| < \infty$.

Cuối cùng, chú ý rằng từ một nghiệm (x, y) bất kỳ của (4) không thuộc S_0 , bằng cách đi ngược xuống bằng công thức $x' = ax - Dby, y' = ay - bx$ ta luôn có thể đi đến một nghiệm cơ sở của (4). Như vậy, với định lý trên, phương trình dạng Pell đã được giải quyết hoàn toàn. Dưới đây chúng ta xem xét một ví dụ:

Ví dụ 8.1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - 5y^2 = -4$ (1).

Lời giải: Bằng phép thử tuần tự, ta tìm được nghiệm cơ sở của phương trình $x^2 - 5y^2 = 1$ là $(9, 4)$. Theo phép chứng minh định lý 8.3, nghiệm cơ sở của (1) thỏa mãn

$$x^2 \leq 4.5.4^2, y^2 \leq (4.5.42 + 4)/5 \Rightarrow x < 17, y < 9$$

Dùng phép thử tuần tự, ta tìm được hai nghiệm cơ sở là $(1, 1)$ và $(11, 5)$. Từ hai nghiệm này, bằng công thức

$$x' = 9x + 20y, y' = 4x + 9y$$

ta tìm được tất cả các nghiệm của (1).

Với phép giải phương trình dạng Pell, trên thực tế ta đã có thể giải tất cả các phương trình Diophant bậc 2, tức là phương trình dạng

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Dựa vào lý thuyết đường con bậc 2, ta có thể đưa phương trình trên về một trong các dạng chính sau

+ Dạng ellip: $ax^2 + by^2 = c$ ($a, b, c > 0$) – có hữu hạn nghiệm, giải bằng phương pháp thử và sai

+ Dạng parabol: $ax^2 + by + c = 0$ - giải bằng đồng dư bậc 2

+ Dạng hypebol: $ax^2 - by^2 = c$ - phương trình dạng Pell

Ngoài ra còn có các dạng suy biết như hai đường thẳng cắt nhau, hai đường thẳng song song, ellip ảo ... Dưới đây, ta xét một ví dụ áp dụng:

Ví dụ 8.2: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn phương trình

$$m(m+1) + n(n+1) = 3mn$$

Lời giải: Xét phương trình đã cho như phương trình bậc 2 theo m

$$m^2 - (3n-1)m + n(n+1) = 0$$

Phương trình này có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi Δ là số chính phương, tức là

$$(3n-1)^2 - 4n(n+1) = y^2 \Leftrightarrow y^2 - 5(n-1)^2 = -4$$

ta thu được phương trình dạng Pell mà ta đã biết cách giải.

Đặc biệt với $k = -1$, phương trình $x^2 - Dy^2 = -1$ được gọi là phương trình Pell loại 2. Định lý dưới đây cho chúng ta điều kiện có nghiệm của phương trình này.

Định lý 8.4. Cho d là một số nguyên dương không chính phương. Xét phương trình

$$x^2 - dy^2 = -1 \quad (1)$$

Gọi (a, b) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình Pell liên kết với phương trình (1), tức là phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ (1').

Khi đó phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm nguyên dương

$$\begin{aligned} a &= x^2 + dy^2 \\ b &= 2xy. \end{aligned} \quad (2)$$

Chứng minh. Giả sử $(x_0; y_0)$ là nghiệm nguyên dương của hệ phương trình (2), vì $(a; b)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình Pell liên kết nên

$$a^2 - db^2 = 1$$

Do vậy, từ (2) ta có $(x_0 + dy_0)^2 - d(2x_0y_0)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_0^2 - dy_0^2)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - dy_0^2 = 1$ hoặc $x_0^2 - dy_0^2 = -1$. Nếu $x_0^2 - dy_0^2 = 1$ thì (x_0, y_0) là nghiệm nguyên dương của phương trình Pell liên kết. Do (a, b) là nghiệm nhỏ nhất của (1') nên $x_0 \geq a, y_0 \geq b$, mà $a = x_0^2 + dy_0^2 \Rightarrow x_0 \geq x_0^2 + dy_0^2$, vô lý!

Nếu $x_0^2 - dy_0^2 = -1$ thì $(x_0; y_0)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

Đảo lại: Giả sử phương trình (1) có nghiệm nguyên dương. Khi đó gọi $(x_0; y_0)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (1). Ta sẽ chứng minh $(x_0; y_0)$ chính là nghiệm nguyên dương của hệ (2).

Thật vậy, đặt $u = x_0^2 + dy_0^2, v = 2x_0y_0$ thì $u^2 - dv^2 = (x_0^2 + dy_0^2)^2 - d(2x_0y_0)^2 = (x_0^2 - dy_0^2)^2 = 1$ (vì $x_0^2 - dy_0^2 = -1$). Suy ra u, v là nghiệm của phương trình (1'). Do $(a; b)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (1') nên $u \geq a, v \geq b$.

Ta chứng minh $u = a, v = b$.

Giả sử trái lại $u > a, v > b$ (vì $u > a \Leftrightarrow v > b$).

Ta có $0 < a - b\sqrt{d} < (a - b\sqrt{d})(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2 = 1$

Do đó $(a - b\sqrt{d})(x_0 + y_0\sqrt{d}) < x_0 + y_0\sqrt{d} \Leftrightarrow ax_0 - bdy_0 + (ay_0 - bx_0)\sqrt{d} < x_0 + y_0\sqrt{d}$

Từ $u > a, v > b$ suy ra $a + b\sqrt{d} < u + v\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^2$.

Do vậy

$$-(ax_0 - bdy_0) + (ay_0 - bx_0)\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})(-x_0 + y_0\sqrt{d}) < (x_0 + y_0\sqrt{d})^2(-x_0 + y_0\sqrt{d})$$

Hay

$$-(ax_0 - bdy_0) + (ay_0 - bx_0)\sqrt{d} < (dy_0^2 - x_0^2)(x_0 + y_0\sqrt{d}) = x_0 + y_0\sqrt{d}.$$

Đặt $s = ax_0 - bdy_0; t = ay_0 - bx_0$, ta có

$$s + t\sqrt{d} < x_0 + y_0\sqrt{d} \quad (3)$$

$$-s + t\sqrt{d} < x_0 + y_0\sqrt{d} \quad (4)$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} s^2 - dt^2 &= (ax_0 - bdy_0)^2 - d(ay_0 - bx_0)^2 \\ &= a^2(x_0^2 - dy_0^2) + b^2d(dy_0^2 - x_0^2) \\ &= -a^2 + db^2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Vậy $s^2 - dt^2 = -1$, suy ra $s \neq 0$ (vì nếu $s = 0$ thì $dt^2 = 1$ suy ra $d = 1$, vô lý).

Ta chứng minh $t > 0$.

Ta có $t > 0 \Leftrightarrow ay_0 > bx_0 \Leftrightarrow a^2y_0^2 > b^2x_0^2 \Leftrightarrow (1+db^2)y_0^2 > b^2(dy_0^2-1) \Leftrightarrow y_0^2 > -b^2$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do đó $t > 0$.

Do $s \neq 0$ nên $s > 0$ hoặc $-s > 0$.

Nếu $s > 0$ thì $(s; t)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình (1). Mà $(x_0; y_0)$ là nghiệm nguyên dương bé nhất của phương trình này nên $s \geq x_0, t \geq y_0$ suy ra $s + t\sqrt{d} \geq x_0 + y_0\sqrt{d}$ trái với (3). Trường hợp $-s > 0$ thì $(-s; t)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình (1) và lý luận tương tự, ta đi đến một bất đẳng thức mâu thuẫn với (4).

Vậy $(u; v) = (a; b)$.

Nhận xét. Thực tế là ta đã chứng minh kết quả sau : Nếu $(a; b)$ là nghiệm nhỏ nhất của (1') và $(m; n)$ là nghiệm nhỏ nhất của (1) thì $a = m^2 + dn^2, b = 2mn$.

Một điều thú vị khác nữa là phương trình dạng $Ax^2 - By^2 = 1$ cũng có mối liên quan chặt chẽ đến phương trình $x^2 - AB y^2 = 1$. Ta có kết quả sau:

Định lý 8.5. Cho phương trình $Ax^2 - By^2 = 1$ (1)

với A và AB không chính phương. Gọi $(a; b)$ là nghiệm nhỏ nhất của phương trình Pell kết hợp $x^2 - AB y^2 = 1$ (2)

Giả sử phương trình (1) có nghiệm và $(x_0; y_0)$ là nghiệm nhỏ nhất của nó thì $(x_0; y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình

$$a = Ax^2 + By^2$$

$$b = 2xy$$

Chứng minh. Giả sử $(x_0; y_0)$ là nghiệm nhỏ nhất của (1). Đặt $u = Ax_0^2 + By_0^2, v = 2x_0y_0$ thì ta có

$$u^2 - ABv^2 = (Ax_0^2 + By_0^2)^2 - AB(2x_0y_0)^2 = (Ax_0^2 - By_0^2)^2 = 1.$$

Chứng tỏ $(u; v)$ là nghiệm của phương trình (2). Mà $(a; b)$ là nghiệm nhỏ nhất của phương trình này nên $u \geq a, v \geq b$.

Ta chứng minh $u = a, v = b$.

Thật vậy, giả sử trái lại $u > a; v > b$.

$$a - b\sqrt{AB} < (a - b\sqrt{AB})(a + b\sqrt{AB}) = a^2 - ABb^2 = 1$$

$$\Rightarrow (a - b\sqrt{AB})(\sqrt{Ax_0} + \sqrt{By_0}) < (\sqrt{Ax_0} + \sqrt{By_0})$$

$$\Rightarrow (ax_0 - Bby_0)\sqrt{A} + (ay_0 - Abx_0)\sqrt{B} < (\sqrt{Ax_0} + \sqrt{By_0})$$

Lại có

$$(a + b\sqrt{AB}) < (u + v\sqrt{AB}) = (\sqrt{Ax_0} + \sqrt{By_0})^2$$

$$\Rightarrow (ax_0 - Bby_0)\sqrt{A} - (ay_0 - Abx_0)\sqrt{B} = (a + b\sqrt{AB})(\sqrt{Ax_0} - \sqrt{By_0})$$

$$< (\sqrt{Ax_0} + \sqrt{By_0})^2(\sqrt{Ax_0} - \sqrt{By_0}) = (\sqrt{Ax_0} + \sqrt{By_0})$$

Đặt $s = ax_0 - Bby_0, t = ay_0 - Abx_0$ thì các bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$s\sqrt{A} + t\sqrt{B} < x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B} \quad (3)$$

$$s\sqrt{A} - t\sqrt{B} < x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B} \quad (4)$$

Tiếp theo, ta có $(As^2 - Bt^2) = A(ax_0 - Bby_0)^2 - B(ay_0 - Abx_0)^2$
 $= (a^2 - ABb^2)(Ax_0^2 - By_0^2) = 1.1 = 1.$

Ta thấy $s > 0$ vì

$$s > 0 \Leftrightarrow ax_0 > Bby_0 \Leftrightarrow a^2x_0^2 > B^2b^2y_0^2 \Leftrightarrow a^2x_0^2 > Bb^2(Ax_0^2 - 1) \\ \Leftrightarrow (a^2 - ABb^2)x_0^2 > -Bb^2 \Leftrightarrow x_0^2 > -Bb^2.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, do đó $s > 0$.

Ta thấy $t \neq 0$ vì $t = 0 \Leftrightarrow ay_0 = Abx_0 \Leftrightarrow a^2y_0^2 = A^2b^2x_0^2 \Leftrightarrow (ABb^2 + 1)y_0^2 = Ab^2(By_0^2 + 1) \Leftrightarrow y_0^2 = Ab^2$. Điều này không thể xảy ra do A không chính phương.

Nếu $t > 0$ thì $(s; t)$ là nghiệm nguyên dương của (1), mà $(x_0; y_0)$ là nghiệm nhỏ nhất của (1) $s \geq x_0; t \geq y_0$, do vậy

$$s\sqrt{A} + t\sqrt{B} \geq \sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0, \text{ điều này mâu thuẫn với (3).}$$

Tương tự, với $t < 0$ thì $(s; -t)$ là nghiệm nguyên dương của (1) và ta cũng dẫn đến một bất đẳng thức mâu thuẫn với (4).

Vậy $u = a, v = b$ hay $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ trên.

Ví dụ 8.3. (Vietnam TST 2009) Cho a, b là các số nguyên dương không chính phương sao cho $a.b$ cũng không chính phương. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình

$$ax^2 - by^2 = 1 \text{ và } ax^2 - by^2 = -1.$$

không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải. Giả sử cả hai phương trình

$$ax^2 - by^2 = 1 \quad (1)$$

và

$$bx^2 - ay^2 = 1 \quad (2)$$

có nghiệm

Gọi $(m; n)$ là nghiệm nhỏ nhất của phương trình $x^2 - aby^2 = 1$, $(x_1; y_1)$ là nghiệm nhỏ nhất của phương trình (1) và $(x_2; y_2)$ là nghiệm nhỏ nhất của phương trình (2).

Áp dụng định lý 8.5, ta có

$$m = ax_1^2 + by_1^2$$

$$n = 2x_1y_1$$

và

$$m = bx_2^2 + ay_2^2$$

$$n = 2x_2y_2$$

Do $ax_1^2 = by_1^2 + 1$ và $ay_2^2 = bx_2^2 - 1$ nên từ đây ta suy ra

$$ax_1^2 + by_1^2 = bx_2^2 + ay_2^2$$

$$\Leftrightarrow 2by_1^2 + 1 = 2bx_2^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow b(x_2^2 - y_1^2) = 1.$$

Điều này không thể xảy ra do $b > 1$.

Phương trình Markov cổ điển là phương trình dạng

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = kx_1x_2\dots x_n \quad (1)$$

Ở đây n và k là các tham số nguyên dương. Trường hợp riêng khi $n = k = 3$ – phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad (2)$$

được nghiên cứu chi tiết trong bài báo của A.A Markov về dạng toàn phương dương đăng ở Báo cáo VHL KH Liên Xô năm 1951; “dạng Markov”, liên quan chặt chẽ đến phương trình dạng (2) được sử dụng trong lý thuyết xấp xỉ các số vô tỷ bằng các số hữu tỷ.

Đầu tiên, ta chú ý đến một tính chất thú vị của phương trình Markov. Nếu phương trình (1) có một nghiệm thì nó sẽ có rất nhiều nghiệm và có thể tạo ra các nghiệm đó bằng cách sau đây. Ta sẽ coi một biến, chẳng hạn x_n , là “ẩn số”, còn tất cả các biến khác như các tham số. Khi đó, vì phương trình

$$x^2 - kx_1\dots x_{n-1}x + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0$$

là phương trình bậc 2 theo x và có nghiệm $x = x_n$, nên nó có nghiệm nguyên thứ hai $x'_n = u$; theo định lý Viet ta có

$$u = kx_1\dots x_{n-1} - x_n = (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)/x_n \quad (3)$$

Chú ý rằng $u < x_n$ khi và chỉ khi

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < x_n^2 \Leftrightarrow 2x_n > kx_1\dots x_{n-1} \quad (4)$$

Quá trình này có thể thực hiện với mọi biến số x_j trong vai trò của x_n . Nhưng chỉ đối với một biến - biến lớn nhất là có thể xảy ra (4) và ta thu được nghiệm mới ($x_1, x_2, \dots, x'_n$) “nhỏ hơn” nghiệm cũ (thứ tự theo tổng các biến); như vậy, theo đa số là các nghiệm tăng lên và ta có cây nghiệm.

Tiếp theo, trừ những trường hợp đặc biệt, ta sẽ giả sử rằng $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Ta sẽ nói nghiệm ($x_1, x_2, \dots, x_n$) là *ng nghiệm gốc* (ng nghiệm cơ sở), nếu

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \geq x_n^2 \Leftrightarrow 2x_n \leq kx_1\dots x_{n-1} \quad (5)$$

(từ nghiệm này, tất cả các nhánh cây đi đến các nghiệm bên cạnh, đều tăng)

Bổ đề 8.4. Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên dương thì nó có nghiệm gốc.

Bổ đề 8.5. Nếu $n > 2$, ($x_1, x_2, \dots, x_n$) là nghiệm gốc, ngoài ra, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Khi đó

$$x_1\dots x_{n-2} \leq 2(n-1)/k.$$

Chứng minh:

$$kx_1\dots x_{n-2}x_{n-1}^2 \leq kx_1\dots x_{n-2}x_{n-1}x_n = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 2(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) \leq 2(n-1)x_{n-1}^2$$

Bổ đề 8.6. Nếu $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ là các số nguyên dương bất kỳ thỏa mãn điều kiện $1 < x_n^2$

$\leq x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$, thì tỷ số $R = (x_1^2 + \dots + x_n^2)/x_1x_2\dots x_n$ không vượt quá $(n+3)/2$.

Định lý 8.7. Nếu phương trình (1) có nghiệm và $n \neq k$, thì $n \geq 2k - 3$ khi $n \geq 5$ và $n > 4k - 6$ khi $n = 3, n = 4$.

Từ các định lý và bổ đề trên, với n cho trước, việc tìm tất cả các giá trị k sao cho (1) có nghiệm thực hiện được dễ dàng. Hơn nữa, phương pháp gien được sử dụng ở trên có thể áp dụng cho các phương trình dạng tương tự, ví dụ phương trình $(x+y+z)^2 = kxyz$.

Cuối cùng là một ví dụ khác về ứng dụng của gien

Ví dụ 8.3: (Iran 2001) Giả sử x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $xy = z^2 + 1$. Chứng minh rằng tồn tại các số a, b, c và d sao cho $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ và $z = ac + bd$.

Bài tập

8.1 (Ailen 1995) Tìm tất cả các số nguyên a sao cho phương trình $x^2 + axy + y^2 = 1$ có vô số nghiệm nguyên phân biệt x, y .

8.2. (Đài Loan 1998) Tồn tại hay không nghiệm của phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = xyzuv - 65$$

trong tập hợp các số nguyên lớn hơn 1998?

8.3. (Việt Nam 1999) Cho hai dãy số $(x_n), (n=0, 1, 2, \dots)$ và $(y_n), (n=0, 1, 2, \dots)$ được xác định

8.4. (Việt Nam 2002) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình $x + y + z + t = n\sqrt{xyzt}$ có nghiệm nguyên dương.

8.5. (Ba Lan 2002) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1$.

8.6. (Mỹ 2002) Tìm tất cả các cặp sắp thứ tự các số nguyên dương (m, n) sao cho $mn - 1$ chia hết $m^2 + n^2$.

8.7. (Việt Nam 2002, vòng 2) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $m \geq 2002$ và m số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_m$ sao cho

$$\prod_{i=1}^m a_i^2 - 4 \sum_{i=1}^m a_i^2$$

là số chính phương.

8.8. (Việt Nam 2002, vòng 2) Tìm tất cả các đa thức $p(x)$ với hệ số nguyên sao cho đa thức

$$q(x) = (x^2 + 6x + 10)(p(x))^2 - 1$$

là bình phương của một đa thức với hệ số nguyên.

8.9. (THTT 6/181) Với giá trị nguyên dương nào của p thì phương trình $x^2 + y^2 + 1 = pxy$ có nghiệm nguyên dương?

8.10. (THTT 4/202) Cho ba số nguyên a, b, c ; $a > 0$, $ac - b^2 = p_1 p_2 \dots p_m$ trong đó $p_1, p_2, \dots, p_m$ là các số nguyên tố khác nhau. Gọi $M(n)$ là số các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n.$$

8.11. (Đề đề nghị IMO 95) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $19n+1$ và $95n+1$ đều là các số chính phương.

8.12. Tam giác với cạnh 3, 4, 5 và tam giác với cạnh 13, 14, 15 có các cạnh là các số nguyên liên tiếp và có diện tích nguyên. Hãy tìm tất cả các tam giác có tính chất như vậy.

8.13. Chứng minh rằng nếu cả $3n+1$ và $4n+1$ đều là các số chính phương thì n chia hết cho 56.

8.14*. Trong các hàng của tam giác Pascal, hãy tìm hàng có chứa ba số hạng liên tiếp lập thành một cấp số cộng.

8.15. (Mỹ 1986) Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất sao cho trung bình bình phương của n số nguyên dương đầu tiên là một số nguyên.

8.16. (IMO 88) Nếu $a, b, q = (a^2 + b^2)/(ab+1)$ là các số nguyên dương thì q là số chính phương.

8.17. (MOCP 03) Tìm tất cả giá trị n sao cho phương trình $(x+y+z)^2 = nxyz$ có nghiệm nguyên dương.

8.18. (PTNK 03). Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -24$ có nghiệm nguyên dương.

8.19. Chứng minh rằng phương trình $(k^2 - 4)x^2 - y^2 = 1$ không có nghiệm nguyên với mọi $k > 3$.

8.20. (Mathlinks) Cho A là tập hợp hữu hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp hữu hạn các số nguyên dương B sao cho $A \subset B$ và $\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2$.

8.21. (AMM 1995) Cho x, y là các số nguyên dương sao cho $xy + x$ và $xy + y$ là các số chính phương. Chứng minh rằng có đúng một trong hai số x, y là số chính phương.

Tài liệu tham khảo

1. Jean-Marie Monier. *Đại số 1 – giáo trình toán tập 5*, NXBGD-Dunod 1999.
2. Hà Huy Khóai - Phạm Huy Điền. *Số học thuật toán*, NXB ĐHQG HN 2003.
3. Lê Hải Châu. *Các bài thi học sinh giỏi Toán PTTH toàn quốc*, NXBGD 1994.
4. Nguyễn Sinh Nguyên, Nguyễn Văn Nho, Lê Hoàng Phò. *Tuyển tập các bài dự tuyển Olympic Toán học Quốc tế 1991-2001*, NXBGD 2003.
5. Nguyễn Văn Nho. *Olympic Toán học châu Á – Thái Bình Dương 1989-2002*, NXBGD 2003.
6. Tập thể tác giả. *Tuyển tập 5 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, NXBGD 2003.
7. Arthur Engel. *Problem Solving Strategies*, Springer 1998
8. Goeoge Polya. Gabor Szego, *Problems and Theorems in Analysis II*, Springer 1976
9. Harvey Cohn. *Advanced Number Theory*, Dover Publications 1980
10. Titu Andreescu, Juming Feng. *Mathematical Olympiads 1999-2000: Olympiads Problems from Around the World*, MMA 2000.
11. Titu Andreescu, Juming Feng, Hojoo Lee. *Mathematical Olympiads 2001-2002: Olympiads Problems from Around the World*, MMA 2002.
12. Titu Andreescu & Razvan Gelca. *Mathematical Olympiads Challenge*. Birkhauser 2000.
13. Walter Mientka & others. *Mathematical Olympiads 1996-1997: Olympiads Problems from Around the World*, MMA 1997.

14. Walter Mientka & others. *Mathematical Olympiads 1997-1998: Olympiads Problems from Around the World*, MMA 1998.
15. Б.О. Бугаенко. *Уравнения Пелля*, Москва 2001.
16. Д.Ф. Базылев. *Диофантовы уравнения*, Минск 1999.
17. А.О. Гельфонд. *Решение уравнений в целых числах*, Наука 1978.
18. В. Серпинский. *О решений уравнений в целых числах*, ФМЛ 1961.
19. В. Серпинский. *250 задач по элементарной теории чисел*, ФМЛ 1968. Có bản dịch đề bài tiếng Việt do Sở GD Tp HCM in năm 1982.
20. Дэвенпорт. *Высшая арифметика*, Наука 1956.
21. Các tạp chí Kvant, AMM, Toán học & Tuổi trẻ, Toán học trong nhà trường.
22. Tư liệu Internet, đặc biệt là các website: www.mccme.ru và www.mathlinks.ro.