



CLB Toán học

NOKIA
Connecting People

Đề số 4 (Hạn chót nộp bài 27/12/2009)

Bài 1. Với số nguyên dương n nào thì tồn tại đa thức $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ với hệ số thực sao cho với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $P_n(x) > -3$ và $P_n(-2) = P_n(0) = P_n(2) = 0$?

Bài 2. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - \sin x$. Chứng minh rằng hàm số f khả nghịch và hàm ngược f^{-1} của f có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một hàm tuyến tính và một hàm tuần hoàn.

Bài 3. Cho tam giác ABC . Hình vuông $MNPQ$ nội tiếp tam giác ABC và có cạnh MN nằm trên BC . Gọi A' là tâm hình vuông và A'' là điểm đối xứng với A' qua BC . Các điểm B'', C'' được xác định tương tự. Chứng minh rằng AA'', BB'', CC'' đồng quy tại một điểm.

Bài 4. Chứng minh rằng giữa các số $10^n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) có vô số hợp số.

Bài 5. Chúng ta nói một số tự nhiên lớn hơn hay bằng 2 là một số “tốt” nếu nó có thể biểu diễn dưới dạng tổng của các số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) sao cho tổng nghịch đảo của các số này bằng 1. Một số là “xấu” nếu nó không “tốt”.

Chứng minh rằng nếu ta chấp nhận giả thiết là tất cả các số tự nhiên từ 24 đến 56 là “tốt” thì tất cả các số tự nhiên lớn hơn hay bằng 57 cũng là “tốt”.