



CLB Toán học

NOKIA
Connecting People

Đề số 5 (Hạn chót nộp bài 3/1/2010)

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực bất kỳ. Đặt $a = x^2(y-z)^4$, $b = y^2(z-x)^4$, $c = z^2(x-y)^4$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Bài 2. Với mỗi số thực p , xét phương trình $4x^3 - 3x - p = 0$ (1). Ta xét hàm số $f(p)$ được định nghĩa như sau:

- i) Nếu phương trình (1) có 3 nghiệm thực thì $f(p)$ bằng tích của nghiệm lớn nhất và nghiệm nhỏ nhất của (1).
- ii) Nếu phương trình (1) có 1 nghiệm thực duy nhất thì $f(p)$ là bình phương của nghiệm thực này.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $f(p)$ khi p chạy trên tập hợp các số thực.

Bài 3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC tại các điểm P và Q tương ứng. R và S tương ứng là trung điểm của các cạnh AC và BC . T là giao điểm của các đường thẳng PQ và RS . Chứng minh rằng T nằm trên phân giác góc B của tam giác.

Bài 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3^n - 2^n$ chia hết cho n .

Bài 5. Với những giá trị nào của k thì tập hợp

$$S = \{2010, 2011, \dots, 2010 + k\}$$

có thể chia thành hai tập con không giao nhau A và B sao cho tổng các phân tử của A bằng tổng các phân tử của B ?