
Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Thừa Thiên Huế

Khối 12 chuyên - năm học 2009-2010

Bài 1: (4 điểm)

Cho hàm số: $y = 36\cos x + 9\cos 2x + 4\cos 3x$

- Chứng minh rằng: $y + 31 \geq 0$ đúng với mọi số thực x .
- Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho: $y \leq k$ đúng với mọi số thực x .

Bài 2: (4 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng chứa hình vuông ABCD, xét điểm M_1 đối xứng của M qua đường thẳng AB, điểm M_2 đối xứng của M_1 qua đường thẳng BD, điểm M_3 đối xứng của M_2 qua đường thẳng AC và điểm M' đối xứng của M_3 qua đường thẳng CD.

Tìm tập hợp các điểm M sao cho độ dài đoạn MM' bằng độ dài cạnh hình vuông.

Bài 3: (4 điểm)

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 1, u_{n+1} = \sqrt{2^{u_n}} \text{ với } n \geq 1$$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn. Tìm giá trị giới hạn này.

Bài 4: (4 điểm)

Cho hình hộp $IJKL.I'J'K'L'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và

$$\widehat{II'J'} = \widehat{II'L'} = \widehat{J'I'L'} = 60^\circ$$

Chọn tùy ý điểm P trên đoạn IJ và gọi Q là điểm trên đoạn IL sao cho $LQ=IP$.

- Chứng minh rằng: $\widehat{IIP} + \widehat{IIP} + \widehat{PIQ} = 60^\circ$
- Chứng minh khoảng cách từ tâm O của hình hộp $IJKL.I'J'K'L'$ đến mặt phẳng $(I'PQ)$ không phụ thuộc vào cách chọn điểm P.

Bài 5: (4 điểm)

Xét hàm số f xác định trên tập số thực R thỏa mãn phương trình:

$$(f(x) - 1)(f(y) - 1)(2 - f(x + y)) = (2 - f(x))(2 - f(y))(f(x + y) - 1) \quad (*)$$

với mọi số thực x, y .

- Chứng minh tồn tại ít nhất ba hàm số f liên tục trên R thỏa mãn (*).
- Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên R thỏa mãn (*).