

Các Định Lý Hình Học Nổi Tiếng

“Famous Geometry Theorems” – Dr. Kin-Yin LI

Khoa Toán, ĐH Khoa Học và Kỹ Thuật Hong Kong

1. Lời giới thiệu

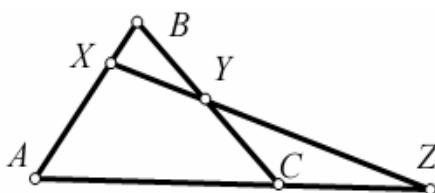
Có rất nhiều định lý hình học nổi tiếng. Chúng ta sẽ cùng nhìn lại các định lý này và một vài áp dụng của chúng. Trước hết, ta sẽ viết $P = WX \cap YZ$ để kí hiệu P là giao điểm của hai đường thẳng WX và YZ . Nếu các điểm A, B, C thẳng hàng, ta sẽ qui ước dấu $\frac{AB}{BC} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$ (vì vậy nếu B nằm giữa A và C , thì $\frac{AB}{BC} \geq 0$ (ngược lại $\frac{AB}{BC} \leq 0$)).

2. Các định lý

2.1. Định lý Menelaus (Nhà toán học cổ Hy Lạp (thế kỷ I sau công nguyên))

Cho tam giác ABC . Các điểm X, Y, Z lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, BC, CA . Khi đó

$$X, Y, Z \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$



Chứng minh. ($\Rightarrow$) Gọi L là đường thẳng vuông góc với đường thẳng chứa các điểm X, Y, Z , chúng cắt nhau tại O . Gọi A', B', C' lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ các điểm A, B, C xuống đường thẳng L . Khi đó, ta có

$$\frac{AX}{XB} = \frac{A'O}{OB'}, \frac{BY}{YC} = \frac{B'O}{OC'}, \frac{CZ}{ZA} = \frac{C'O}{OA'}.$$

Nhân các đẳng thức trên theo từng vế, ta nhận được

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = \frac{A'O}{OB'} \cdot \frac{B'O}{OC'} \cdot \frac{C'O}{OA'} = -1.$$

($\Leftarrow$) Gọi $Z' = XY \cap CA$. Áp dụng định lý Menelaus (phần thuận) cho đường thẳng qua các điểm X, Y, Z' , ta nhận được

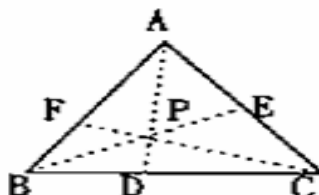
$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ'}{Z'A} = -1.$$

Từ đó suy ra $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ'}{Z'A} = \frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA}$ hay $\frac{CZ'}{Z'A} = \frac{CZ}{ZA}$. Do đó $Z' \equiv Z$.

2.2. Định lý Ceva (Nhà toán học Ý (1647 – 1734))

Cho tam giác ABC . Các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các đoạn thẳng BC, CA, AB . Khi đó

$$AD, BE, CF \text{ đồng quy} \Leftrightarrow \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



Chứng minh. ($\Rightarrow$) Áp dụng định lý Menelaus cho đường thẳng AD (đối với tam giác BCE), ta có

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EP}{PB} = -1.$$

Tiếp tục áp dụng định lý Menelaus cho đường thẳng CF (đối với tam giác ABE), ta có

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BP}{PE} \cdot \frac{EC}{CA} = -1.$$

Nhân các đẳng thức trên theo từng vế, ta thu được

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

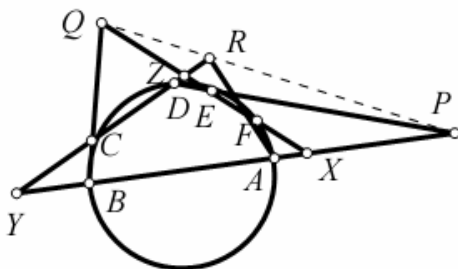
($\Leftarrow$) Gọi $P = AD \cap BE, F' = CP \cap AB$. Sử dụng định lý Ceva (phản thuận), ta có

$$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Từ đó suy ra $\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}$ hay $\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{F'B}$. Do đó $F' \equiv F$.

2.3. Định lý Pascal (Nhà toán học Pháp (1623 – 1662))

Cho A, B, C, D, E, F là các điểm cùng nằm trên một đường tròn (có thể không xếp theo thứ tự như trên). Gọi $P = AB \cap DE, Q = BC \cap EF, R = CD \cap FA$. Khi đó các điểm P, Q, R thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi $X = EF \cap AB, Y = AB \cap CD, Z = CD \cap EF$. Áp dụng định lý Menelaus cho các đường thẳng BC, DE, FA (đối với tam giác XYZ), ta có

$$\frac{ZQ}{QX} \cdot \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YC}{CZ} = -1, \frac{XP}{PY} \cdot \frac{YD}{DZ} \cdot \frac{ZE}{EX} = -1, \frac{YR}{RZ} \cdot \frac{ZF}{FX} \cdot \frac{XA}{AY} = -1.$$

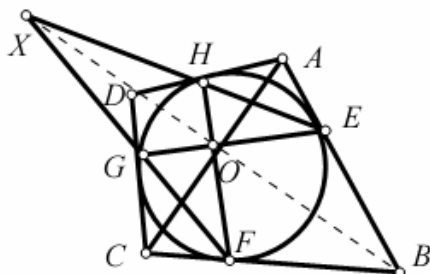
Nhân các đẳng thức trên, chú ý rằng $XA.XB = XE.XF, YC.YD = YA.YB, ZE.ZF = ZC.ZD$, được

$$\frac{ZQ}{QX} \cdot \frac{XP}{PY} \cdot \frac{YR}{RZ} = -1.$$

Theo định lý Menelaus, ta nhận được các điểm P, Q, R thẳng hàng.

2.4. Định lý Newton (Nhà toán học Anh (1642 – 1727))

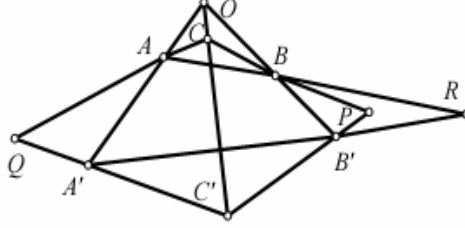
Một đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$, lần lượt tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA tại các điểm E, F, G, H . Khi đó, các đường thẳng AC, EG, BD, FH đồng quy.



Chứng minh. Gọi $O = EG \cap FH$ và $X = EH \cap FG$. Vì D là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn tại G, H , sử dụng định lý Pascal cho các điểm E, G, G, F, H, H ta suy ra các điểm O, D, X thẳng hàng. Tương tự, sử dụng định lý Pascal cho các điểm E, E, H, F, F, G ta suy ra các điểm B, X, O thẳng hàng. Do đó, B, O, D thẳng hàng, vì thế các đường thẳng EG, BD, FH cắt nhau tại O . Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được các đường thẳng AC, EG, FH cắt nhau tại O . Do đó, các đường thẳng AC, EG, BD, FH đồng quy tại O .

2.5. Định lý Desargues (Nhà toán học Pháp (1593 – 1662))

Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$. Nếu các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm O , thì các điểm P, Q, R thẳng hàng, trong đó $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$.



Chứng minh. Áp dụng định lý Menelaus lần lượt cho các đường thẳng $A'B'$ đối với tam giác OAB ; đường thẳng $B'C'$ đối với tam giác OBC , đường thẳng $C'A'$ đối với tam giác OCA , ta có

$$\frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BB'}{B'O} = -1, \frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CC'}{C'O} = -1, \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

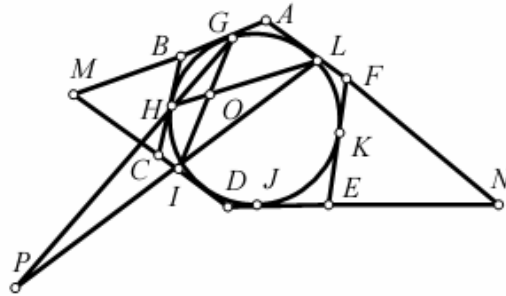
Nhân các đẳng thức trên theo từng vế, ta thu được

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

Theo định lý Menelaus, ta suy ra các điểm P, Q, R thẳng hàng.

2.6. Định lý Brianchon (?)

Các đường thẳng AB, BC, CD, DE, EF, FA tiếp xúc với một đường tròn lần lượt tại các tiếp điểm G, H, I, J, K, L (có thể không xếp theo thứ tự như này). Khi đó, các đường thẳng AD, BE và CF đồng quy.



Chứng minh. Gọi $M = AB \cap CD, N = DE \cap FA$. Áp dụng định lý Newton cho tứ giác $AMDN$, suy ra các đường thẳng AD, IL, GJ đồng quy tại điểm A' . Tương tự, các đường thẳng BE, HK, GJ đồng quy tại điểm B' ; các đường thẳng CF, HK, IL đồng quy tại điểm C' . Chú ý rằng $IL \equiv A'C'$. Áp dụng định lý Pascal cho các điểm G, G, I, L, L, H , suy ra các điểm A, O, P thẳng hàng, trong đó $O = GI \cap LH, P = IL \cap HG$. Tiếp tục áp dụng định lý Pascal cho các điểm H, H, L, I, I, G , suy ra C, O, P thẳng hàng. Do đó A, C, P thẳng hàng.

Bây giờ ta đặt $G = AB \cap A'B', H = BC \cap B'C', P = CA \cap IL = CA \cap C'A'$. Áp dụng định lý Desargues (phản đảo) cho các tam giác $ABC, A'B'C'$, suy ra các đường thẳng $AA' \equiv AD, BB' \equiv BE, CC' \equiv CF$ đồng quy.

Lưu ý rằng, phản đảo của định lý Brianchon cũng đúng. Thật vậy, gọi $O = BB' \cap CC'$. Xét

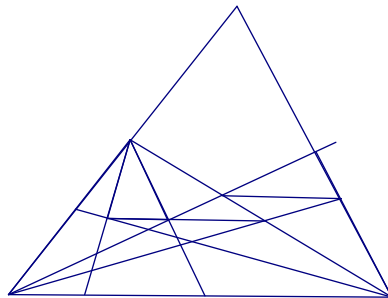
các tam giác RBB', QCC' . Vì các đường thẳng $RQ, BC, B'C'$ cắt nhau tại P , và $A = RB \cap QC$, $O = BB' \cap CC'$, $A' = BR' \cap C'Q$, sử dụng định lý Desargues (phần thuận), ta có A, O, A' thẳng hàng. Do đó, các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

3. Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. Trong tam giác ABC , M là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường phân giác trong của góc $\angle BCA$. N, L lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ các đỉnh A, C xuống đường phân giác trong của góc $\angle ABC$. Gọi F là giao điểm của các đường thẳng MN và AC , E là giao điểm của các đường thẳng BF và CL , D là giao điểm của các đường thẳng BL và AC .

Chứng minh rằng DE và MN song song với nhau.

Lời giải.



Kéo dài AM cắt BC tại G , kéo dài AN cắt BC tại I . Khi đó $AM = MG, AN = NI$, suy ra MN và BC song song với nhau. Vì $AM = MG$ nên ta có $AF = FC$. Kéo dài CL cắt AB tại J . Khi đó $JL = LC$, suy ra LF và AB song song với nhau.

Gọi $H = LF \cap BC$. Ta có $BH = HC$. Trong tam giác BLC , các đoạn thẳng BE, LH, CD cắt nhau tại F . Sử dụng định lý Ceva, ta nhận được

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{LD}{DC} = 1.$$

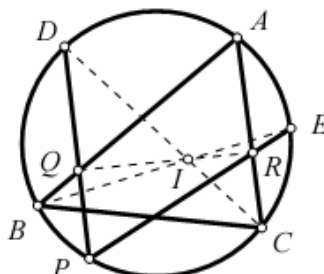
Vì $BH = HC$ nên $\frac{BF}{FC} = \frac{DB}{DC}$. Từ đó suy ra DE và BC song song với nhau. Do đó, DE và MN song song với nhau.

Bài toán 2. (Macedonia 2001) Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn. Gọi D là giao điểm của tiếp tuyến tại A với đường thẳng BC , E là giao điểm của tiếp tuyến tại B với đường thẳng CA , F là giao điểm của tiếp tuyến tại C với đường thẳng AB . Chứng minh rằng các điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải. Áp dụng định lý Pascal cho các điểm A, A, B, B, C, C cùng nằm trên đường tròn, dễ thấy được các điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn. D, E lần lượt là các điểm giữa của các cung AB, AC . Gọi P là một điểm thuộc cung BC , $Q = DP \cap BA, R = PE \cap AC$. Chứng minh rằng đường thẳng QR chứa tâm I đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

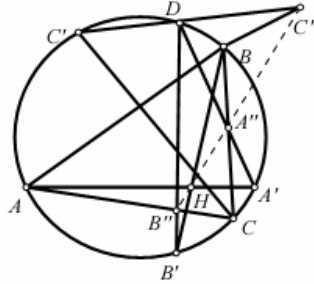
Lời giải.



Vì D là điểm giữa của cung AB nên đường thẳng CD chia đôi góc $\angle ACB$. Tương tự, đường thẳng EB chia đôi góc $\angle ABC$. Do đó $I = CD \cap EB$. Áp dụng định lý Pascal cho các điểm C, D, P, E, B, A , ta nhận được các điểm I, Q, R thẳng hàng.

Bài toán 4. (Australia 2001) Cho A, B, C, A', B', C' là các điểm nằm trên một đường tròn sao cho AA' vuông góc BC , BB' vuông góc CA , CC' vuông góc AB . Một điểm D nằm trên đường tròn. Gọi $DA' \cap BC = A'', DB' \cap CA = B'', DC' \cap AB = C''$. Chứng minh rằng A'', B'', C'' và trực tâm của tam giác ABC thẳng hàng.

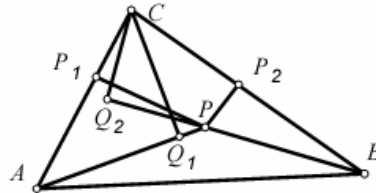
Lời giải.



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Áp dụng định lý Pascal cho các điểm A, A', D, C', C, B , ta suy ra H, A'', C'' thẳng hàng. Tương tự, áp dụng định lý Pascal cho các điểm B', D, C', C, A, B , ta cũng nhận được B'', C'', H thẳng hàng. Từ đó suy ra A'', B'', C'', H thẳng hàng.

Bài toán 5. (IMO 1991 unused) Cho tam giác ABC và P là một điểm trong tam giác. Gọi P_1, P_2 lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các cạnh AC, BC . Nối AP, BP ; từ C kẻ các đường vuông góc xuống AP, BP . Gọi Q_1, Q_2 là chân các đường vuông góc này. Giả sử rằng $Q_2 \neq P_1, Q_1 \neq P_2$. Chứng minh rằng các đường thẳng P_1Q_2, Q_1P_2, AB đồng quy. (kí hiệu $\neq$ chỉ các đường thẳng không trùng nhau)

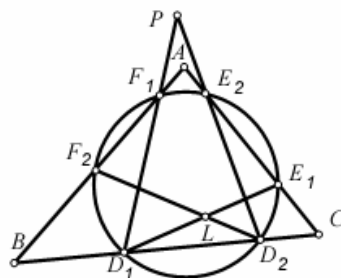
Lời giải.



Vì $\angle CPP_1, \angle CP_2P, \angle CQ_2P, \angle CQ_1P$ đều là các góc vuông nên các điểm C, Q_1, P_1, P, P_2, Q_2 cùng nằm trên một đường tròn có đường kính là CP . Chú ý rằng $A = CP_1 \cap PQ_1, B = Q_2P \cap P_2C$. Áp dụng định lý Pascal cho các điểm C, P_1, Q_2, P, Q_1, P_2 ta nhận được $X = P_1Q_2 \cap Q_1P_2$ thuộc đường thẳng AB .

Bài toán 6. (China 2005) Một đường tròn cắt ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tại các điểm $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$. Các đoạn D_1E_1, D_2F_2 cắt nhau tại L , các đoạn E_1F_1, E_2D_2 cắt nhau tại M , các đoạn F_1D_1, F_2E_2 cắt nhau tại N . Chứng minh rằng các đường thẳng AL, BM, CN đồng quy.

Lời giải.



Gọi $P = D_1F_1 \cap D_2E_2, Q = E_1D_1 \cap E_2F_2, R = F_1E_1 \cap F_2D_2$.

- Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $E_2, E_1, D_1, F_1, F_2, D_2$, ta nhận được A, L, P thẳng hàng.
- Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $F_2, F_1, E_1, D_1, D_2, E_2$, ta nhận được B, M, Q thẳng hàng.
- Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $D_2, D_1, F_1, E_1, E_2, F_2$, ta nhận được C, N, R thẳng hàng.

Gọi $X = E_2E_1 \cap D_1F_2 = CA \cap D_1F_2, Y = F_2F_1 \cap E_1D_2 = AB \cap E_1D_2, Z = D_2D_1 \cap F_1E_2 = BC \cap F_1E_2$.

- Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $D_1, F_1, E_1, E_2, D_2, F_2$, ta nhận được P, R, X thẳng hàng.
- Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $E_1, D_1, F_1, F_2, E_2, D_2$, ta nhận được Q, P, Y thẳng hàng.
- Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $F_1, E_1, D_1, D_2, F_2, E_2$, ta nhận được R, Q, Z thẳng hàng.

Xét hai tam giác ABC, PQR , ta có $X = CA \cap RP, Y = AB \cap PQ, Z = BC \cap QR$. Áp dụng định lý Desargues (phần đảo), ta có $AP \equiv AL, BQ \equiv BM, CR \equiv CN$ là các đường thẳng đồng quy.

4. Một số bài toán tự luyện

Bài 1. Cho tam giác ABC . Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AC , D là chân đường vuông góc hạ từ E xuống BC , F là trung điểm của AB . Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi $\angle ABC = 90^\circ$

Bài 2. Cho P là một điểm nằm trong tứ giác lồi $ABCD$. Các đường phân giác trong của các góc $\angle APB, \angle BPC, \angle CPD, \angle DPA$ lần lượt cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA tại các điểm K, L, M, N . Chứng minh rằng nếu $KLMN$ là hình bình hành thì $PB = PD, PA = PC$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại C . Về phía ngoài của tam giác ABC , ta lần lượt dựng các hình vuông $ACMQ, BCNP$. Chứng minh rằng các đường thẳng AP, BQ đồng quy với đường cao CH của tam giác ABC .

Bài 4. Cho M là một điểm nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác ABC , và R là một điểm bất kỳ. Các đường thẳng AR, BR, CR lần lượt cắt đường tròn nội tiếp tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng giao điểm của các cặp đường thẳng $MA_1, BC; MB_1, CA; MC_1, AB$ thẳng hàng và đường thẳng này cũng chứa điểm R .

Bài 5. Các điểm $A_1, \dots, A_6$ cùng nằm trên một đường tròn; các điểm L, M, N lần lượt thuộc các đường thẳng A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 sao cho $KL \parallel A_2A_3, LM \parallel A_3A_4, MN \parallel A_4A_5$. Chứng minh rằng $NK \parallel A_5A_6$.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Kiran S. Kadlavya, “Geometry unbound”, 2006
- [2]. Kin Y. LI, “Famous Geometry Theorems”, Mathematical Excalibur, Vol.10, No.3, 2005
- [3]. Nguyễn Văn Ban, Hoàng Chúng “Hình Học Của Tam Giác”, NXB Giáo Dục, 1996
- [4]. Paul Yiu, “Euclidean Geometry”, 1998
- [5]. Viktor Prasolov, “Problems in Plane and Solid Geometry”, 2001

Người dịch: Cao Minh Quang

GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long, Việt Nam

E-mail: kt13quang@yahoo.com