ĐỊNH LÝ STEINER CHO TỨ GIÁC TOÀN PHẦN

Định lý 1:

Cho tứ giác BCEF với các cạnh bên cắt nhau tại A, D (tứ giác toàn phần). Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF, BFD, CDE đồng quy tại một điểm M gọi là điểm Miquel của tứ giác.

Chứng minh:

Giả sử các các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF cắt nhau tại M. Ta chứng minh các đường tròn còn lại cũng đi qua M.

Thật vậy:

$$\left.\begin{array}{l}(MA, MC) = (BA, BC) \pmod{\pi} \\ (ME, MA) = (FE, FA) \pmod{\pi}\end{array}\right\}$$

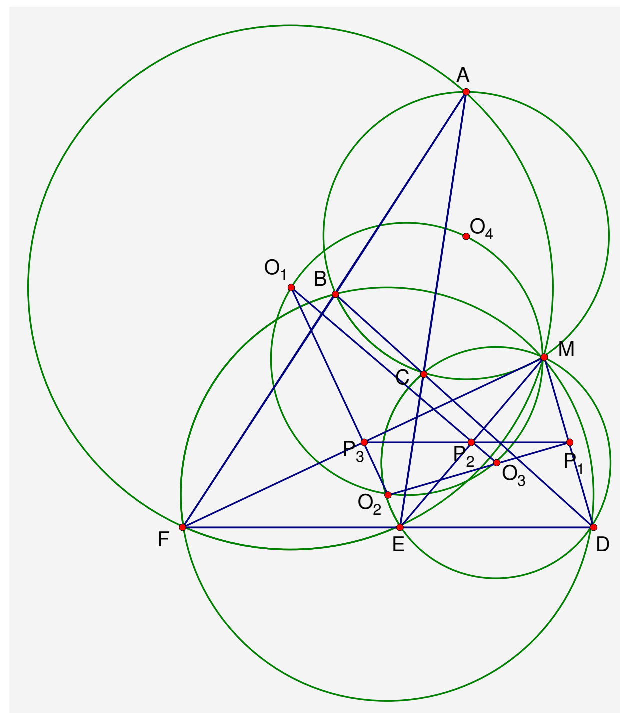
$$\Rightarrow (ME, MC) = (BA, BC) + (FE, FA) \pmod{\pi}$$

$$\Rightarrow (ME, MC) = (FA, BD) + (FD, FA) = (FD, BD)$$

$$= (DE, DC) \pmod{\pi}$$

Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cũng đi qua M.

Tương tự ta có điều cần chứng minh.



Định lý 2:

Các tâm của các đường tròn trên và điểm Miquel M cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh:

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, BFD, CDE, ABC.

Ta chứng minh O_1, O_2, O_3, M cùng nằm trên một đường tròn.

Thật vậy:

Hạ P_1, P_2, P_3 lần lượt là chân đường vuông góc từ M xuống O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2.

Khi đó rõ ràng P_1, P_2, P_3 lần lượt là trung điểm MD, ME, MF.

Do đó P_1, P_2, P_3 thẳng hàng.

Theo định lý về đường thẳng Simson (đảo) ta có: O_1, O_2, O_3, M cùng nằm trên một đường tròn.

Tương tự suy ra O_1, O_2, O_3, O_4, M cùng nằm trên một đường tròn.

Định lý 3:

Các chân đường vuông góc hạ từ M xuống các đường thẳng ABF, ACE, BCD, DEF cùng nằm trên một đường thẳng d_1.

Chứng minh:

Kết quả này khá hiển nhiên khi ta sử dụng đường thẳng Euler cho điểm M với 2 trong 4 tam giác ABC, AEF, BFD, CDE.

Định lý 4:

Các trực tâm của 4 tam giác trên cùng nằm trên một đường thẳng d_2 (đường thẳng Steiner của tứ giác).

Định lý 5:

Hai đường thẳng d_1, d_2 song song.

Chứng minh: (cả hai định lý 4,5)

Gọi $H_1, H_2, H_3, H_4; K_1, K_2, K_3, K_4$ lần lượt là trực tâm của các tam giác nói trên và chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các đường thẳng trong định lý 3.

Ta chứng minh: $H_2H_4 // K_2K_4$.

Thật vậy:

Gọi $DH_2 \cap BF = G$, giả sử $\widehat{DBF} \le 90^0$ ta có:

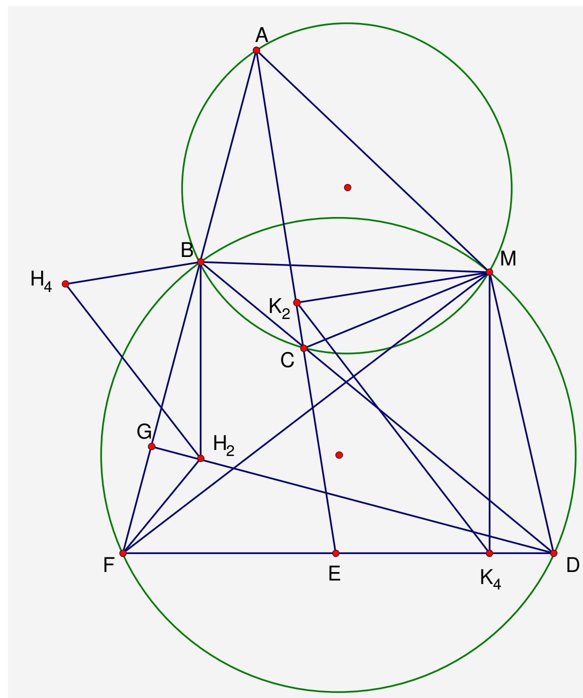
$$BH_2 = \frac{BG}{\cos \widehat{FBH_2}} = \frac{BD \cos \widehat{DBF}}{\sin \widehat{BFD}} = \frac{FD \cos \widehat{DBF}}{\sin \widehat{DBF}}$$

$$= FD \cot \widehat{DBF}$$

Tương tự với tam giác ABC ta có:

$$BH_4 = -AC \cot \widehat{ABC} = AC \cot \widehat{DBF}$$

Do đó: $\dfrac{BH_2}{BH_4} = \dfrac{FD}{AC}$



Mặt khác xét hai tam giác MDF và MCA ta có:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{DMF} = \widehat{DBF} = \widehat{CMA} \\ \widehat{FDM} = \widehat{ABM} = \widehat{ACM} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta MDF \sim \Delta MCA \Rightarrow \frac{FD}{AC} = \frac{MK_4}{MK_2}$$

Xét hai tam giác BH_2H_4, MK_4K_2 ta có:

$$\frac{BH_2}{BH_4} = \frac{MK_4}{MK_2}$$

$$\widehat{H_2BH_4} = \widehat{K_4MK_2} \ (do\ BH_4 // MK_2, BH_2 // MK_4)$$

Suy ra $BH_2H_4 \sim MK_4K_2 \Rightarrow H_2H_4 // K_4K_2 \ (do\ BH_4 // MK_2, BH_2 // MK_4)$

Tương tự suy ra H_1, H_2, H_3, H_4 thẳng hàng trên d_2 và $d_1 // d_2$.

Định lý 6:

Các trung điểm của các đoạn thẳng AD, BE, CF cùng nằm trên một đường thẳng d_3 (đường thẳng Newton hay đường thẳng Gass).

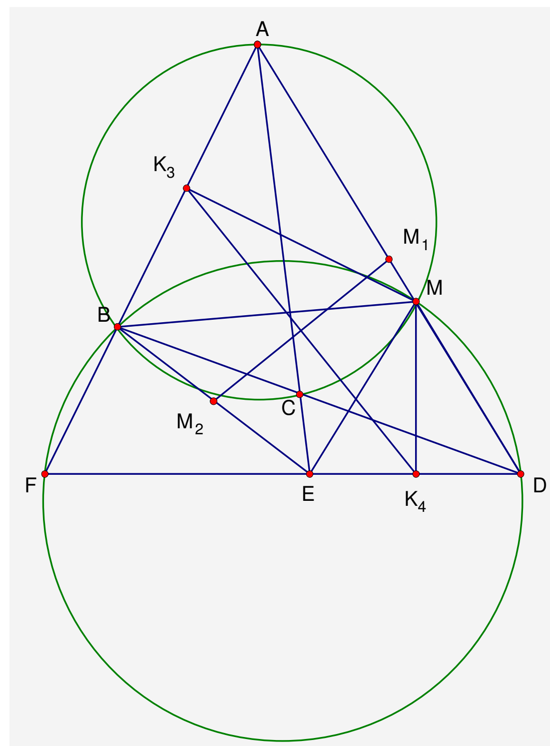
Định lý 6 là một kết quả rất nổi tiếng và có nhiều cách chứng minh khác nhau. Ở đây ta còn có một kết quả nữa xoay quanh đường thẳng này được trình bày trong định lý 7 dưới đây. Kết hợp các định lý này ta có một cách chứng minh khác khá thú vị cho cả hai.

Định lý 7:

Đường thẳng Newton vuông góc với các đường thẳng d_1, d_2.

Chứng minh: (cả hai định lý 6,7)

Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BE, CF .



Ta có:

$$2\overrightarrow{M_1M_2}.\overrightarrow{K_3K_4} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right)\left(\overrightarrow{MK_4} - \overrightarrow{MK_3}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MK_4} + \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MK_4} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MK_3} - \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MK_3}$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MK_4} - \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MK_3}$$

$$= AB.MK_4.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MK_4}\right) - DE.MK_3.\cos\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MK_3}\right)$$

$$= \left(AB.MK_4 - DE.MK_3\right).\cos\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MK_3}\right)$$

$$\left(do\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MK_4}\right) = \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MK_3}\right) : AB \perp MK_3, DE \perp MK_4\right)$$

$$= 0$$

$$\left(Do \left.\begin{matrix} \widehat{MDE} = \widehat{MBA} \\ \widehat{MED} = \widehat{MAB} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta MDE : \ \Delta MBA \Rightarrow \frac{MK_4}{DE} = \frac{MK_3}{AB}\right)$$

Do đó $M_1M_2 \perp K_3K_4$.

Tương tự ta suy ra M_1, M_2, M_3 thẳng hàng trên $d_3 \perp d_1, d_2$.

Dưới đây ta vẫn còn một số kết quả thú vị khác nữa xoay quanh tứ giác toàn phần mà bản thân tác giả bài viết này cũng chưa thực sự hoàn chỉnh được cách chứng minh tốt nhất cho chúng! Rất mong được sự giúp sức của các bạn!

Định lý 8:

16 điểm gồm các tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp các tam giác ABC, AEF, BFD, CDE tạo thành 8 bộ 4 điểm trong đó mỗi bộ 4 điểm này nằm trên một đường tròn khác nhau (1 điểm có thể nằm trên nhiều đường tròn khác nhau).

Định lý 9:

8 đường tròn kể trên chia thành hai nhóm trong đó mỗi đường tròn thuộc nhóm này đều trực giao với tất cả đường tròn ở nhóm kia. Các tâm của các đường tròn thuộc cùng một nhóm nằm trên một đường thẳng khác nhau (gọi là hai đường thẳng d_4, d_5).

<u>Định lý 10:</u>

Hai đường thẳng d_4, d_5 vuông góc với nhau tại điểm Miquel M.