

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ XVIII (2010)

Đề thi môn : Giải tích

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \ln(x+1)$.

a) Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, tồn tại duy nhất số thực c thỏa mãn điều kiện $f(x) = xf'(c)$ mà ta kí hiệu là $c(x)$.

b) Tìm $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c(x)}{x}$.

Câu 2. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n(1 + x_n^{2010}), \quad n \geq 1.$$

Tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}} \right)$$

Câu 3. Cho $a \in \mathbb{R}$ và hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện

$$f(0) \geq 0 \text{ và } f'(x) + af(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

Chứng minh rằng $f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0$.

Câu 4. Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$. Giả sử rằng

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = 6$.

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số thực sao cho $P(-1) \neq 0$ và $-\frac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \frac{n}{2}$.

Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0| \geq 1$.

Câu 6. Chọn một trong hai câu sau:

6a. Tìm tất cả các hàm số dương $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện

$$f(1) = ef(0) \text{ và}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1.$$

6b. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(1) = 2010, \quad f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.