

Tỷ số kép - Hàng điểm điều hòa – Cực và đối cực

Nhận thấy các kiến thức về tỷ số kép, hàng điểm điều hòa, cực và đối cực có ứng dụng rất lớn trong việc chứng minh một số lớp các bài toán hình học nên tôi viết bài này nhằm giới thiệu với bạn đọc một số kiến thức cơ bản về vấn đề này. Trong bài viết có một số kết quả không quá khó nên tôi không nêu chứng minh mà dành cho bạn đọc, trong quá trình chứng minh các kết quả đó các bạn sẽ hiểu thêm về kiến thức này.

Để cho thuận tiện ta sử dụng khái niệm “điểm vô cùng” và “đường thẳng vô cùng”: Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì chúng cắt nhau tại một điểm vô cùng. Khoảng cách từ một điểm vô cùng đến một điểm trên đường thẳng là ∞ , như vậy mọi đường thẳng trên cùng một mặt phẳng đều cắt nhau. Ta ký hiệu điểm vô cùng là ∞ . Thêm nữa, mọi điểm vô cùng đều nằm trên một đường thẳng, được gọi là đường thẳng vô cùng.

I. TỶ SỐ KÉP VÀ HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA:

1. Tỷ số kép: Xét bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D . Tỷ số kép của bốn điểm đó được ký hiệu là (A, C, B, D) được tính như sau:

$$(A, C, B, D) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \div \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{BC} \cdot \overline{DA}}$$

2. Hàng điểm điều hòa: A, B, C, D được gọi là hàng điểm điều hòa khi và chỉ khi $(A, C, B, D) = -1$. Và khi đó ta có các đẳng thức sau:

$$(i) \frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$$

(ii) $OC^2 = OB \cdot OD$ (Với O là trung điểm của đoạn thẳng AC)

(iii) Qua phép nghịch đảo với đường tròn nghịch đảo là đường tròn đường kính AC thì điểm B biến thành điểm D .

(iv) Đường tròn đường kính AC và đường tròn đường kính BD trực giao.

3. Một số biến đổi đối với tỷ số kép:

$$(i) (A, C, B, D) = (B, D, A, C)$$

$$(ii) (A, C, B, D) = \frac{1}{(C, A, B, D)}$$

$$(iii) (A, C, B, D) = 1 - (A, B, C, D)$$

4. Chùm điều hòa:

Ta ký hiệu $X(A, C, B, D)$ là chùm đường thẳng (XA, XC, XB, XD) .

4.1. Bốn đường thẳng a, b, c, d đồng quy. Tỷ số kép của bốn đường thẳng đó là:

$$(a, c, b, d) = \frac{\sin(a, b) \sin(c, d)}{\sin(b, c) \sin(d, a)}$$

4.2. a, b, c, d được gọi là chùm điều hòa khi và chỉ khi $(a, c, b, d) = -1$

4.3. Đường thẳng l cắt các đường thẳng a, b, c, d lần lượt tại A, B, C, D thì:

$$(a, c, b, d) = (A, C, B, D)$$

5. Tương ứng xạ ảnh và tương ứng phối cảnh:

5.1. Tương ứng xạ ảnh: Nếu hai hàng điểm A, B, C, D và A', B', C', D' có cùng tỷ số kép thì chúng được gọi là tương ứng xạ ảnh, ký hiệu $(A, C, B, D) \overline{\wedge} (A', C', B', D')$.

5.2. Tương ứng phối cảnh: Nếu hai hàng điểm A, B, C, D và A', B', C', D' thỏa mãn các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy thì chúng được gọi là tương ứng phối cảnh, ký hiệu $(A, C, B, D) \bar{\wedge} (A', C', B', D')$.

Áp dụng 4.3 thì ta thấy ngay nếu có $(A, C, B, D) \bar{\wedge} (A', C', B', D')$ thì $(A, C, B, D) \bar{\vee} (A', C', B', D')$.

6. Một số định lý:

6.1. Định lý 1: Nếu $(A, C, B, D) = (A', C', B', D')$ và $A \equiv A'$ thì các đường thẳng BB', CC' và DD' đồng quy.

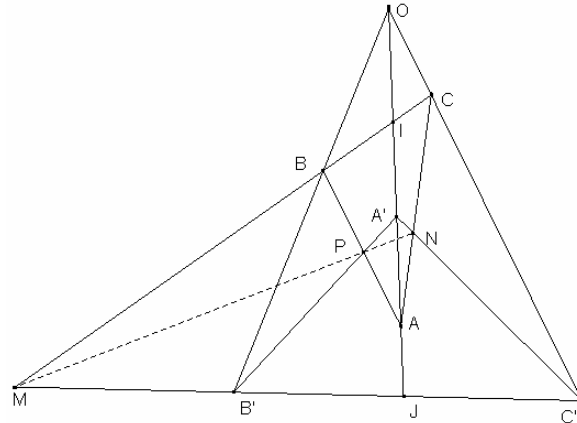
6.2. Định lý 2: Nếu $(a, c, b, d) = (a', c', b', d')$ và $a \equiv a'$ thì giao điểm của các cặp đường thẳng sau thẳng hàng $(b, b'), (c, c')$ và (d, d') .

6.3. Định lý 3: Nếu $X(A, C, B, D) = -1$ và B là trung điểm của AC khi và chỉ khi $XD \parallel AC$.

6.4. Định lý 4: Nếu $X(A, C, B, D) = -1$ và XB là phân giác của AXC khi và chỉ khi $XB \perp XD$.

6.3. Định lý 5 (Định lý Desargne): Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thỏa mãn AA', BB' và CC' đồng quy. M, N, P theo thứ tự là giao điểm của các cặp đoạn thẳng $(BC, B'C'), (CA, C'A')$ và $(AB, A'B')$ thì ba điểm đó thẳng hàng.

Chứng minh:



Gọi giao điểm của các đường thẳng AA', BB' và CC' là O . Đường thẳng AA' cắt hai đường thẳng BC và $B'C'$ lần lượt tại I và J . Ta có:

$$A(A', M, N, P) \bar{\wedge} A(I, M, C, B) \bar{\wedge} O(I, M, C, B) \bar{\wedge} (J, M, C', B') \bar{\wedge} A'(J, M, C', B') \bar{\wedge} A'(A, M, N, P)$$

Vậy ta được $A(A', M, N, P) = A'(A, M, N, P)$, áp dụng định lý 2 suy ra M, N và P thẳng hàng.

Chú ý:

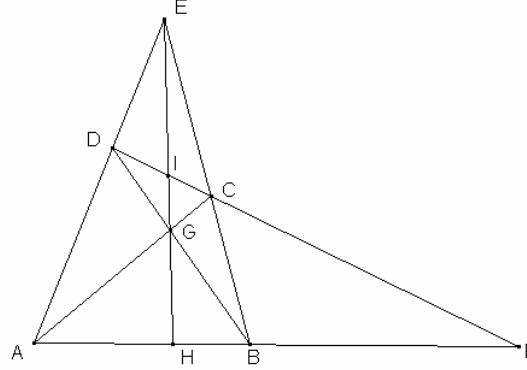
(i) Định lý đảo của định lý trên cũng đúng.

(ii) Hệ quả của bài toán này ta có bài toán quen thuộc sau: Cho tam giác ABC có ba đường cevian AA', BB' và CC' đồng quy, thì giao điểm của các cặp đường thẳng $(BC, B'C'), (CA, C'A')$ và $(AB, A'B')$ đồng quy.

6.4. Định lý 6 (Định lý cơ bản của hình học xạ ảnh): A, B, C và D là bốn điểm phân biệt trên mặt phẳng. G, E và F lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng

(AC, BD) , (AD, CB) và (AB, DC) . H và I lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (EG, AB) và (EG, CD) . Chứng minh rằng A, H, B, F và D, I, C, F là các hàng điểm điều hòa.

Chứng minh:



Ta có $(A, B, H, F) \stackrel{=}{\wedge} G(A, B, H, F) \stackrel{=}{\wedge} (C, D, I, F) \stackrel{=}{\wedge} E(C, D, I, F) \stackrel{=}{\wedge} (B, A, H, F)$

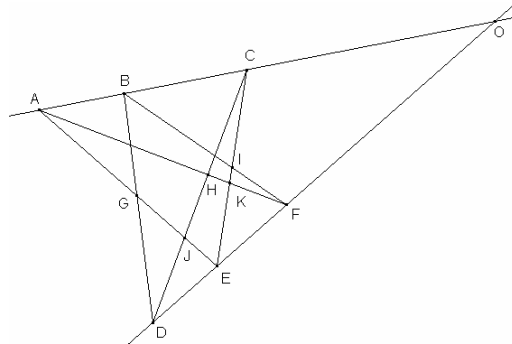
Mặt khác ta có $(A, B, H, F) = (B, A, H, F) = \frac{1}{(A, B, H, F)}$ nên $(A, B, H, F)^2 = 1$, chú ý

rằng $(A, B, H, F) \neq 1$ nên $(A, B, H, F) = -1$ hay A, H, B, F là hàng điểm điều hòa từ đó dễ dàng suy ra tiếp D, I, C, F cũng là hàng điểm điều hòa.

Chú ý: Trong bài toán trên nếu $CD \parallel AB$ thì $F = \infty$ suy ra H và I lần lượt là trung điểm của AB và CD .

6.5. Định lý 7 (Định lý Pappus): Hai đường thẳng l và m cắt nhau tại O . A, B, C là các điểm phân biệt thuộc l và D, E, F là các điểm phân biệt thuộc m . G, H, K lần lượt là giao điểm của các cặp đoạn thẳng (AE, BD) , (AF, CD) và (BF, CE) . Chứng minh rằng ba điểm đó thẳng hàng.

Chứng minh:



J và K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (AE, CD) và (AF, CE) . Ta có:

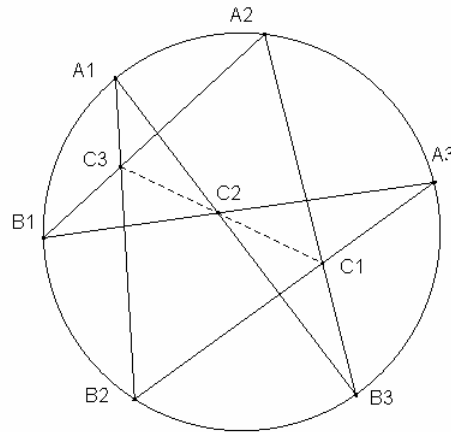
$(A, G, J, E) \stackrel{=}{\wedge} D(A, G, J, E) \stackrel{=}{\wedge} (A, B, C, O) \stackrel{=}{\wedge} F(A, B, C, O) \stackrel{=}{\wedge} (K, I, C, E)$. Áp dụng Định lý 1 suy ra AK, GI và JC đồng quy hay G, H, I thẳng hàng (đpcm).

6.6. Định lý 8: Cho đường tròn (O) và bốn điểm A, B, C, D cho trước trên đường tròn, X là một điểm thuộc đường tròn. Khi đó tỷ số kép $X(A, C, B, D)$ không phụ thuộc vào vị trí của X . Hay nói cách khác với mọi $X, Y \in (O)$ thì

$$X(A, C, B, D) = Y(A, C, B, D)$$

Chú ý: TT ký hiệu tiếp tuyến tại T của đường tròn (O) .

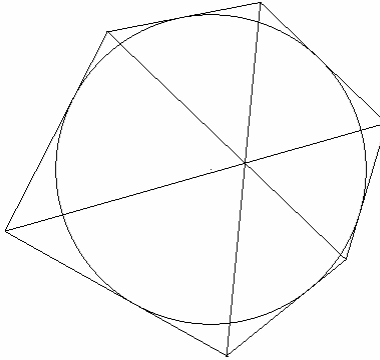
6.7. Định lý 9 (Định lý Pascal): Cho sáu điểm trên đường tròn $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. C_1, C_2, C_3 là giao điểm của các cặp đường thẳng (A_2A_3, B_2B_3) , (A_3A_1, B_3B_1) và (A_1A_2, B_1B_2) . Thì ba điểm đó thẳng hàng.



Hướng dẫn: Sử dụng Định lý 6 với ý tưởng chứng minh giống như chứng minh Định lý Pappus

6.8. Định lý 10 (Định lý Brianchon): Lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ngoại tiếp một đường tròn, thì A_1A_4, A_2A_5 và A_3A_6 đồng quy.

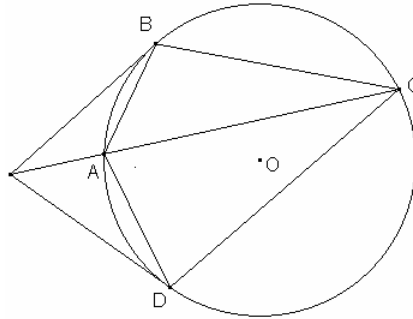
Chú ý: Đây là định lý đối ngẫu của Định lý Pascal.



Từ Định lý này ta có một số kết quả khi đặc biệt hóa cho một số điểm A_i nào đó trùng nhau.

6.9. Định lý 11 (Về tứ giác điều hòa): Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) được gọi là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- (a) Tồn tại một điểm X thuộc (O) thỏa mãn $X(A, C, B, D) = -1$.
- (b) Tiếp tuyến tại hai đỉnh đối diện đồng quy với đường chéo còn lại.
- (c) $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.
- (d) AC là đường đối trung của tam giác ABD .



II. CỰC VÀ ĐỐI CỰC:

1. Đường tròn trực giao: Hai đường tròn (O) và (O') được gọi là trực giao nếu hai tiếp tại một trong hai điểm chung vuông góc với nhau. Ta ký hiệu $(O) \perp (O')$.

Tính chất 1: $(O) \perp (O')$ khi và chỉ khi $P_{O/(O')} = R^2$ (R là bán kính của (O)).

Tính chất 2: $(O) \perp (O')$ khi và chỉ khi tồn tại một đường kính của một trong hai đường tròn bị hai đường tròn chia đều hòa (tức là giao điểm của hai đường tròn với đường thẳng chứa đường kính đó là hàng điểm đều hòa).

Chú ý: Nếu tồn tại một đường kính chia đều hòa thì mọi đường kính đều chia đều hòa.

2. Đường đối cực của một điểm đối với hai đường thẳng:

2.1. Hai điểm liên hợp với hai đường thẳng: Hai điểm M và N gọi là liên hợp với hai đường thẳng a và b khi và chỉ khi $(M, N, A, B) = -1$, ở đây A và B là giao điểm của đường thẳng MN với hai đường thẳng a và b .

2.2. Đường đối cực của một điểm với hai đường thẳng: Tập hợp tất cả các điểm N mà M, N liên hợp với a, b là một đường thẳng n gọi là đường đối cực của M với a, b . Và khi đó ta còn gọi M là cực của n với a, b .

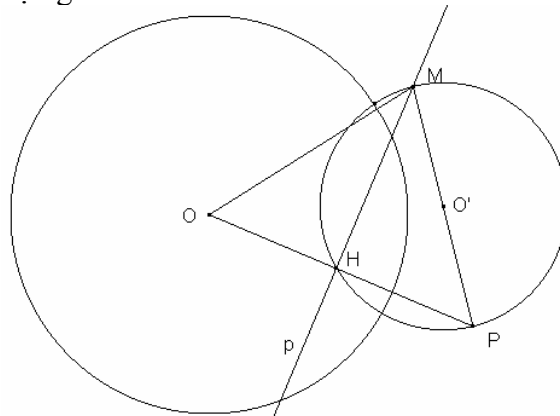
Chú ý:

(i) Tập hợp các cực của n với a, b là đường đối cực của $N \in n$ với a, b .

(ii) Mọi điểm nằm trên một đường thẳng qua giao điểm của a và b đều có chung một đối cực.

3. Hai điểm liên hợp đối với một đường tròn:

3.1. Hai điểm M và P được gọi là liên hợp với (O) nếu hai đường tròn (O) và đường tròn đường kính MP trực giao với nhau.



$$(O) \perp (O') \Leftrightarrow P_{O/(O')} = R^2 \Leftrightarrow OO'^2 - R'^2 = R^2$$

$$\left(\frac{OP^2}{2} + \frac{OM^2}{2} - \frac{MP^2}{4} \right) - R^2 = R^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = R^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OP} = R^2.$$

3.2. Cực và đường đối cực:

3.2.1. p là quỹ tích các điểm M mà M và P liên hợp với (O) gọi là đường đối cực của P với (O) . Ngược lại P gọi là cực của p với (O) . Và H gọi là chân của đường đối cực. Một cách khác ta nói P và p liên hợp với (O) .

Từ đây trở đi nếu không nói gì thì các ký hiệu chữ in và chữ thường tương ứng là cực và đường đối cực của nhau, ví dụ A là cực của a .

3.2.2. Một cát tuyến từ A cắt (O) tại C, D và cắt đường đối cực của nó với (O) tại B thì $(A, B, C, D) = -1$. Nên ta có thể định nghĩa đường đối cực theo cách khác như sau: Một cát tuyến ACD quay quanh A , trên đó lấy điểm B sao cho A, C, B, D là hàng điểm điều hòa thì quỹ tích điểm B là một đường thẳng (Nếu A nằm trong (O)) hoặc là một đoạn thẳng (nếu A nằm ngoài (O)), thì đường thẳng đó, hoặc đường thẳng chứa đoạn thẳng đó là đường đối cực của A đối với (O) .

Chú ý: Từ định nghĩa trên, ta có hai cách xác định đường đối cực của một điểm A nằm ngoài (O)

(i) *Cách 1:* Đường đối cực của A đối với (O) là đường thẳng ST với AS và AT là hai tiếp tuyến từ A tới (O) .

(ii) *Cách 2:* Kẻ hai cát tuyến AMN và APQ từ A tới (O) . MQ cắt NP tại I , MP cắt NQ tại J thì IJ là đường đối cực của A với (O) .

4. Quan hệ liên thuộc:

4.1. A, a liên hợp với (O) , B, b liên hợp với (O) thì

$$A \in b \Leftrightarrow B \in a$$

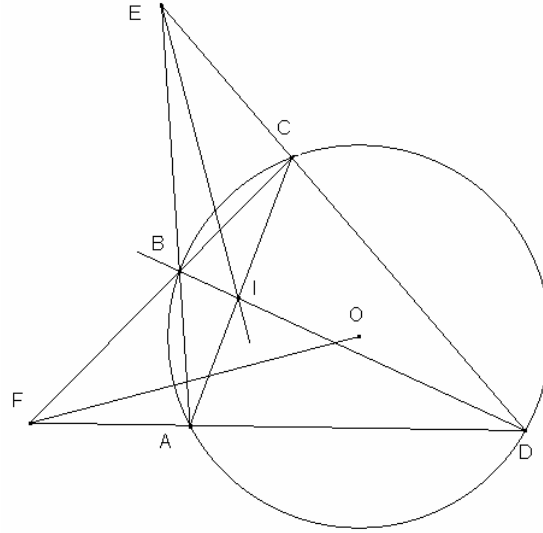
4.2. (Mở rộng của 4.1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ thẳng hàng khi và chỉ khi $a_1, a_2, \dots, a_n$ đồng quy.

5. Hai đường thẳng liên hợp với một đường tròn: a, b liên hợp với (O) khi và chỉ khi A, B liên hợp với (O) . Và khi đó dễ thấy $A \in b$ và $B \in a$.

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN:

Bài toán 1: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . E, F và I theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng (AB, CD) , (BC, AD) và (AC, BD) . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác EOF .

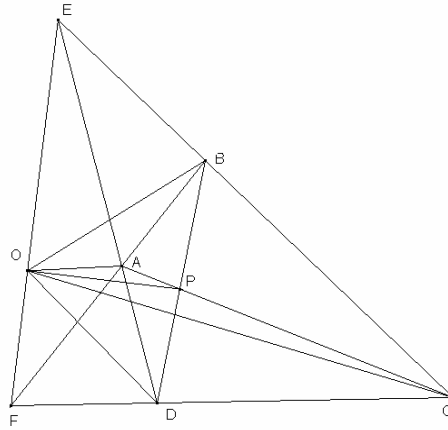
Giải:



Ta có EI là trục cực của F đối với O nên $EI \perp FO$. Tương tự ta có $FI \perp EO$ suy ra I là trực tâm của tam giác EOF (đpcm).

Bài toán 2: Cho tứ giác $ABCD$. E, F, P lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (AD, BC) , (AB, CD) và (AC, BD) . O là hình chiếu vuông góc của P lên EF . Chứng minh rằng $\angle AOD = \angle BOC$.

Giải:

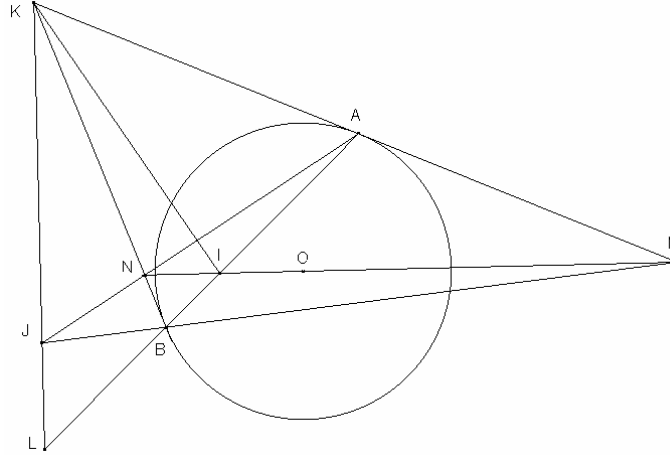


Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh OP là phân giác của các góc $\angle AOC$ và $\angle BOD$. Do vai trò của chúng là tương đương nên ta chỉ cần chứng minh OP là phân giác của góc $\angle AOC$. Ta có:

$$O(A, C, P, E) \stackrel{=}{\wedge} E(A, C, P, O) \stackrel{=}{\wedge} E(D, C, P, F)$$

Áp dụng Định lý 6 suy ra $O(A, C, P, E) = -1$, tiếp tục áp dụng Định lý 3 ta có OP là phân giác $\angle AOC$ (đpcm)

Bài toán 3: Cho đường tròn tâm O và một điểm I cố định trong (O) . Dây cung AB của (O) quay quanh I . OI cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt tại M và N . Gọi giao điểm của AN và BM là J . Tìm quỹ tích điểm J khi AB quay quanh I .



Hướng dẫn:

Gọi giao điểm của AM và BN là K , JK cắt AB tại L .

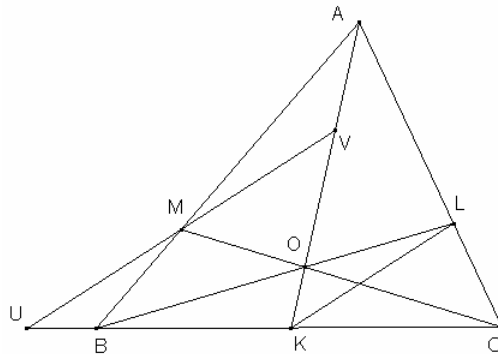
Ta có AB là đường đối cực của K đối với (O) , $I \in AB$ nên K thuộc đường đối cực của I đối với (O) (1) (Theo sự quan hệ liên thuộc giữa cực và đối cực).

Áp dụng Định lý 6 cho bốn điểm A, B, M và N suy ra $K(J, I, B, A) = -1$ suy ra $(L, B, I, A) = -1$, theo 3.2.2 thì L thuộc đường đối cực của I đối với (O) (2).

Từ (1) và (2) suy ra KL là đường đối cực của I đối với (O) , vậy J luôn thuộc một đường thẳng cố định, đường đối cực của I đối với (O) .

Tiếp theo để tìm quỹ tích của điểm J , ta cần giới hạn lại “khoảng” mà J di chuyển trên đường thẳng cố định đó. Phần này không khó, bạn đọc có thể tự làm, với chú ý rằng J chuyển động tới “biên” của quỹ tích (mà bạn đọc có thể dự đoán ngay là đoạn thẳng, thì biên là hai đầu mút của đoạn thẳng đó) khi một trong hai tiếp tuyến tại A hoặc tại B song song với đường thẳng OI .

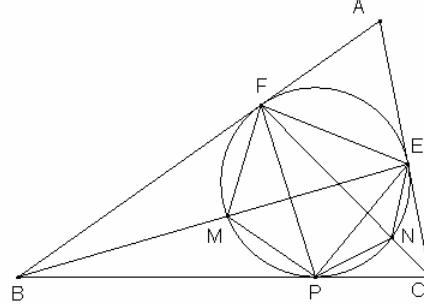
Bài toán 4: O là một điểm nằm trong tam giác ABC . Các đường thẳng qua A, B và C tới O cắt các cạnh đối diện tại K, L và M , theo thứ tự. Đường thẳng qua M song song với KL cắt các đường thẳng BC và AK lần lượt tại U và V . Chứng minh rằng $MU = MV$. (India Regional Mathematical Olympiad 2003)



Hướng dẫn: Chứng minh $K(U, V, M, L) = -1$ rồi áp dụng Định lý 3.

Bài toán 5: Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh CA và AB lần lượt tại E và F . Các đường thẳng BE và CF cắt đường tròn nội tiếp lần nữa tại M và N , theo thứ tự. Tính $\frac{ME.NF}{MF.NE}$.

Giải:



Gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh BC là P . Ta có $MFEP$ là tứ giác điều hòa nên $MF.EP = MP.EF$ (1)

Áp dụng định lý Ptoleme cho tứ giác $MFEP$ ta có

$$ME.FP = MF.PE + MP.EF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $ME.FP = 2MF.PE \Rightarrow \frac{ME}{MF} = 2 \frac{PE}{PF}$ (3)

Lập luận tương tự đối với tứ giác $NEFP$ ta được $\frac{NF}{NE} = 2 \frac{PF}{PE}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{ME.NF}{MF.NE} = 4$.

Bài toán 6: Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại D . H là hình chiếu vuông góc của A lên BC , K là trung điểm đoạn AH . Đường thẳng DK một lần nữa cắt đường tròn nội tiếp tại L . Chứng minh rằng $\angle BLD = \angle CLD$.

Giải: