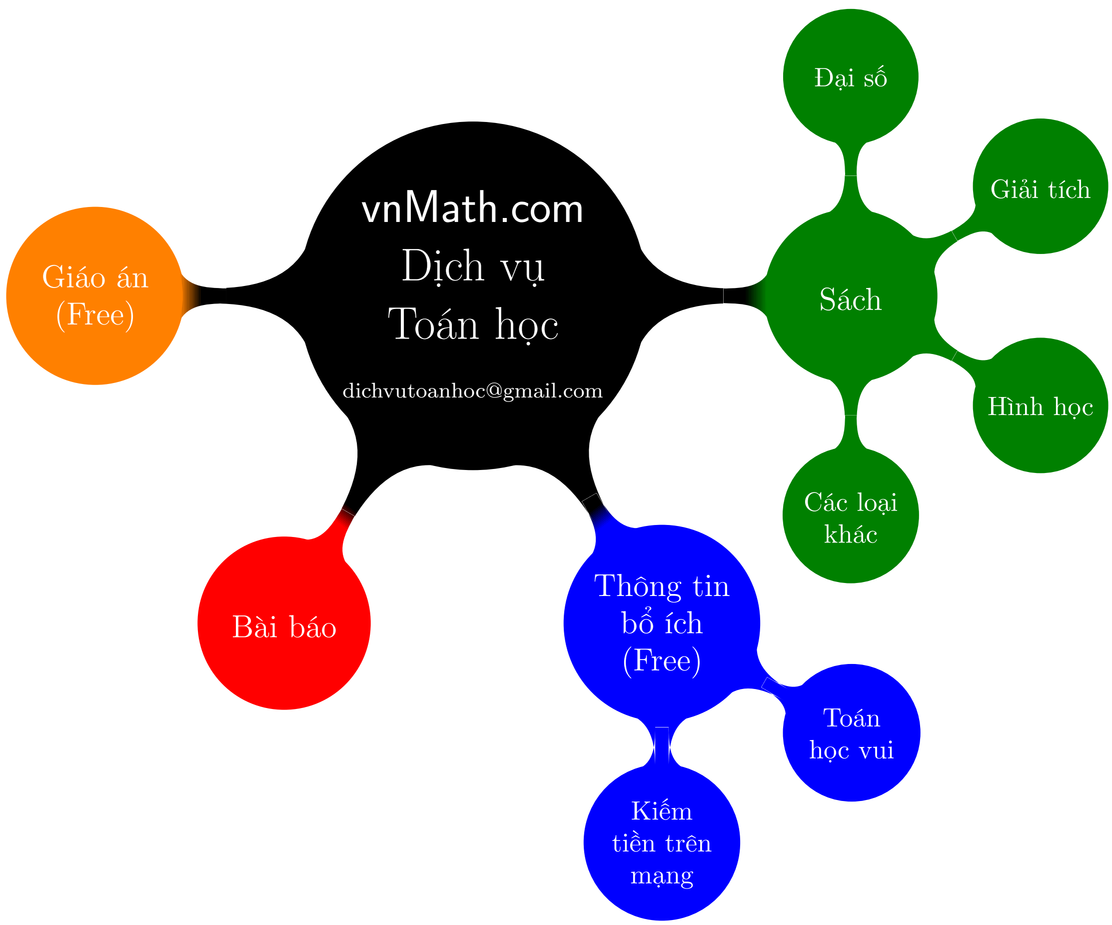
DongPhD Problems Book *Series*

Một Số Chuyên Đề Về Bất Đẳng Thức

Tổng hợp các Chuyên đề về Bất đẳng thức được chia sẻ trên mạng



Bản điện tử chính thức có tại
http://www.vnmath.com
http://book.vnmath.com

Contributors

Bùi Việt Anh
Võ Quốc Bá Cẩn
Nguyễn Anh Cường
Phạm Kim Hùng
Phan Thành Nam
Võ Thành Văn
Phan Thành Việt

Editors
DongPhD

Ghi chú

Sách gồm nhiều phương pháp chứng minh bất đẳng thức hay, chẳng hạn ABC, GLA, SOS, pqr, Mixing variables, etc.

Các chuyên đề này được tổng hợp từ các trang web sau: *diendantoanhoc.net, mathvn.com, mathvn.org, vnmath.com*.

PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN

Phan Thành Việt

Nội dung:

1. Giới thiệu.

Các bạn thân mến, rất nhiều trong số các BĐT mà ta đã gặp có dấu đẳng thức khi các biến số bằng nhau. Một ví dụ kinh điển là

Ví dụ 1: (BĐT Cauchy) Cho $x, y, z > 0$ thì $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$.

Có thể nói số lượng BĐT như vậy nhiều đến nỗi nhiều bạn sẽ thấy điều đó là ... hiển nhiên. Tất nhiên, không hẳn như vậy. Tuy nhiên, trong trường hợp đẳng thức không xảy ra khi tất cả các biến bằng nhau thì ta lại rất thường rơi vào một trường hợp khác, tổng quát hơn: đó là có một số (thay vì tất cả) các biến bằng nhau. Ở đây chúng tôi dẫn ra một ví dụ sẽ được chứng minh ở phần sau.

Ví dụ 2: (VMO) Cho $x, y, z \in R$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Thì

$$2(x + y + z) - xyz \leq 10$$

Trong BĐT này thì dấu "=" xảy ra khi $x = y = 2, z = -1$ (và các hoán vị).

Có thể nhiều bạn sẽ ngạc nhiên khi biết rằng còn có những bất đẳng thức mà dấu "=" xảy ra khi các biến đều khác nhau. Ví dụ sau đây cũng sẽ được chứng minh ở phần sau.

Ví dụ 3: (Jackgarfukel) Cho a, b, c là 3 số thực không âm và có tối đa một số bằng 0. Thì ta luôn có:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Ở đây, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 3b > 0, c = 0$ (và các dạng hoán vị). Các bạn có thể tự hỏi là các giá trị chẳng hạn như $(3, 1, 0)$ có gì đặc biệt mà làm cho đẳng thức xảy ra. Một cách trực giác, ta thấy dường như điểm đặc biệt đó là do có một biến bằng 0. Vì giả thiết là các biến không âm, nên biến bằng 0 còn được gọi là biến có giá trị trên biên.

Tóm lại, trong các BĐT mà ta gặp, có các trường hợp dấu "=" xảy ra rất thường gặp: đó là trường hợp tất cả các biến bằng nhau (ta gọi là "cực trị đạt được tại tâm"), tổng quát hơn là trường hợp có một số các biến bằng nhau (ta gọi là "cực trị đạt được có tính đối xứng"), một trường hợp khác là dấu "=" xảy ra khi có một biến có giá trị trên biên (và ta gọi là "cực trị đạt được tại biên").

Phương pháp dồn biến được đặt ra để giải quyết các BĐT có dạng như trên. Ý tưởng chung là: nếu ta đưa được về trường hợp có hai biến bằng nhau, hoặc là một biến có giá trị tại biên, thì số biến sẽ giảm đi. Do đó BĐT mới đơn giản hơn BĐT ban đầu, đặc biệt nếu BĐT mới chỉ còn một biến thì bằng cách khảo sát hàm một biến số ta sẽ chứng minh BĐT khá đơn giản. Chính vì tư tưởng là giảm dần số biến nên phương pháp này được gọi là phương pháp dồn biến.

Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày các kĩ thuật chính của phương pháp thông qua các bài toán cụ thể. Đối tượng rất quan trọng mà chúng tôi muốn bạn đọc nắm bắt là các BĐT với 3 biến số. Sau đó, các mở rộng cho 4 biến sẽ được trình bày. Cuối cùng, chúng ta đến với các phương pháp dồn biến tổng quát cho n biến số, trong đó bạn đọc sẽ cùng chúng tôi đi từ những kết quả "cổ điển" tới những cải tiến nhỏ và sau đó là một kết quả hết sức tổng quát. Tinh thần xuyên suốt của chúng tôi là muốn bạn đọc cảm nhận được tính tự nhiên của vấn đề. Qua đó, các bạn sẽ lý giải được ”tại sao”, để rồi có thể tự mình bước đi trên con đường sáng tạo.

**Ghi chú:* Chúng tôi sẽ đánh dấu các bài toán theo từng mục. Vì số lượng các định lý là rất ít nên chúng tôi không đánh dấu. Chúng tôi cố gắng ghi tên tác giả và nguồn trích dẫn đối với tất cả các kết quả quan trọng, ngoại trừ những kết quả của chúng tôi.

2. BĐT 3 biến với cực trị đạt được đối xứng.

Xin phác họa lại tư tưởng của chúng ta như sau. Bài toán của chúng ta sẽ có dạng $f(x,y,z) \geq 0$ với x,y,z là các biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đấy. Điều chúng ta mong muốn là sẽ có đánh giá $f(x,y,z) \geq f(t,t,z)$ với t là một đại lượng thích hợp tùy theo mối liên hệ giữa x,y,z (ta sẽ gọi đây là kĩ thuật dồn về 2 biến bằng nhau). Sau đó chúng ta kiểm tra $f(t,t,z) \geq 0$ để hoàn tất chứng minh. Lưu ý rằng nếu các biến đã được chuẩn hóa thì bước cuối chỉ là bài toán với một biến.

Trong mục này, chúng ta sẽ chỉ xem xét các ví dụ cơ bản nhất.

Bài toán 1. (BĐT Cauchy) Cho $x,y,z > 0$, chứng minh rằng

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

Lời giải:

Vì BĐT là đồng bậc nên bằng cách chuẩn hóa ta có thể giả sử $x+y+z = 1$ (*). Viết lại bài toán dưới dạng $f(x,y,z) \geq 0$ với $f(x,y,z) = 1 - 27xyz$. Ta thấy rằng khi thay x và y bởi $t = \frac{x+y}{2}$ thì điều kiện (*) vẫn bảo toàn (tức là vẫn có $t + t + z = 1$), nên ta chỉ phải xem xét sự thay đổi của xyz.

Theo BĐT Cauchy với 2 biến (chứng minh rất đơn giản) thì $xy \leq t^2$, nên $xyz \leq t^2 z$. Vậy $f(x,y,z) \geq f(t,t,z)$.

Cuối cùng để ý là $z = 1 - 2t$ nên ta có:

$$f(t,t,z) = 1 - 27t^2 z = 1 - 27t^2(1-2t) = (1+6t)(1-3t)^2 \geq 0$$

và bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$ và $3t = 1$, nghĩa là $x = y = 1/3$, tương đương với $x = y = z$.

***Nhận xét:**

1) Có thể nhiều bạn sẽ bỡ ngỡ với cách chuẩn hóa ở trên. Chúng tôi xin nói rõ: không có gì là bí ẩn ở đây cả. Nếu thích, các bạn hoàn toàn có thể chuẩn hóa theo cách khác, chẳng hạn giả sử $xyz = 1$ *và chứng minh* $f(x, y, z) \geq 0$ *với* $f(x, y, z) = x + y + z - 3$*. Khi đó bước dồn biến sẽ là chứng minh* $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ *với* $t = \sqrt{xy}$*. Đề nghị bạn đọc tự lý giải vì sao trong lời giải trên thì ta xét* $t = \frac{x+y}{2}$ *còn ở đây lại xét* $t = \sqrt{xy}$*, và sau đó hoàn thành chứng minh theo cách này.*

2) Bạn đọc có thể thắc mắc: không cần chuẩn hóa được không? Câu trả lời là: được! Thật vậy, chúng ta vẫn hoàn toàn có thể xét bài toán $f(x, y, z) \geq 0$ *với* $f(x, y, z) = x + y + z - 3\sqrt{xyz}$*. Khi đó bước dồn biến sẽ là chứng minh* $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ *với* $t = \frac{x+y}{2}$ *hay* $t = \sqrt{xy}$ *đều được. Thực chất, điều này hoàn toàn dễ hiểu, nó chỉ là sự tương ứng giữa BĐT có điều kiện và BĐT không điều kiện (qua kĩ thuật chuẩn hóa).*

3) Chúng tôi nghĩ là các bạn sẽ đồng ý rằng: nếu một bài toán đã chuẩn hóa (tức là BĐT có điều kiện) thì nó sẽ "gợi ý" cho chúng ta cách dồn biến (phải đảm bảo điều kiện), tuy nhiên, ngược lại một bài toán chưa chuẩn hóa (BĐT không điều kiện) thì chúng ta sẽ có nhiều cách để dồn biến hơn (nói chung, ta sẽ chọn cách dồn biến sao cho bảo toàn được "nhiều" biểu thức nhất trong BĐT - điều này cũng tương đương với chuẩn hóa sao cho biểu thức có dạng đơn giản nhất). Do đó, một sự phối hợp tốt giữa kĩ thuật chuẩn hóa và dồn biến là một điều cần thiết. Tuy nhiên, khi đã quen với những điều này thì các bạn sẽ thấy không có sự khác biệt đáng kể nào giữa chúng.

Bài toán 2. (BĐT Schur) Cho $a, b, c \geq 0$, chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b).$$

Lời giải:

Xét $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(c + a) - c^2(a + b)$. Đặt $t = \frac{b+c}{2}$, ta hi vọng: $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$. Xét

$$d = f(a, b, c) - f(a, t, t) = \left[b + c - \frac{5}{4}a\right](b - c)^2$$

Ta thấy với a, b, c là các số không âm tùy ý thì không chắc có $d \geq 0$. Tuy nhiên, nếu giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ thì ta vẫn có $d \geq 0$. Khi đó ta chỉ còn phải chứng minh $f(a,t,t) \geq 0$. Nhưng BĐT này tương đương với $a(a-t)^2 \geq 0$ nên hiển nhiên đúng. Bài toán chứng minh xong.

*__Nhận xét:__ *Việc giả sử $a = min\{a,b,c\}$ là một thủ thuật rất thường được áp dụng để dồn biến. Nhắc lại là nếu BĐT 3 biến đối xứng thì ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$ (hoặc $a \geq b \geq c$), còn trong trường hợp BĐT 3 biến hoán vị vòng quanh thì ta có thể giả sử $a = min\{a,b,c\}$ (hoặc $a = max\{a,b,c\}$).*

Bài toán 3. Cho a, b, c là 3 số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{6}{a+b+c} \geq 5.$$

Hướng dẫn:

Nếu như 2 bài toán ban đầu là những bài toán quen thuộc, thì đây là một bài toán khó. Với kinh nghiệm thu được từ bài toán 1, chúng ta có thể nghĩ ngay tới việc dồn biến theo trung bình nhân để khai thác giả thiết tích ba số bằng 1. Một lời giải theo hướng đó đã được bạn Yptsoi (Đài Loan) đưa lên trên diễn đàn Mathlinks, mà sau đây chúng tôi xin dẫn lại một cách vắn tắt.

Ta chứng minh được $f(a,b,c) \geq f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})$ nếu giả sử $a \geq b \geq c$. Tiếp theo, ta chứng minh rằng $f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) \geq 5$, hay là

$$f\left(\frac{1}{x^2}, x, x\right) \geq 5, \text{ với } x = \sqrt{bc}$$

BĐT này tương đương với $(x-1)^2(2x^4 + 4x^3 - 4x^2 - x + 2) \geq 0$. Vì biểu thức trong ngoặc thứ hai dương với $x > 0$ nên chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Qua các ví dụ trên, chúng ta đã thấy cách dồn biến về trung bình cộng và trung bình nhân thật là hữu dụng. Tuy nhiên, các cách dồn biến là vô cùng phong phú và uyển chuyển. Ví dụ sau đây minh họa cho điều đó.

Bài toán 4.(Iran 1996) Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì:

$$(ab+bc+ca)\Big(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\Big) \geq \frac{9}{4}.$$

Hướng dẫn:

Đây là một bài toán rất khó. Các bạn có thể thấy điều đó qua sự kiện là dấu "=" đạt được ngoài $a = b = c$ còn có $a = b$, $c \to 0$.

Các bạn nên thử để thấy 2 cách dồn biến thông thường là trung bình cộng và trung bình nhân đều dẫn đến những BĐT vô cùng phức tạp. Lời giải sau đây lấy từ ý của thầy Trần Nam Dũng, mà nếu nhìn kĩ bạn sẽ thấy được mối tương quan, không chỉ trong tính toán mà trong cả tư duy, của các kĩ thuật chuẩn hóa và dồn biến, mà chúng tôi đã đề cập trong nhận xét 3) của bài toán 1.

Vì BĐT là đồng bậc nên ta có thể giả sử $ab + bc + ca = 1$ (*). Bây giờ ta hi vọng có đánh giá $f(a, b, c) \geq \frac{9}{4}$ với $f(a, b, c)$ là biểu thức thứ hai của vế trái BĐT cần chứng minh. Ở đây t phải thỏa mỗi liên hệ ở (*), nghĩa là $t^2 + 2tc = 1$.

Bằng cách giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ ta sẽ chứng minh được $f(a, b, c) \geq f(t, t, c)$. Cuối cùng, ta kiểm tra $f(t, t, c) \geq \frac{9}{4}$. Ở đây bạn đọc có thể thay $c = \frac{1-t^2}{2t}$ vào BĐT để thấy:

$$f(t, t, c) = \frac{(1 - t^2)(1 - 3t^2)^2}{4t^2(1 + t^2)} \geq 0$$

Bài toán chứng minh xong!

*__Nhận xét:__ *Ở bước cuối, các bạn cũng có thể không chuẩn hóa nữa mà quay lại BĐT đồng bậc:*

$$(t^2 + 2tc)\left(\frac{2}{(t + c)^2} + \frac{1}{4t^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$
$$\Leftrightarrow (t^2 + 2tc)(8t^2 + (t + c)^2) - 9(t + c)^2t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2tc(t - c)^2 \geq 0$$

Cuối cùng chúng ta đến với một ví dụ mà cực trị không đạt tại tâm, mặc dù BĐT là đối xứng. Các bạn sẽ thấy rằng, trong con đường của chúng ta phần quan trọng nhất là dồn về hai biến bằng nhau, còn sau đó thì cực trị đạt tại tâm hay không không phải là điều mấu chốt.

Bài toán 5. (VMO) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Chứng minh rằng: $2(x + y + z) - xyz \leq 10$.

Lời giải.

Đặt $f(x, y, z) = 2(x + y + z) - xyz$. Chúng ta hi vọng sẽ có $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$, trong đó $t^2 = (y^2 + z^2)/2$ (*) (chúng tôi nghĩ rằng bây giờ bạn đọc đã tự lý giải được điều này). Lưu ý là trong (*) t có thể nhận 2 giá trị, để định ý ta hãy xét khi $t \geq 0$.

Ta có: $d = f(x,y,z) - f(x,t,t) = 2(y+z-2t) - x(yz-t^2)$. Ta thấy ngay $y+z-2t \leq 0$ và $yz-t^2 \leq 0$. Do đó để có $d \leq 0$ ta chỉ cần $x \leq 0$.

Từ đó, ta giả sử $x = min\{x,y,z\}$. Xét trường hợp $x \leq 0$. Khi đó ta dồn biến như trên và chỉ còn phải chứng minh $f(x,t,t) \leq 10$. Thay $t = \sqrt{(9-x^2)/2}$ ta có:

$$g(x) = f(x,t,t) = 2x + 2\sqrt{2(9-x^2)} - x(9-x^2)/2$$

Ta có:

$$g'(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{5}{2} - \frac{4x}{\sqrt{18-2x^2}}$$

Giải ra ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm âm là $x = -1$. Hơn nữa g' liên tục và $g'(-2) > 0 > g(0)$ nên suy ra g' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm $x = -1$. Vậy $\forall x \leq 0$ thì $g(x) \leq g(-1) = 10$ và ta có điều phải chứng minh. Trường hợp này đẳng thức đạt được tại $x = -1, y = z = 2$.

Phần còn lại ta phải giải quyết trường hợp $x > 0$, tức là 3 số x, y, z đều dương. Lúc này dấu BĐT là thực sự và ta chỉ cần đánh giá đơn giản chứ không phải thông qua dồn biến. Nếu $x \geq 3/4$ thì

$$f(x,y,z) = 2(x+y+z) - xyz \leq 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} - (\frac{3}{4})^3 = 2\sqrt{27} - \frac{27}{64} < 10$$

Nếu $x \leq 3/4$ thì

$$f(x,y,z) = 2(x+y+z) - xyz \leq 2(\sqrt{2(y^2+z^2)} + 3/4) \leq= 2(\sqrt{18} + 3/4) < 10$$

Bài toán chứng minh xong!

3. Dồn biến bằng kĩ thuật hàm số.

Đây là một kĩ thuật rất quan trọng của phương pháp dồn biến. Tuy nhiên chúng tôi giới thiệu nó ngay sau phần cơ bản nhất là nhằm trang bị cho các bạn một kĩ thuật cần thiết trước khi đi qua các mục sau. Hơn nữa, chúng tôi nghĩ rằng khi đã quen với nó thì các bạn sẽ không còn phải phân biệt cực trị đạt tại tâm hay tại biên, và do đó mục tiếp theo sẽ nhẹ nhàng hơn.

Trong $2 chúng ta thấy rằng để chứng tỏ $f(x,y,z) \geq f(t,t,z)$ ta chỉ việc xét hiệu $d = f(x,y,z) - f(t,t,z)$ rồi tìm cách đánh giá sao cho $d \geq 0$. Tuy nhiên, đó là vì dạng BĐT quá đơn giản, phù hợp với các biến đổi đại số. Giả sử ta phải làm việc với biểu thức f có dạng, chẳng hạn, như: $f(x,y,z) = x^k + y^k + z^k$ với $k > 0$ thì các cách biến đổi đại số sẽ trở nên rất cồng kềnh và phức tạp.

Kĩ thuật hàm số dùng để giải quyết các trường hợp như vậy. Ý tưởng chính thế này, chẳng hạn để chứng minh $f(x,y,z) \geq f(x,t,t)$ với $t = (y+z)/2$, ta xét hàm: $g(s) = f(x, t+s, t-s)$ với $s \geq 0$. Sau đó chứng minh g tăng với $s \geq 0$ (thông thường dùng công cụ đạo hàm rất tiện lợi), suy ra $g(s) \geq g(0)$, $\forall s \geq 0$, và ta sẽ thu được điều mong muốn. Một trong những ví dụ quen thuộc với các bạn là dồn biến bằng hàm lồi, tuy nhiên dưới đây chúng ta sẽ quan sát kĩ thuật dồn biến trong bối cảnh tổng quát hơn, còn vấn đề về hàm lồi sẽ được trở lại ở một mục sau trong bài toán với n biến.

Chúng tôi nhấn mạnh rằng, đây là một kĩ thuật khó, bởi nó chứa đựng những nét rất tinh tế của phương pháp dồn biến. Những ví dụ sau đây thể hiện rất rõ vẻ đẹp và sức mạnh của phương pháp dồn biến.

Bài toán 1. Cho $k > 0$ và a, b, c là các số không âm và chỉ có tối đa 1 số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$(\frac{a}{b+c})^k + (\frac{b}{c+a})^k + (\frac{c}{a+b})^k \geq min\{2, \frac{3}{2^k}\} \qquad (*)$$

Lời giải:

Tất nhiên ta chỉ cần chứng minh BĐT khi $2 = \frac{3}{2^k} \Leftrightarrow k = \frac{ln3}{ln2} - 1$ (các bạn hãy suy nghĩ tại sao BĐT đúng cho trường hợp này lại dẫn đến BĐT đúng cho trường hợp tổng quát). Chú ý với k như trên thì đẳng thức xảy ra tại hai chỗ là $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ (và các hoán vị).

Không mất tổng quát có thể giả sử $a + b + c = 1$ và $b \geq c \geq a$. Đặt $t = \frac{b+c}{2}$ và $m = \frac{b-c}{2}$, suy ra $b = t + m, c = t - m, a = 1 - 2t$. Khi đó vế trái BĐT cần chứng minh là:

$$f(m) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + \left(\frac{t+m}{1-t-m}\right)^k + \left(\frac{t-m}{1+m-t}\right)^k$$

Vì $c \geq a$ nên $3t - 1 \geq m \geq 0$, và $1 \geq b + c = 2t$ nên $\frac{1}{2} \geq t \geq \frac{1}{3}$

Ta sẽ khảo sát $f(m)$ trên miền $m \in [0, 3t-1]$ với $t \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ là hằng số.

Ta có:

$$f'(m) = \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} - \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}}$$

$$f'(m) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} \geq \frac{(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow g(m) := [ln(t-m) - ln(t+m)] - \frac{k+1}{1-k}[ln(1-t-m) - ln(1+m-t)] \geq 0$$

Tiếp tục khảo sát g, ta có:

$$g'(m) = -\left[\frac{1}{t-m} + \frac{1}{t+m}\right] + \frac{k+1}{1-k}\left[\frac{1}{1-t-m} + \frac{1}{1+m-t}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t}{(t-m)(t+m)} + \frac{k+1}{1-k}.\frac{2(1-t)}{(1-t-m)(1+m-t)} \geq 0 \qquad (1)$$

Đánh giá $\frac{k+1}{1-k} \geq 2$, do vậy để chứng minh (1) ta cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \frac{-t}{t^2-m^2} + \frac{2(1-t)}{(1-t)^2-m^2} \geq 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow u(m) = -t + 4t^2 - 3t^3 + 3tm^2 - 2m^2 \geq 0$$

Thật vậy, vì $u'(m) < 0$ nên $u(m) \geq u(3t-1) = 2(3t-1)(2t-1)^2 \geq 0$

Vậy $g(m)$ đồng biến suy ra $g(m) \geq g(0) = 0$ suy ra $f'(m) \geq 0$ suy ra $f(m) \geq f(0)$. Nhớ là khi $m = 0$ thì $b = c = t$.

Cuối cùng, ta cần chứng minh $h(t) := f(0) \geq 2$. Viết lại:

$$h(t) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^k$$

Ta khảo sát $h(t)$ trên miền $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Ta có:

$$h'(t) = \frac{2kt^{k-1}}{(1-t)^{k+1}} - \frac{k}{2^k}.\frac{(1-2t)^{k-1}}{t^{k+1}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{k+1}t^{2k} \leq [(1-t)(1-2t)]^{k-1} \qquad (2)$$

Trong BĐT cuối, vế trái là hàm đồng biến theo t và vế phải là hàm nghịch biến theo t, và lưu ý là $t \leq \frac{1}{3}$ nên để chứng minh (2) ta cần:

$$2^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \leq [(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{3})]^{k-1}$$

Bất đẳng thức này đúng, nên $h(t)$ nghịch biến, suy ra

$$h(t) \geq h(\frac{1}{3}) = 2$$

Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

Nhận xét: *Để thấy được nét đẹp của bài toán này, chúng tôi xin dẫn ra một số trường hợp riêng của nó, bản thân chúng đã là các bài toán hay và được biết đến một cách rộng rãi.*

1) Trường hợp $k = 1$, ta thu được BĐT Netbit:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đây là một BĐT rất nổi tiếng. Một cách chứng minh "kinh điển" là:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b}$$
$$= (a+b+c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b})$$
$$\geq (a+b+c)\frac{9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{9}{2}$$

2) Trường hợp $k = \frac{1}{2}$, ta thu được BĐT sau:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Đây cũng là một bài toán rất đẹp, trước đây được biết đến như một BĐT ngược chiều với BĐT Netbit. Có một lời giải rất đơn gản, chỉ dùng BĐT Cauchy:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

3) Trường hợp $k \geq \frac{2}{3}$, ta có BĐT sau:

$$(\frac{a}{b+c})^k + (\frac{a}{b+c})^k + (\frac{a}{b+c})^k \geq \frac{3}{2^k}$$

Đây cũng là một bài toán rất đẹp đã được biết đến từ trước như là một mở rộng cho BĐT Netbit (nó cũng từng được đăng trên tạp chí THTT với tên của tác giả là Trần Tuấn Anh). Từ kết quả bài toán tổng quát, ta biết rằng $2/3$ *không phải là số tốt nhất để có giá trị nhỏ nhất là* $3/2^k$. *Tuy nhiên, nó là số tốt nhất theo nghĩa có thể áp dụng BĐT Cauchy theo cách sau đây. Để đơn giản chúng tôi trình bày với trường hợp* $k = 2/3$.

$$a+b+c = a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{a(\frac{b+c}{2})^2}$$
$$\Rightarrow (\frac{2a}{b+c})^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3a}{a+b+c}$$

Cùng với bài toán 1, bài toán sau đây cũng là một trong những ví dụ rất đẹp cho kĩ thuật hàm số.

Bài toán 2. Cho $k > 0$, $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq max\{3, (\frac{3}{2})^k\} \qquad (*)$$

Lời giải:

Không mất tổng quát có thể giả sử $b \geq c$ (còn việc cho $a = min$ hay max thì tùy theo tình huống, ta sẽ điều chỉnh một cách "hợp lí" khi cần thiết).

Đặt $t = \frac{b+c}{2}$ và $m = \frac{b-c}{2}$ suy ra $b = t + m, c = t - m$. Khi đó vế trái BĐT cần chứng minh trở thành:

$$f(m) = a^k[(t+m)^k + (t-m)^k] + (t^2 - m^2)^k$$

Ta khảo sát $f(m)$ trên miền $m \in [0, t]$. Ta có:

$$f'(m) = ka^k[(t+m)^{k-1} - (t-m)^{k-1}] - 2km(t^2 - m^2)^{k-1}$$
$$f'(m) \geq 0 \Leftrightarrow g(m) := a^k[(t-m)^{1-k} - (t+m)^{1-k}] - 2m \geq 0$$

Tất nhiên ta chỉ cần xét khi $k > 1$ (khi $k \leq 1$ thì bài toán đơn giản). Ta có:

$$g''(m) = a^k k(k-1)[(t-m)^{-k-1} - (t+m)^{-k}] > 0$$

$\Rightarrow g'(m)$ đồng biến, do đó có tối đa một nghiệm trên $(0,t)$. Vì $g(0) = 0, g(t) = +\infty$ nên chỉ có hai khả năng:

$$g(m) > 0 \text{ hoặc } g(m) = -\ 0\ +$$

Tương ứng ta có $f(m)$ đi lên hoặc $f(m)$ đi xuống rồi lại đi lên. Trong trường hợp nào thì cực đại cũng đạt ở biên do đó

$$f(m) \leq max\{f(0), f(t)\}$$

Nhắc lại là $m = 0 \Leftrightarrow b = c = t$ và $m = t \Leftrightarrow c = 0$.

Dễ thấy khi $c = 0$ thì:

$$f(t) = 2(ab)^k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$$

nên ta chỉ còn phải xét trường hợp còn lại. Đặt:

$$h(t) := f(0) = 2t^k a^k + t^{2k} = 2t^k(3-2t)^k + t^{2k}$$

Ta có:

$$h'(t) = -4k(3-2t)^{k-1}t^k + 2k(3-2t)^k b^{k-1} + 2kb^{2k-1}$$

$$h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow -2\left(\frac{3-2t}{t}\right)^{k-1} + \left(\frac{3-2t}{t}\right)^k + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) := x^k - 2x^{k-1} + 1 \geq 0 \text{ với } x = \frac{3-2t}{t}$$

Ta có: $u'(x) = [kx - 2(k-1)]x^{k-2}$. Vì $u'(x)$ có tối đa một nghiệm trên R^+ nên $u(x)$ có tối đa 2 nghiệm trong R^+, trong đó một nghiệm là $x = 1$.

Từ đó, ta sẽ giả sử $a = min\{a, b, c\}$. Khi đó ta chỉ việc xét khi $t \geq 1$ và tương ứng sẽ là $x \leq 1$. Vì $u(x)$ chỉ có tối đa 1 nghiệm trong $(0,1)$ nên $h'(t)$ chỉ có tối đa 1 nghiệm trong $(1, \frac{3}{2})$.

Lưu ý là lưu ý $h'(1) = 0, h'(\frac{3}{2}) > 0$. Do đó, chỉ có hai khả năng hoặc $h(t)$ đồng biến hoặc $h(t)$ có dạng $-0+$. Trong trường hợp nào thì $h(t)$ cũng đạt max tại hai biên, suy ra:

$$h(t) \leq max\{f(1), f(\frac{3}{2})\} = max\{3, (\frac{3}{2})^{2k}\}$$

và bài toán giải quyết xong!

Nhận xét: Ở đây chúng tôi không giả thiết $a = min\{a, b, c\}$ ngay từ đầu là muốn nhấn mạnh rằng: việc dồn về 2 biến bằng nhau luôn thực hiện được mà không cần thứ tự sắp được giữa các biến. Tận dụng điều đó, chúng ta có thể làm cách khác để né việc khảo sát bài toán 1 biến.

Thật vậy, như trong chứng minh đã chỉ ra, ta luôn có BĐT sau đây mà không cần giả thiết gì về thứ tự của a, b, c:

$$f(a,b,c) \le max\{(\frac{3}{2})^{2k}, f(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})\} \qquad (*)$$

Từ đó, với mỗi a, b, c cố định, xét dãy số sau: $(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c)$, và $\forall n \in Z^+$ thì ta định nghĩa bằng quy nạp:

$$(a_{2n-1}, b_{2n-1}, c_{2n-1}) = (a_{2n-2}, \frac{b_{2n-2} + b_{2n-2}}{2}, \frac{b_{2n-2} + b_{2n-2}}{2})$$

và:

$$(a_{2n}, b_{2n}, c_{2n}) = (\frac{a_{2n-1} + b_{2n-1}}{2}, \frac{a_{2n-1} + b_{2n-1}}{2}, c_{2n-1})$$

thì ta có ngay

$$f(a,b,c) \le max\{(\frac{3}{2})^{2k}, f(a_n, b_n, c_n)\}, \forall n \in Z^+$$

Dễ thấy các dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{b_n\}$ đều hội tụ về 1, nên chuyển qua giới hạn ta có điều phải chứng minh.

Kĩ thuật chuyển qua giới hạn như vậy cũng khá tự nhiên. Nó có thể tổng quát lên thành 2 định lý dồn biến tổng quát là SMV và UMV mà chúng tôi sẽ giới thiệu ở phần sau. Cũng sử dụng tính liên tục của hàm số nhưng với kĩ thuật khác, chúng tôi còn đạt được 1 kết quả tổng quát hơn.

Sau khi có (*), còn một cách khác để đạt được điều phải chứng minh mà chỉ cần sử dụng một số hữu hạn lần thay thế. Tuy nhiên, để khỏi trùng lắp chúng tôi sẽ giới thiệu nó trong mục BĐT 4 biến (và các mục sau), khi mà nó thực sự cần thiết.
h Còn trong trường hợp 3 biến, chúng tôi sẽ chỉ sử dụng cách tiếp cận đơn giản nhất (dồn về 1 biến rồi khảo sát), nhằm giữ được tính trong sáng của tư tưởng.

Chúng tôi hi vọng rằng, sau khi đọc kĩ hai bài toán trên, thì các bạn có thể sử dụng kĩ thuật hàm số để dồn biến theo cách bất kì, chứ không nhất thiết là dồn về trung bình cộng. Sau đây là một ví dụ cho kiểu dồn biến về trung bình nhân.

Bài toán 3: (Phạm Kim Hùng)
a) Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1 . Chứng minh rằng:
(*i*) $81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \le 8(a+b+c)^4$
(*ii*) $64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \le (a+b+c)^6$

Lời giải:
(*i*). Đặt $f(a,b,c) = 8(a+b+c)^4 - 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$. Ta có thể giả sử $a \ge b$. Xét hàm số $g(t) = f(ta, b/t, c)$ với $t \in [\sqrt{b/a}, 1]$. Ta có:

$$g'(t) = 32(a - \frac{b}{t^2})(ta + \frac{b}{t} + c)^3 - 81(a - \frac{b}{t^2})(ta + \frac{b}{t})(1+c^2)$$

Vì $t \in [\sqrt{b/a}, 1]$ nên $g'(t) \ge 0$ nếu:

$$32(d+c)^3 \ge 81d(1+c^2) \quad \text{với } d = ta + \frac{b}{t}$$

Ta có: $32(d+c)^3 > 32d(d^2+2dc+3c^2) \ge 32d(3\sqrt[3]{d^4c^2}+3c^2) > 81d(1+c^2)$ (lưu ý là $d^2c \ge 4$)

Vậy $g'(t) \ge 0$ với $t \in [\sqrt{b/a}, 1]$. Do đó: $g(1) \ge g(\sqrt{b/a})$. Vậy $f(a,b,c) \ge f(s,s,c)$ với $s = \sqrt{ab}$. Thay $s = 1/\sqrt{c}$ ta được:

$$\begin{aligned} f(s,s,c) &= f(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}, c) = 8(\frac{2}{\sqrt{c}} + c)^4 - 81(1+\frac{1}{c})^2(1+c^2) \\ &= (\frac{\sqrt{c}-1}{c})^2(8c^5 + 16c^{\frac{9}{2}} + 24c^4 + 96c^{\frac{9}{2}} + 87c^3 + 78c^{\frac{5}{2}} + \\ &\qquad +99c^2 + 120c^{\frac{3}{2}} - 21c + 94\sqrt{c} + 47) \\ &\ge 0 \qquad\qquad \text{(đpcm)} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.
(*ii*) Bằng cách làm tương tự như trên, bạn đọc có thể tự chứng minh BĐT này. Ở đây chúng tôi xin lưu ý rằng BĐT là thực sự và 64 là hằng số tốt nhất.

Điều cuối cùng mà chúng tôi muốn nói với bạn đọc, đó là từ việc nắm được phương pháp đến việc vận đụng được nó một cách thành thạo là cả một quá trình. Điều cần nhất là các bạn phải có ý chí để thực hiện vấn đề tới nơi tới chốn chứ đừng bỏ dở nửa chừng, dù phải đối mặt với những tính toán phức tạp. Rồi thành công trước mỗi bài toán sẽ khiến các bạn tự tin hơn. Chúng tôi dẫn ra đây một bài toán mà có thể lời giải của nó sẽ khiến nhiều bạn "khiếp sợ", tuy nhiên chúng tôi hi vọng các bạn sẽ bình tâm để thấy được vẻ đẹp trong sáng của nó ẩn đằng sau những kĩ thuật tính toán lão luyện.

Bài toán 4. Cho $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2}$$

Lời giải:

Lời giải sau đây của anh Phan Thành Nam.

Giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a = s + t, b = s - t$ thì vế trái BĐT cần chứng minh là:

$$f(t) := \frac{c(s-t)}{3+(s+t)^2} + \frac{c(s+t)}{3+(s-t)^2} + \frac{s^2-t^2}{3+c^2}$$

Ta khảo sát $f(t)$ trên miền $t \in [0, s-c]$. Ta có:

$$f'(t) = \frac{-c}{3+(s+t)^2} - \frac{2c(s^2-t^2)}{(3+(s+t)^2)^2} + \frac{c}{3+(s-t)^2} + \frac{2c(s^2-t^2)}{(3+(s-t)^2)^2} - \frac{2t}{3+c^2}$$
$$= \frac{4cst}{uv} + \frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} - \frac{2t}{3+c^2} < 0, \forall t \in (0, s-c) \qquad (*)$$

với $u = 3 + (s+t)^2, v = 3 + (s-t)^2$ (BĐT (*) sẽ chứng minh sau).

Vậy $\forall t \in [0, s-c]$ thì:

$$f(t) \leq f(0) = \frac{2cs}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+c^2} = \frac{2s(3-2s)}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+(3-2s)^2} =: g(s) \qquad (1)$$

Xét $g(s)$ với $s \in [1, \frac{3}{2}]$. Ta có:

$$g'(s) = \frac{24s-12s^2}{(3+(3-2s)^2)^2} + \frac{18-24s-6s^2}{(3+s^2)^2} = \frac{108(s^2-3s+4)(s-1)^2(-s^2-3s+6)}{[3+(3-2s)^2]^2[3+s^2]^2}$$

Dễ thấy $s^2 - 3s + 4 > 0$ và $-s^2 - 3s + 6 = (\frac{\sqrt{33}-3}{2} - s)(s + \frac{\sqrt{33}+3}{2})$ nên $g'(s)$ dương trên $(1, s_0)$ và âm trên $(s_0, \frac{3}{2})$ với $s_0 := \frac{\sqrt{33}-3}{2} = 1,372281323...$

Vậy $\forall s \in [1, \frac{3}{2}]$ thì:

$$g(s) \leq g(s_0) = \frac{11\sqrt{33}-45}{24} \qquad (2)$$

Trong (1) và (2), dấu "=" xảy ra đồng thời tại $t = 0$ và $s = s_0$, tức là $a = b = s_0$ và $c = 3 - 2s_0$.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $\frac{11\sqrt{33}-45}{24} = 0,757924546...$, đạt được khi $a = b = \frac{\sqrt{33}-3}{2} = 1,372281323......$, $c = 6 - \sqrt{33} = 0,255437353...$

Để kết thúc, ta chứng minh BĐT (*). Đây là 1 BĐT khá chặt. Ta sẽ chỉ ra với $t \in (0, s - c)$ thì:

$$\frac{4cs}{uv} < \frac{1}{3+c^2} \qquad (3) \text{ và } \frac{8cs(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} \le \frac{1}{3+c^2} \qquad (4)$$

là xong!

Chứng minh (3): Vì $c + 2s = 1$ và $s > 1$ nên $cs < 1$. Hơn nữa $u = 3 + (s+t)^2 > 4$, $v = 3 + (s-t)^2 > 3 + c^2$. Từ đó suy ra (3).

Chứng minh (4): Dùng BĐT Cauchy ta có:

$$u^2v^2 = [[3 + (s + t)]^2[3 + (s - t)]^2]^2 \ge 16(s^2 - t^2), \text{và}$$

$$2cs(u+v)(3+c^2) = 4cs(3+s^2+t^2)(3+c^2) \le \left(\frac{4cs+3+s^2+t^2+3+c^2}{3}\right)^3$$

Thay $c = 3 - 2s$ vào, lưu ý là $t \le s - c = 3s - 3$, ta có:

$$4cs + 3 + s^2 + t^2 + 3 + c^2 \le 4(3-2s)s + 6 + s^2 + (3s-3)^2 + (3-2s)^2$$
$$= 12 + 6(s-1)(s-2) \le 12$$

suy ra $2cs(u+v)(3+c^2) < 4^3$. Vậy:

$$\frac{8cs(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} = 4.\frac{s^2-t^2}{u^2v^2}.\frac{2cs(u+v)(3+c^2)}{3+c^2} \le 4.\frac{1}{4^4}.\frac{4^3}{3+c^2} = \frac{1}{3+c^2}$$

và bài toán giải quyết xong!

4. BĐT 3 biến với cực trị đạt được tại biên.

Nếu như trong phần trước chúng ta có thể hiểu "dồn biến" là "đẩy hai biến lại gần nhau", thì trong trường hợp này ta phải hiểu "dồn biến" nghĩa là "đẩy 1 biến ra biên". Chẳng hạn như xét BĐT $f(x, y, z) \ge 0$ với $x, y, z \ge 0$, ta có thể hi vọng vào đánh giá $f(x, y, z) \ge f(0, s, t)$, trong đó s, t là các đại lượng thích hợp sinh ra từ các biến a, b, c (ta sẽ gọi đây là kĩ thuật dồn 1 biến ra biên). Tất nhiên ta sẽ chọn s, t sao cho hiệu $d = f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$ là đơn giản và có thể đánh giá thuận lợi. Cuối cùng ta chỉ việc kiểm chứng $f(0, s, t) \geq 0$.

Trước hết, để các bạn làm quen với cách dồn biến "mới mẻ" này, chúng tôi xin trở lại một ví dụ ở phần trước.

Bài toán 1: (BĐT Schur) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b).$$

Lời giải:

Trong $2, bài này đã được giải bằng cách dồn 2 biến về bằng nhau. Tuy nhiên nhận xét là ngoài điểm $a = b = c$, đẳng thức còn đạt tại $a = b, c = 0$ (và các hoán vị). Do đó, kĩ thuật dồn biến ra biên vẫn có khả năng thành công!

Đặt $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(c + a) - c^2(a + b)$.

Ta hi vọng sẽ có $f(a, b, c) \geq f(0, a + b, c)$. Xét hiệu:

$$d = f(a, b, c) - f(0, a + b, c) = ab(5c - 4a - 4b)$$

Như vậy là ta không thể có $d \geq 0$, cho dù tận dụng sự kiện là a, b, c có thể được sắp.

Thật đáng tiếc! Tuy nhiên, nếu các bạn dừng lại ở đây thì còn đáng tiếc hơn. Thay vì bỏ dỡ, ta hãy xem lại vì sao không thể có $d \geq 0$. Nếu tinh ý, các bạn có thể thấy là $f(a, b, c)$ sẽ nhỏ đi khi hai biến tiến lại gần nhau (đó chính là lý do mà ta có thể dồn về hai biến bằng nhau như trong $2), còn ở đây khi thay bộ (a, b, c) bởi $(0, a + b, c)$ thì "dường như" các biến càng cách xa nhau. Đó chính là lý do cách dồn biến ở trên thất bại.

Từ đó, ta nảy ra ý là thay (a, b, c) bởi $(0, b + a/2, c + a/2)$. Xét hiệu:

$$d_a = f(a, b, c) - f(0, b + a/2, c + a/2) = a(a + b - 2c)(a + c - 2b)$$

Điều thú vị là ta có thể giả sử $d_a \geq 0$. Thật vậy, điều này cũng nhờ việc sắp thứ tự nhưng không phải là giữa các biến a, b, c mà là giữa các hiệu d_a, d_b, d_c (trong đó d_b, d_c là hai hiệu tương tự như d_a). Vì tính đối xứng nên ta có thể giả sử $d_a = max\{d_a, d_b, d_c\}$. Khi đó nếu $d_a < 0$ thì

$$0 > d_a d_b d_c = abc(b + c - 2a)^2(c + a - 2b)^2(a + b - 2c)^2$$

và mâu thuẫn!

Vậy $d_a \geq 0$ nên $f(a,b,c) \geq f(0,s,t)$ với $s = b + a/2, t = c + a/2$. Cuối cùng, ta thấy

$$f(0,s,t) = t^3 + s^3 - t^2 s - ts^2 = (t+s)(t-s)^2 \geq 0$$

và chứng minh được hoàn tất.

***Nhận xét:** *Mặc dù BĐT Schur quá quen thuộc, nhưng cách chứng minh bằng dồn biến mới chỉ được chú ý gần đây. Tuy nhiên, nếu như cách dồn về hai biến bằng nhau có vẻ khá "hợp lý", thì cách dồn một biến ra biên là một kết quả thực sự bất ngờ. Tất nhiên, chứng minh trên không phải là cách ngắn gọn nhất, nhưng ở đây chúng tôi muốn nhấn mạnh đến sự tự nhiên của nó.*

Nếu như trong bài toán 1 việc áp dụng kĩ thuật dồn biến ra biên gây bất ngờ, thì trong bài toán sau nó là một con đường tất yếu.

Bài toán 2: (Hojoo Lee) Cho $a, b, c \geq 0$, $ab + bc + ca = 1$ (*). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải:

Bài này đẳng thức không xảy ra tại tâm, mà tại $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị. Xét một trường hợp riêng khi $c = 0$, thì bài toán trở thành:

$$\text{"Chứng minh rằng: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}, \text{ với } ab = 1."$$

Đặt $s = a+b$ thì điều trên tương đương với $s + \frac{1}{s} \geq \frac{5}{2}$, hay $(2s-1)(s-2) \geq 0$. BĐT cuối là hiển nhiên vì $s = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2$.

Vậy bây giờ ta chỉ cần dồn một biến về 0 nữa là xong. Cách làm sau đây lấy từ ý của anh Phạm Kim Hùng trên Diễn Đàn Toán Học.

Đặt $f(a,b,c)$ là vế trái BĐT cần chứng minh. Ta hi vọng $f(a,b,c) \geq f(a+b, \frac{1}{a+b}, 0)$ (chú ý là cách lấy này nhằm đảm bảo điều kiện $(*)$). Xét hiệu:

$$\begin{aligned}
d &= f(a,b,c) - f(a+b, \frac{1}{a+b}, 0)\\
&= \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+\frac{1-ab}{a+b}} + \frac{1}{b+\frac{1-ab}{a+b}}\right) - \left(\frac{1}{a+b} + a + b + \frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}\right).\\
&= \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - 1 - \frac{1}{1+(a+b)^2}
\end{aligned}$$

Từ đó quy đồng lên ta thấy $d \geq 0$ nếu $2(1-ab) \geq ab(a+b)^2$. Nếu giả sử $c = max\{a,b,c\}$ thì $2(1-ab) = 2c(a+b) \geq ab(a+b)^2$. Vậy lúc này $d \geq 0$ và bài toán chứng minh xong!

***Nhận xét:**

1) Lời giải đầy tiên được đưa ra trên Diễn Đàn Toán Học là của anh Phan Thành Nam, một cách chứng minh rất ngắn gọn. Đặt $x = a+b+c$.

Nếu $x \geq 2$ thì:

$$\frac{1}{a+b} = c + \frac{ab}{a+b} \geq c + \frac{ab}{a+b+c} \Rightarrow f(a,b,c) \geq x + \frac{1}{x} \geq \frac{5}{2}$$

Nếu $x \leq 2$ thì giả sử $a = max\{a,b,c\}$ ta có:

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= (c + \frac{ab}{a+b}) + (b + \frac{ac}{a+c}) + \frac{1}{b+c}\\
&= (b+c+\frac{1}{b+c}) + \frac{a(1+bc)}{ax+bc} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(lưu ý là $2a(1+bc) = 2a + 2abc \geq ax + bc$, vì $x \leq 2$ và $2a \geq 1$.)

Tuy nhiên, những lời giải như vậy không phải dễ dàng nghĩ ra. Về lời giải bằng dồn biến ở trên, một lần nữa chúng tôi nhấn mạnh đến tính tự nhiên của nó.

2) Bài toán 2 là một bài toán hay và thu được sự quan tâm của nhiều bạn. Tuy nhiên, các bạn sẽ bất ngờ khi nó chỉ là một hệ quả ...đơn giản của một BĐT quen thuộc khác. Đó chính là BĐT Iran 1996. Thật vậy, với giả thiết $ab+bc+ca = 1$ thì từ kết quả của BĐT Iran 1996 ta có ngay:

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a})^2\\
&= \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

(lưu ý là $a+b+c=(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq (a+b)(b+c)(c+a)$)

Từ nhận xét trên, ta nhớ lại là trong $2, BĐT Iran 1996 đã được giải bằng kĩ thuật dồn về hai biến bằng nhau. Từ đó có hai câu hỏi rất tự nhiên là, thứ nhất: bài toán 2 ở trên có thể giải bằng cách dồn hai biến bằng nhau không, thứ hai: BĐT Iran 1996 có thể giải bằng cách dồn 1 biến ra biên không? Chúng tôi đề nghị các bạn tự giải đáp hai câu hỏi đó.

3) Bài toán 2 lại dẫn đến kết quả thú vị sau đây, mà tác giả là bạn Zhao bin (Trung Quốc)

"Cho x, y, z là các số thực không âm và chỉ có tối đa 1 số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2} \geq \frac{10}{(x+y+z)^2}."$$

Bằng hai bài toán "cũ" ở trên, chúng tôi muốn bạn đọc có một cảm giác dễ dàng đối với kĩ thuật dồn biến về biên. Tuy nhiên, trong hai bài này thì kĩ thuật dồn bai biến bằng nhau vẫn phát huy tác dụng, do đó không khỏi khó khăn trong việc thuyết phục bạn đọc về sức mạnh của kĩ thuật dồn biến ra biên. Do đó, chúng tôi dẫn ra bài toán sau đây, các bạn sẽ thấy kĩ thuật dồn về hai biến bằng nhau hoàn toàn bế tắc, đơn giản vì đẳng thức đạt được khi ... các biến đôi một khác nhau. Đây cũng là một trong những ví dụ quan trọng nhất của kĩ thuật dồn biến ra biên mà chúng tôi muốn trình bày với các bạn.

Bài toán 3: (Jackgarfukel) Cho a, b, c là 3 số thực không âm và có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c} \qquad (*)$$

Lời giải:

Trước khi tấn công bài này, ta cần xem khi nào trường hợp dấu bằng xảy ra: dễ thấy $a=b=c$ không thỏa, do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến trường hợp biên: $c=0$. Với $c=0$ thì BĐT(*) trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b} \qquad (1)$$

Chuẩn hóa $a+b=1$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 1-b+\sqrt{b} \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{b}-1/2)^2 \ge 0 \quad \text{(đúng!)}$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $a=3b, c=0$ (và các hoán vị).

Như vậy trường hợp dấu bằng xảy ra khi cả ba biến rời nhau, do đó các phương pháp dồn về hai biến bằng nhau xem như không còn tác dụng. Do đó, dồn một biến về biên có thể xem là con đường tất yếu.

Không mất tổng quát có thể giả sử $a = max\{a,b,c\}$ và $a+b+c=1$. Đặt $t=\frac{a+c}{2}$ và $s=\frac{a-c}{2}$, suy ra $a=t+s, c=t-s, b=1-2t$. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow \frac{t+s}{\sqrt{s+1-t}}+\frac{1-2t}{\sqrt{1-t-s}}+\frac{t-s}{\sqrt{2t}} \le \frac{5}{4} \qquad (1)$$

Đặt $f(s)=VT(1)$ với $s\in[0,t]$, ta sẽ chứng minh $f(s)\le \max(f(0),f(t))$. Ta có :

$$f'(s)=\frac{1}{\sqrt{s+1-t}}-\frac{t+s}{2(s+1-t)^{3/2}}+\frac{1-2t}{2(1-t-s)^{3/2}}-\frac{1}{\sqrt{2t}}$$

Vì chưa xác định được dấu của $f'(s)$ nên ta đạo hàm tiếp

$$f''(s)=-\frac{1}{(s+1-t)^{3/2}}+\frac{3(t+s)}{4(s+1-t)^{5/2}}+\frac{3(1-2t)}{4(1-t-s)^{5/2}}$$

$$f'''(s)=\frac{9}{4(s+1-t)^{5/2}}-\frac{15(t+s)}{8(s+1-t)^{7/2}}+\frac{15(1-2t)}{8(1-t-s)^{7/2}}$$

$$=\frac{18+3s-33t}{(1-t-s)^{7/2}}+\frac{15(1-2t)}{8(1-t-s)^{7/2}}>0, \text{ vì } b=1-2t\ge 0$$

Vậy $f'''(s)>0$ với mọi $s\in[0,t]$ nên theo định lí Rolle ruy ra $f'(s)$ có tối đa đa hai nghiệm trên $[0,t]$. Mặt khác dễ dàng chứng minh $f'(0)\le 0$ và $f'(t)\ge 0$ do đó $f'(s)$ chỉ có thể đổi dấu tối đa một lần trên $(0,t)$, hơn nữa $f'(s)$ chỉ có thể có một trong các dạng sau: $f'(s)>0, \forall s\in(0,t)$ hoặc $f'(s)<0, \forall s\in(0,t)$ hoặc $f'(s)$ có dạng $-\ 0\ +$ trên $(0,t)$. Tuy nhiên trong trường hợp nào thì $f(s)$ cũng chỉ có thể đạt cực đại tại biên.

Vậy $f(s)\le \max(f(0),f(t))$ với mọi $s\in[0,t]$ nên ta chỉ cần chứng minh BĐT sau nữa là xong:

$$\max(f(0),f(t))\le 5/4$$

Muốn vậy ta chứng minh lần lượt các BĐT $f(0) \leq 5/4$ và $f(t) \leq 5/4$. Việc chứng minh hai BĐT này đều rất dễ dàng, nên chúng tôi đề nghị bạn đọc tự kiểm chứng.

Hẳn nhiên các bạn đều đồng ý về sự cần thiết của phương pháp dồn biến ra biên đối với bài toán 3. Tuy nhiên, có thể nhiều bạn sẽ cho rằng: vì bài toán 3 không đối xứng nên mới không xảy ra trường hợp dấu "=" khi có hai biến bằng nhau. Để phủ định nhận xét đó, chúng tôi kết thúc mục này bằng cách dẫn ra một bài toán của anh Phạm Kim Hùng trên THTT:

Bài toán 4. Cho $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \leq 36(ab + bc + ca)$$

Lời giải:

Không mất tổng quát có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt

$$f(a, b, c) = 36(ab + bc + ca) - (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3 + c^3 + c^3a^3)$$

Khi đó $f(a, b + c, 0) = 36a(b + c) - (a^3 + (b + c)^3)a^3(b + c)^3$.

Ta sẽ chứng minh rằng $f(a, b, c) \geq f(a, b + c, 0)$. Thật vậy, chú ý rằng:

$$36(ab + bc + ca) \geq 36a(b + c)$$

và

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \leq [a^3 + (b + c)^3]a^3(b + c)^3$$

(vì ta có $a^3 + b^3 + c^3 \leq a^3 + (b + c)^3$ và $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \leq a^3(b + c)^3$)

Do đó ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $c = 0$, hay

$$36ab \geq a^3b^3(a^3 + b^3) \Leftrightarrow 36 \geq a^2b^2(a^3 + b^3)$$

Đặt $t = ab$, bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng $t^2(27 - 9t) \leq 36 \Leftrightarrow t^3 + 4 \geq 3t^2$. Nhưng đây lại là BĐT Cauchy của ba số $t^3/2, t^3/2, 4$. Đẳng thức xảy ra khi $c = 0$ và $a + b = 3, ab = 2$ hay $a = 2, b = 1, c = 0$ (và các hoán vị).

*__Nhận xét:__ *Một ví dụ nữa, đơn giản hơn, của cùng tác giả trên Diễn Đàn Toán Học:*

" Cho $a, b, c \geq 0$, $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2).\text{"}$$

Bài toán này không khó và đề nghị bạn đọc tự giải quyết.

5. BĐT 4 biến.

Sau khi nắm vững kĩ thuật dồn biến với 3 số thì các bạn có thể đọc mục này một cách nhanh chóng. Chúng tôi chỉ xin lưu ý đặc thù của trường hợp 4 biến: Khi có 4 biến thì ta có thể dồn biến theo từng cặp, và có thể chứng minh được ngay bài toán (chẳng hạn như BĐT Cauchy). Tuy nhiên, thuận lợi này thường chỉ xuất hiện trong các bài toán khá đơn giản. Đối với các bài phức tạp thì thường ta chỉ dồn được 1 cặp nhờ thứ tự sắp được giữa các biến. Sau khi dồn được hai biến bằng nhau (hoặc dồn được một biến ra biên) thì ta chưa có ngay BĐT với 1 biến, mà phải qua một BĐT trung gian (2 hay 3 biến). Tuy nhiên thường thì các BĐT trung gian này khá dễ để có thể chứng minh trực tiếp hoặc đánh giá để quy về 1 biến. Nói chung, chúng tôi nhấn mạnh điều cần thiết ở đây là các bạn cần quan sát thật kĩ mối liên hệ giữa 4 biến để có cách xử lý thích hợp.

Chúng ta bắt đầu với một ví dụ "kinh điển" cho kĩ thuật dồn biến với BĐT 4 biến.

Bài toán 1. (IMO SL, Việt Nam đề nghị) Cho $a, b, c, d \geq 0$, $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng:

$$abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$$

Lời giải:

Bài này đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1/4$ hoặc $a=b=c=1/3, c=0$. Do đó, những đánh giá thông thường rất dễ rơi vào bế tắc.

Đặt $f(a,b,c,d)=abc+bcd+cda+dab-kabcd$ với $k=\frac{176}{27}$. Ta có:

$$f(a,b,c,d)=ab(c+d-kcd)+cd(a+b)$$

Từ đó, ta hi vọng có $f(a,b,c,d) \leq f(t,t,c,d)$ với $t = \frac{a+b}{2}$. Vì $0 \leq ab \leq t^2$ nên để có điều này ta cần $c+d-kcd \geq 0$. Ở đây rất may mắn là nếu có điều này có điều ngược lại, nghĩa là $c+d-kcd < 0$, thì BĐT ban đầu hiển nhiên đúng vì:

$$f(a,b,c,d) = ab(c+d-kcd)+cd(a+b) \leq cd(a+b) \leq (\frac{c+d+(a+b)}{3})^3 = \frac{1}{27}$$

Vậy ta có thể giả sử là luôn có $f(a,b,c,d) \leq f(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d)$. Lưu ý là ta đã thực hiện được việc dồn biến như trên mà không cần bất cứ giả thiết phụ nào áp đặt lên 2 biến a,b. Do đó nhờ tính đối xứng ta có thể dồn 2 biến bất kì trong 4 biến về bằng nhau.

Từ đó, đặt thêm $s = \frac{c+d}{2}$ ta có:

$$\begin{aligned}&f(a,b,c,d) \leq f(t,t,c,d) \leq f(t,t,s,s) = f(t,s,t,s)\\ &\leq f(\frac{t+s}{2},\frac{t+s}{2},t,s) \leq f(\frac{t+s}{2},\frac{t+s}{2},\frac{t+s}{2},\frac{t+s}{2}) = f(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = \frac{1}{27}\end{aligned}$$

và bài toán chứng minh xong!

***Nhận xét:**

1) Trong lời giải trên, thực chất là cứ mỗi bước ta lại phân ra 2 trường hợp: có một trường hợp thì dồn biến được và một trường hợp mà BĐT hiển nhiên đúng. Do đó, lời giải không khỏi có phần rối rắm. Bạn đọc nên trình bày lại bằng cách phản chứng (giả sử có (a_0,b_0,c_0,d_0) sao cho $f(a_0,b_0,c_0,d_0) > \frac{1}{27}$) sẽ gọn gàng và chặt chẽ hơn. Một cách khác là gộp cả hai trường hợp lại:

$$f(a,b,c,d) \leq max\{\frac{1}{27}, f(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d)\} \qquad (1)$$

2) Ở đây còn có một cách nhìn nữa, thoạt nhìn thì không khác mấy ý ở trên (thậm chí có vẻ dài dòng hơn), tuy nhiên đây là một kĩ thuật rất có ích. Ý tưởng này lấy từ anh Phan Thành Nam và anh Phạm Kim Hùng trên Diễn Đàn Mathlinks.

Nhắc lại là $f(a,b,c,d) = ab(c+d-kcd)+cd(a+b)$. Đặt $g(x) = ab(c+d-kcd)+cd(a+b)$ thì g là hàm tuyến tính, và $ab \in [0,t^2]$ (với $t = \frac{a+b}{2}$) nên $g(ab) \leq max\{g(0), g(t^2)\}$. Chú ý $g(0) = f(0,a+b,c,d)$. Vậy ta có:

$$f(a,b,c,d) \leq max\{f(0,a+b,c,d), f(t,t,c,d)\} \qquad (2)$$

Với cách viết trong BĐT (2) *ở trên thì việc cực trị đạt tại tâm hoặc tại biên là rất rõ ràng. Thật ra, trong bài toán này ta có ngay* $f(0, a+b, c, d) \leq \frac{1}{27}$ *và có thể chuyển* (2) *về* (1)*. Tuy nhiên, với các bài phức tạp thì dạng* (2) *sẽ tỏ ra rất có ích, đặc biệt là trong kĩ thuật dồn biến tổng quát cho* n *số mà chúng tôi sẽ trình bày ở phần sau.*

3) Các bạn hãy tự giải quyết bài toán tương tự sau đây của Nguyễn Anh Cường.

"Giả sử x, y, z, t *là các số thực không âm thỏa mãn* $x+y+z+t=4$*, chứng minh rằng:*

$$3(x^2+y^2+z^2+t^2)+4xyzt \geq 16 \quad ".$$

Chúng ta tiếp tục với 1 bài toán mà trong đó các kĩ thuật dồn 2 biến bằng nhau là thực sự rõ ràng.

Bài toán 2. (Phan Thành Nam) Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 4. Chứng minh bằng:

$$abc+bcd+cda+dab+(abc)^2+(bcd)^2+(cda)^2+(dab)^2 \leq 8$$

Lời giải:

Lời giải sau đây của tác giả bài toán. Đặt $f(a, b, c, d)$ là VT BĐT cần chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}
&f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d) - f(a, b, c, d) \\
&= (\frac{a-b}{2})^2(c+d) + (\frac{a-b}{2})^2[(\frac{a+b}{2})^2 + ab](c^2+d^2) - \frac{(a-b)^2}{2}c^2d^2 \\
&\geq (\frac{a-b}{2})^2(c+d+4abcd-2c^2d^2)
\end{aligned}$$

Vậy nếu $c+d+4abcd \geq 2c^2d^2$ thì $f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d) \geq f(a, b, c, d)$.

Ta giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ thì theo trên ta có: $f(x, x, c, d) \geq f(a, b, c, d)$ với $x = \frac{a+b}{2}$. Tương tự, ta xét: $f(x, x, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}) - f(x, x, c, d)$.

Nếu $2x + 4x^2cd \geq 2x^4$ thì $f(x, x, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}) \geq f(x, x, c, d)$. Và ta chỉ cần chứng minh $f(x, x, y, y) \leq 8$ với $x + y = 2$. Điều này đơn giản.

Nếu $2x + 4x^2cd < 2x^4$ thì ta đánh giá tiếp: $2xcd + 2x^2c^2d^2 <= 2x^4$ nên:

$$f(x, x, c, d) = x^2(c+d) + 2xcd + 2x^2c^2d^2 + x^4(c^2+d^2) \geq x^2(c+d) + x^4(c+d)^2$$

và do $x^2(c+d) \le (4/3)^3$ nên $f(x,x,c,d) <= (4/3)^3 + (4/3)^6 < 8$. Bài toán chứng minh xong!

***Nhận xét:**

1) Về điều kiện $c + d + 4abcd \ge 2c^2d^2$ để dồn hai biến a, b bằng nhau, ta thấy chỉ cần $ab \ge cd$ là đủ. Điều đó có nghĩa là nếu giả sử $a \ge b \ge c \ge d$ thì ta có thể dồn hai biến bất kì trong 3 biến a, b, c về bằng nhau (hơn nữa nếu 2 biến chưa bằng nhau thì BĐT ở đây là thực sự, nghĩa là sau khi dồn biến thì hàm f sẽ tăng lên một đại lượng > 0). Liệu điều đó có dẫn đến: $f(a,b,c,d) \le f(t,t,t,c)$ với $t = \frac{a+b+c}{3}$ hay không?

Rõ ràng, nếu giả sử f đạt cực đại tại (a,b,c,d) thì theo đó ta phải có $a = b = c$. Trên Diễn Đàn Mathlinks bạn Zhao Bin đã có một lời giải với ý tưởng đó. Tuy nhiên, việc tồn tại cực đại của hàm f (với 4 biến) không phải là chuyện hiển nhiên (mặc dù nó rất rõ ràng về mặc trực giác).

Một ý nữa, là bằng cách dồn biến liên tiếp giữa 3 biến a, b, c ta có thể dùng dãy số để chuyển qua giới hạn và đưa về 3 biến bằng nhau. Nhưng một lần nữa, mặc dù rõ ràng về mặc trực giác nhưng cách làm trên không phù hợp với cách tiếp cận sơ cấp.

Tuy nhiên, trong bài toán 3 ngay bên dưới đây chúng tôi sẽ cung cấp cho các bạn một cách làm hết sức thú vị để chuyển về 3 biến bằng nhau trong những trường hợp như vậy.

2) Nói thêm về bài toán 2. Bài này không khó và theo lời tác giả bài toán thì nó được đặt ra để giải quyết bài toán sau đây của anh Phạm Kim Hùng: "Chứng minh rằng với 4 số không âm a, b, c, d có tổng bằng 4 thì:

$$\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \le 1."$$

bằng cách sử dụng bổ đề sau đây:

"Cho 4 số $x_i \ge 0$ thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{4}(x_i + x_i^2) \le 8$ và $x_i + x_j \le 3$,$\forall i \ne j$. Thì:

$$\frac{1}{5-x_1} + \frac{1}{5-x_2} + \frac{1}{5-x_3} + \frac{1}{5-x_4} \le 1."$$

Bổ đề này rất thú vị nhưng nó không nằm trong phạm vi dồn biến của chúng ta. Tuy nhiên, có một câu hỏi là liệu có thể giải quyết bài toán của anh Phạm Kim Hùng bằng cách dồn biến hay không? Đó là một vấn đề hay mà chúng tôi muốn cách bạn tự mình suy nghĩ.

Trong bài toán sau, câu $a)$ là của anh Phạm Kim Hùng, còn câu $b)$ là một kết quả mạnh mà chúng tôi tìm được.

Bài toán 3. Cho $a, b, c, d \geq 0$, $a+b+c+d=4$. Đặt $F_k = (1+a^k)(1+b^k)(1+c^k)(1+d^k)$. Chứng minh rằng:
a) $F_4 \geq F_3$
b) $F_2 \geq F_1$.
Lời giải:
a) Ta sẽ chứng minh BĐT này bằng phản chứng. Giả sử ngược lại tức tồn tại bộ bốn số (a, b, c, d) thỏa mãn: $a, b, c, d \geq 0$, $a+b+c+d=4$ và $F_4 \leq F_3 \quad (1)$.

Theo BĐT Bunhacôpski ta có: $F_4.F_2 \geq F_3^2$, $F_3.F_1 \geq F_2^2$, $F_2.F_0 \geq F_1^2 \quad (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $F_4 < F_3 < F_2 < F_1 < F_0 = 16 \quad (3)$. Từ (3) ta có $F_4 < 16$ suy ra $max(a, b, c, d) < 2$.

Để dẫn tới mâu thuẫn với (3), ta sẽ chứng minh $F_3 \geq F_1 \quad (4)$. Thật vậy:

$$(4) \Leftrightarrow (1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2) \geq 1$$
$$\Leftrightarrow (\frac{3}{4}+\frac{(2a-1)^2}{4})(\frac{3}{4}+\frac{(2b-1)^2}{4})(\frac{3}{4}+\frac{(2c-1)^2}{4})(\frac{3}{4}+\frac{(2d-1)^2}{4}) \geq 1$$
$$\Leftrightarrow (1+\frac{(2a-1)^2}{3})(1+\frac{(2b-1)^2}{3})(1+\frac{(2c-1)^2}{3})(1+\frac{(2d-1)^2}{3}) \geq \left(\frac{4}{3}\right)^4$$
$$\Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left[1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right]^4 \qquad (5)$$

(Trong đó $x = \frac{2a-1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2b-1}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{2c-1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{2d-1}{\sqrt{3}}$)

Từ đó xét BĐT

$$(1+A^2)(1+B^2) \geq \left[1+\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\right]^2 \qquad (6)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}(A-B)^2(8-A^2-6AB-B^2) \geq 0$$

Ta thấy nếu $A+B \leq 2$ thì BĐT này đúng.

Không mất tổng quát có thể giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Kết hợp với $a+b+c+d=4$ ta dễ dàng chứng minh: $x+t < 2$ và $y+z < 2$. Do vậy theo

BĐT(6) ta có:

$$(1+x^2)(1+t^2) \geq \left[1+\left(\frac{x+t}{2}\right)^2\right]^2 \qquad (7)$$

$$(1+y^2)(1+z^2) \geq \left[1+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\right]^2 \qquad (8)$$

nhân (7) và (8) vế theo vế suy ra:

$$(1+x^2)(1+t^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq \left[\left(1+(\frac{x+t}{2})^2\right)\left(1+(\frac{y+z}{2})^2\right)\right]^2 \qquad (9)$$

Từ $x+t<2$ và $y+z<2$ suy ra: $\frac{x+t}{2}+\frac{y+z}{2}<2$. Do đó lại áp dụng BĐT(6) ta được:

$$\left[1+(\frac{x+t}{2})^2\right]\left[1+(\frac{y+z}{2})^2\right] \geq \left[1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right]^2 \qquad (10)$$

Từ (9) và (10) suy ra:

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left[1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right]^4$$

Vậy (5) đúng suy ra (4) đúng (mâu thuẫn với (3)). Điều đó có nghĩa việc giả sử ở (1) là sai tức ta có BĐT ngược lại là $F_4 \geq F_3$ (đpcm).

b) Câu này mạnh hơn câu a) do đó dùng "mánh lới" như câu a thì không ổn, tuy nhiên nếu " đường lớn tiến công" thì không gặp vấn đề gì:

Đặt $f(a,b,c,d) = VT - VP$ ta cần chứng minh $f(a,b,c,d) \geq 0$. Muốn vậy, trước hết ta chứng minh mệnh đề sau:

Mệnh đề: Nếu $a+b \leq 2$ và $a \geq x \geq b$ thì
$f(a,b,c,d) - f(x, a+b-x, c, d) \geq 0$
Thật vậy:
$f(a,b,c,d) - f(x,a+b-x,c,d)$
$= (a-x)(x-b)\left[(d+1)(c+1) - (d^2+1)(c^2+1)(ab-x^2+ax+bx-2)\right]$
từ đó sử dụng giả thiết dễ dàng suy ra điều chứng minh.

Trở lại bài toán ta có thể giả sử $a \le b \le c \le d$. Đặt $x = \frac{a+b+c}{3}$ thì: Chú ý $a + c \le 2$ và $c \ge x \ge a$ nên áp dụng mệnh đề ta có:

$$f(a, b, c, d) \ge f(a + c - x, b, x, d) \qquad (1)$$

Chú ý là $x = \frac{(a+c-x)+b+x}{3}$ nên nếu $x = min\{x, b, a + c - x\}$ hoặc $x = max\{x, b, a+c-x\}$ thì $a+c-x = b = x$ nên $f(a+c-x, b, x, d) = f(x, x, x, d)$ và bài toán chỉ còn 1 biến.

Giả sử ngược lại, khi đó có hai trường hợp:
$b < x < a + c - x$ (2) hoặc $a + c - x < x < b$ (3)
Lại sử dụng mệnh đề cho ta:
(2) :$f(a + c - x, b, x, d) \ge f(x, a + b + c - 2x, x, d) = f(x, x, x, d)$ hoặc
(3) :$f(a + c - x, b, x, d) \ge f(a + b + c - 2x, x, x, d) = f(x, x, x, d)$
Nói chung trong trường hợp nào ta cũng có

$$f(x, b, a + c - x, d) \ge f(x, x, x, d) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(a, b, c, d) \ge f(x, x, x, d)$. Để giải quyết bài toán 1 biến, ta thay $x = \frac{x+y+z}{3} = \frac{4-d}{3}$ và chứng minh:

$$f(\frac{4-d}{3}, \frac{4-d}{3}, \frac{4-d}{3}, d) \ge 0 \qquad (4)$$

Thật vậy:

$$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{729}(d^6 - 22d^5 + 223d^4 - 1268d^3 + 4210d^2 - 7564d + 6364)(d-1)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

***Nhận xét:** *Việc đổi biến trước khi dồn biến của câu a) là khá kì lạ và đem lại hiệu quả không ngờ. Kĩ thuật dồn về 3 biến bằng nhau của câu b) là rất mạnh, và hoàn toàn sơ cấp (bởi số bước dồn biến chỉ là hữu hạn). Kĩ thuật này có thể ứng dụng cực tốt cho các bài 4 biến. Hơn thế, ở phần sau nó sẽ được mở rộng để giải quyết bài toán với n biến.*

Cuối cùng, chúng ta đến với một ví dụ cho trường hợp dồn biến ra biên. Đây cũng là một bài toán của anh Phạm Kim Hùng.

Bài toán 4. Cho $a, b, c, d \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{a^2+c^2+d^2} + \frac{c}{a^2+b^2+d^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{4}{a+b+c+d}$$

Lời giải: Xét

$$f(a,b,c,d) = \sum_4 \frac{a}{b^2+c^2+d^2} - \frac{4}{a+b+c+d}$$

Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d) - f(a,b,\sqrt{a^2+b^2},0)\\
&= \frac{c}{a^2+b^2+d^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} - \frac{4}{a+b+c+d}\\
&\qquad\qquad - \left(\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{a^2+b^2} - \frac{4}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\right)
\end{aligned}$$

(do $a^2+b^2 \geq c^2+d^2$ nên dễ thấy BĐT trên đúng)

Vậy vấn đề còn lại là chứng minh $f(a,b,\sqrt{c^2+d^2},0) \geq 0$. BĐT cuối chứng minh không khó nên xin nhường lại cho bạn đọc.

***Nhận xét:** *Cách dồn biến ở trên nhằm bảo toàn tổng $a^2+b^2+c^2+d^2$. Tất nhiên, việc này cũng không phải là điều quá quan trọng, bởi nếu thích các bạn cũng có thể bảo toàn $a+b+c+d$ bằng cách chứng minh $f(a,b,c,d) \geq f(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2},c,d)$, sau đó đánh giá*

$$f(t,t,c,d) \geq \frac{2t}{t^2+(c+d)^2} + \frac{c+d}{(\frac{c+d}{2})^2+2t^2} - \frac{4}{2t+c+d}$$

$$= \frac{x}{x^2/4+y^2} + \frac{y}{y^2/4+x^2/2} - \frac{4}{x+y} \qquad (\textit{trong đó } x=2t, y=c+d)$$

Bước cuối cùng là $f(x,y) \geq 0$ (chứng minh cái này không khó các bạn có thể giả sử $x+y=1$ cho gọn)

Đến đây chúng ta tạm kết thúc phần dồn biến cho BĐT ”cụ thể” (có 3 hoặc 4 biến) để bước sang phần dồn biến cho BĐT n biến. Như chúng ta sẽ thấy, đây là một lĩnh vực khó hơn hẳn. Tuy nhiên các kĩ thuật chính đều đặt nền tảng thông qua việc khảo sát BĐT ”cụ thể”, mà đặc biệt là những tư tưởng manh nha khi khảo sát BĐT 4 biến.

6. Dồn biến bằng hàm lồi.

Các bạn thân mến, phương pháp dồn biến mà chúng ta đã tìm hiểu trong các mục trước không phải là từ trên trời rơi xuống. Thật ra ý tưởng dồn biến đã thể hiện rất rõ ngay trong các BĐT cổ điển. Do đó nếu xếp theo dòng chảy thời gian thì lẽ ra mục này phải được nêu ra ngay từ đầu. Tuy nhiên, chúng tôi nghĩ là sẽ thú vị hơn nếu chúng ta trở lại gốc rễ sau khi các bạn đã cảm nhận dồn biến như là một phương pháp "hiện đại".

Một trong những công cụ chính để dồn biến trong các BĐT "dạng cổ điển" là hàm lồi. Đây là một khái niệm quen thuộc, tuy nhiên để tiện lợi cho bạn đọc chúng tôi xin nhắc lại.

Định nghĩa: Một hàm số $f : [a, b] \to R$ được gọi là lồi nếu:

$$f(tx + (1 - ty)) \leq tf(x) + (1 - t)f(y), \forall x, y \in [a, b], \forall t \in [0, 1]$$

Nhận xét:
1) Nếu f khả vi 2 lần thì một tiêu chuẩn rất quan trọng để kiểm tra tính lồi là $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$.
2) Nếu f lồi thì f liên tục. Ngược lại, nếu f liên tục thì tính lồi của f là tương đương với điều có vẻ "yếu hơn" là: $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Các bạn có thể thấy, định nghĩa hàm lồi đã đánh ngay vào mục tiêu dồn biến. Chúng ta có ngay kết quả quen thuộc sau:

Định lý: (BĐT Jensen) Cho f là hàm số lồi $[a, b] \to R$.
(i) Với x_i là n số thuộc $[a, b]$ ta có:

$$f(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$$

(ii) Với x_i là n số thuộc A và λ_i là n số không âm có tổng bằng 1 ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_1 f(x_n)$$

Những kết quả trên là quen thuộc và chúng tôi bỏ qua chứng minh. Thay vào đó chúng tôi dẫn ra đây một chứng minh cho BĐT Cauchy bằng cách dùng hàm lồi. Nhắc lại:

Bài toán 1. (BĐT Cauchy) Cho n số thực dương x_i. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

Lời giải:

Lấy logarit 2 vế, ta chuyển về dạng:

$$ln(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}) \geq \frac{ln(x_1) + ln(x_2) + ... + ln(x_n)}{n}$$

Hàm số $f(x) = ln(x)$ đi từ $R^+ \rightarrow R$ khả vi 2 lần và $f''(x) = -x^{-2} < 0, \forall x > 0$. Do vậy hàm $g(x) = -f(x)$ sẽ thỏa $g''(x) > 0, \forall x > 0$. Vậy g lồi. Từ đó, áp dụng BĐT Jensen ta có ngay điều phải chứng minh.

***Nhận xét:** *Một cách khác rất thông dụng dùng để chứng minh BĐT Cauchy, đó là chứng minh quy nạp theo n. Cách làm đó rất hay, đến nỗi ta có cảm giác là "cái gì đúng cho $n = 2$ thì cũng đúng cho n tùy ý". Các bạn hãy quan sát kĩ cách chứng minh đó, rồi chứng minh lại BĐT Jensen, các bạn sẽ thấy hàm lồi là một tổng quát nói lên bản chất của vấn đề.*

Hàm lồi có thể ứng dụng trong rất nhiều BĐT cổ điển, và những BĐT cổ diển này lại giải quyết được rất nhiều bài toán khác. Tất nhiên, nó không phải là một công cụ "vạn năng", tuy nhiên nếu biết sử dụng khéo léo thì sức mạnh của nó không nhỏ. Chúng tôi dẫn ra đây một ví dụ cho thấy chúng ta không thể áp dụng hàm lồi để cho ngay kết quả, song nó giúp giải quyết được một trường hợp quan trọng mà các trường hợp còn lại có thể chứng minh đơn giản bằng cách này hay cách khác.

Bài toán 2. Cho các số thực x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1 + x^2} + \frac{y}{1 + y^2} + \frac{z}{1 + z^2} \leq \frac{9}{10}$$

Lời giải:

Xét $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ thì BĐT cần chứng minh tương đương:

$$f(x) + f(y) + f(z) \leq 3f(\frac{x + y + z}{3})$$

Do đó, nếu $-f$ là hàm lồi thì coi như bài toán được giải quyết.

Ta có:

$$-f''(t) = \frac{2t(3-t^2)}{(1+t^2)^3}$$

nên $-f''(t) \geq 0, \forall t \in [0, \sqrt{3}]$. Vậy nếu $x, y, z \in [0, \sqrt{3}]$ thì bài toán được giải quyết.

Trong trường hợp còn lại thì chắc chắn ta sẽ có dấu BĐT thực sự. Do vậy cứ việc chia thành nhiều trường hợp con để xét.

Có thể giả sử $x \geq y \geq z$ lưu ý $x + y + z = 1$ và $x, y, z \notin [0, 1]$ nên z phải âm suy ra $f(z) < 0$

*Nếu y âm suy ra x dương và $f(y) < 0$, ta có $f(x) + f(y) + f(z) < f(x) < 1/2 < 9/10$

*Nếu y dương suy ra x dương và lưu ý $f(y), f(x)$ nghịch biến trên $[\sqrt{3}, +\infty]$ do đó $f(x) + f(y) + f(z) < f(x) + f(y) < f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{3}) < 9/10$

Bài toán chứng minh xong.

***Nhận xét:** *Tất nhiên lời giải trên chưa phải là ngắn gọn so với nhiều lời giải khác cho bài toán này mà chúng tôi được biết. Tuy nhiên tư tưởng của nó hoàn toàn trong sáng. Ở đây, nếu thay vì mong muốn dồn biến toàn cục (dồn 1 lần 3 biến) bằng việc hi vọng hợp lý hơn là dồn được 2 biến về bằng nhau thì lời giải sẽ ngắn hơn. Thật vậy, nếu có 2 trong 3 biến x, y, z thuộc đoạn $[0, \sqrt{3}]$ thì dùng hàm lồi ta dồn được 2 biến này về bằng nhau, và bài toán chỉ còn 1 biến, xem như giải quyết xong. Trong phần còn lại thì việc chia trường hợp sẽ đơn giản hơn. Như vậy, chúng ta có thêm một kĩ thuật để dồn 2 biến về bằng nhau là sử dụng hàm lồi.*

Mặc dù đây là một công cụ tốt, nhưng một điểm yếu rất dễ nhận ra là trong BĐT, các biến phải nằm trong các biểu thức độc lập nhau (để có thể viết thành dạng $f(x_1) + ... + f(x_n)$). Trong khi đó, những BĐT mà ta đã gặp phần lớn không có điều đó, và ta sẽ phải làm việc với dạng tổng quát hơn là $f(x_1, ..., x_n)$. Chúng ta sẽ phải thiết lập các kết quả về dồn biến cho dạng tổng quát này ở mục sau.

Như đã nói ở trên, với hàm lồi thì ý tưởng dồn các biến về bằng nhau thể hiện ngay từ định nghĩa. Tuy nhiên, điều bất ngờ là kĩ thuật dồn biến ra biên cũng có thể thực hiện thông qua hàm lồi. Các bạn có thể thấy ngay điều đó qua kết quả sau đây:

Định lý: Cho $f : [a, b] \to R$ là một hàm lồi. Khi đó:

$$f(x) \leq max\{f(a), f(b)\}, \forall x \in [a, b]$$

Chứng minh:

Vì f liên tục nên f đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 \in [a, b]$. Xét khi $|x_0 - a| \leq |x_0 - b|$ (nghĩa là x_0 gần a hơn b). Thì $x_1 = 2x_0 - a \in [a, b]$. Khi đó theo định nghĩa hàm lồi ta có:

$$f(a) + f(x_1) \geq 2f(\frac{a + x_1}{2}) = 2f(x_0)$$

suy ra $f(a) = f(x_0)$. Với x_0 gần b hơn a thì chứng minh tương tự.

***Nhận xét:** *Để các bạn có thể cảm nhận "cái đúng" của định lý trên chúng tôi sẽ nêu ra một hình ảnh khi $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$. Khi đó, f' đồng biến nên chỉ có tối đa 1 nghiệm trên (a, b), nói cách khác là chỉ đổi dấu tối đa 1 lần. Do đó f sẽ rơi vào các trường hợp sau đây: đồng biến, nghịch biến, "đi lên rồi đi xuống", hoặc "đi xuống rồi đi lên". Và trong trường hợp nào ta cũng thu được kết quả cần thiết. (Một chứng minh khác trong trường hợp này là giả sử f đạt cực đại tại $x_0 \in (a, b)$ thì $f''(x_0) \leq 0$, mâu thuẫn.)*

Chúng tôi sẽ dẫn ra đây 2 bài toán mà chúng thực sự là các bài toán khó cho dù giải bằng biến đổi đại số hay quy nạp.

Bài toán 3. Cho $0 < p < q$, và n số thực $x_i \in [p, q]$. Chứng minh rằng:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \frac{(p - q)^2}{pq}$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là chỉ phần nguyên của x

*(*Ghi chú: Đây là một bài tổng quát, trong đó trường hợp $n = 5$ là bài USAMO 77, còn $n = 3$ là đề thi Olympic $30 - 4$ năm 2001)*

Lời giải:

Từ giả thiết $x_i \in [p, q]$, ta dễ dàng đoán rằng: GTLN sẽ đạt được khi $x_i \in [p.q]$ với mọi i. Khi đó, g/s trong n số x_i có k số p và $n - k$ số q thì:

$$VT = (kp + (n - k)q)(\frac{k}{q} + \frac{n - k}{q}) = k^2 + (n - k)^2 + k(n - k)(\frac{p}{q} + \frac{q}{p})$$

$$= n^2 + k(n-k)\frac{(p-q)^2}{pq} = n^2 + \frac{1}{4}\left[n^2 - (n-2k)^2\right]\frac{(p-q)^2}{pq}$$

Vì k nguyên nên $n^2-(n-2k)^2 \le n^2$ (khi n chẵn) và $n^2-(n-2k)^2 \le n^2-1$ (khi n lẻ). Từ đó, ta thu được BĐT ban đầu đồng thời chỉ ra luôn trường hợp dấu bằng xảy ra.

Đến đây, ta chợt nhận ra: mấu chốt của vấn đề chỉ là nhận xét: "GTLN sẽ đạt được khi $x_i = p$ hoặc $x_i = q$ với mọi i". Và thật bất ngờ, nhận xét này chứng minh rất dễ.

Với mọi i, ta xem vế trái là một hàm theo x_i, ta sẽ chứng tỏ: $f(x_i) \le max\{f(p), f(q)\}$, và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_i \in \{p, q\}$.

Ta có: $f(x) = Ax + \frac{B}{x} + C$. Có thể khảo sát hàm để ra ngay kết quả (suy ra luôn dấu bằng xảy ra khi $x_i \in \{p, q\}$). Song ở đây trình bày một cách sơ cấp hơn. Để ý:

$$f(x_i) - f(p) = (x_i - p)(A - \frac{B}{x_i p})$$

$$f(x_i) - f(q) = (x_i - q)(A - \frac{B}{x_i q})$$

Từ đó nếu $f(x_i) > max\{f(p), f(q)\}$ thì rõ ràng $x_i \notin \{p, q\}$ và:

$$A - \frac{B}{x_i p} > 0, A - \frac{B}{x_i q} \Rightarrow \frac{B}{x_i p} < A < \frac{B}{x_i q}$$

mâu thuẫn $p < q$. Vậy $f(x_i) \le max\{f(p), f(q)\}$.

Cần nói thêm về trường hợp dấu bằng: g/s $f(x_i) = max\{f(p), f(q)\}$ mà $x_i \notin \{p, q\}$. Nếu $f(x_i) = f(p)$ thì $A = \frac{B}{x_i p} > \frac{B}{x_i p}$, khi đó $f(x_i) - f(p) < 0$ (mâu thuẫn). Tương tự, nếu $f(x_i) = f(q)$ cũng mâu thuẫn. Vậy $f(x_i) = max\{f(p), f(q)\}$ tương đương với $x_i \in \{p, q\}$

**Nhận xét: Ta có bài toán mở rộng sau:*

"Cho $a_i \in [a, A], b_i \in [b, B]$ với $0 < a \le A$ và $0 < b \le B$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$T = \frac{(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)}{a_1 b_1 + ... + a_n b_n}."$$

Nhà toán học Polya đã cho một chặn trên là: $\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2$

Bài toán trên mang ý nghĩa là tìm chặn trên của BĐT Bunhacôpski, một điều rất tự nhiên được đặt ra là chặn trên của BĐT Côsi là gì ? Nếu bạn tò mò thì hãy xem tiếp bài toán sau đây:

Bài toán 4. (Phan Thành Nam) Cho $0 < a < b$, và n số thực $x_i \in [p, q]$. Chứng minh rằng:

$$T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} \leq n + \left[\frac{n}{2}\right] \frac{(p-q)^2}{pq}$$

Lời giải:

Với mọi i, thay x_i bởi p hay q thì ít nhất một trường hợp T phải tăng lên, và nếu T không tăng thì buột $x_i \in \{p, q\}$.

Cho i chạy từ 1 tới n, với mỗi i ta thay x_i bởi p hay q sao cho T tăng lên (hoặc giữ nguyên nếu hai trường hợp đều không tăng)

Sau bước biến đổi trên ta đã có $x_i \in [p, q]$ với mọi i. Nếu $x_i = q$ với mọi i thì $T = n$, không phải GTLN, do đó chỉ cần xét khi $\exists x_i = p$.Do hoán vị vòng quanh nên có thể giả sử $x_1 = p$. Khi đó bất kể $x_3 = p$ hay q ta thay x_2 bởi q thì T vẫn không giảm. Sau khi thay x_2 bởi q ta lại thay x_3 bởi p thì T vẫn không giảm ... Cứ như vậy ta xen kẽ p, q cho tới số x_n thì T vẫn không giảm. Sau khi thực hiện quá trình như trên lúc này ta có

$$T = \frac{n}{2}(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}) \text{ (nếu n chẵn) và } T = \frac{n-1}{2}(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}) + 1 \text{ (nếu n lẻ)}$$

Ta viết lại 2 trường hợp dưới dạng:

$$T = n + \left[\frac{n}{2}\right] \frac{(p-q)^2}{pq} \qquad , \forall n$$

và đây chính là vế phải BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x_i \in \{p, q\}$ và xen kẽ kể từ x_1 tới x_n (không kể vòng x_n, x_1). Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn !

Như vậy, chúng ta có thể thấy ý tưởng dồn biến đã xuất hiện rất sớm ngay trong cách tiếp cận cổ điển. Chúng ta đã gặp lại 2 kĩ thuật dồn biến quan trọng ở các mục trước là: dồn biến về tâm và dồn biến ra biên. Đặc biệt trong trường hợp cực trị đạt được tại tâm, hàm lồi còn cho ta một kiểu dồn biến nữa rất thú vị mà chúng ta sẽ tìm hiểu ở mục sau. Mặc dù với một loạt các bài BĐT xuất hiện gần đây thì có vẻ như công cụ cổ điển là không đủ (hoặc rất khó khăn), nhưng một lần nữa, chúng tôi nhấn mạnh tầm quan trọng của những ý tưởng "cổ điển", mà dựa vào đó chúng ta mới có thể "đứng trên vai những người khổng lồ".

7. Dồn biến về giá trị trung bình.

Cho đến bây giờ, trong phương pháp dồn biến của chúng ta, số lần thực hiện thao tác dồn biến luôn là hữu hạn, nhờ đó lời giải là rõ ràng và hoàn toàn sơ cấp. Đây là một điều rất tốt mà chúng tôi muốn duy trì tiếp tục trong mục này.

Trước hết, chúng tôi giới thiệu thêm một cách dồn biến nữa dành cho hàm lồi. Ta sẽ gọi đây là kĩ thuật dồn biến về giá trị trung bình, mà các bạn sẽ thấy rõ điều đó qua kết quả sau:

Định lý: Cho f là hàm lồi $[a, b] \to R$. Ta có:

$$f(a) + f(b) \geq f(x) + f(a + b - x), \forall x \in [a, b]$$

Chứng minh:

Vì $x \in [a, b]$ nên: $x = ta + (1 - t)b$ với $t \in [0, 1]$. Khi đó: $a + b - x = (1 - t)a + tb$. Áp dụng định nghĩa hàm lồi, ta có:

$$\begin{aligned} & f(x) + f(a + b - x) = f(ta + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb) \\ & \leq [tf(a) + (1 - t)f(b)] + [(1 - t)f(a) + tf(b)] = f(a) + f(b) \end{aligned}$$

Ứng dụng kết quả này, ta có ngay chứng minh cho BĐT Jensen. Nhắc lại:

Định lý: (BĐT Jensen) Cho f là hàm số lồi $[a, b] \to R$. Thì với $x_i \in [a, b]$ là n số có trung bình cộng bằng T, ta có:

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq nf(T)$$

Chứng minh:

Ta cho thực hiện thuật toán sau:

***Bước 1:** Nếu $x_i = T, \forall i$ thì dừng lại. Nếu không thì qua bước 2.

***Bước 2:** Vì không có $x_i = T, \forall i$ nên phải có 1 biến lớn hơn hơn T và 1 biến nhỏ hơn T, mà ta có thể giả sử là $x_1 > T > x_2$. Khi đó thay bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ bởi bộ $(T, x_1 + x_2 - T, ..., x_n)$. Sau đó trở lại bước 1.

Như vậy mỗi lần thực hiện bước 2 thì bộ mới cũng có trung bình cộng là T, tuy nhiên nó làm cho biểu thức f tăng lên. Mặt khác mỗi lần thực hiện bước 2 thì số biến bằng T tăng lên ít nhất là 1, do đó sau hữu hạn (có thể lấy là $n-1$) lần thực hiện bước 2, ta sẽ phải dừng lại ở bước 1. Chú ý là trong quá trình thay thế thì biểu thức f tăng lên, do vậy ta có điều phải chứng minh.

Vậy là chúng ta có thêm một cách dồn biến mới. Sỡ dĩ chúng tôi không dưa cách dồn biến này ra ở các mục trước, là vì nó chỉ có giá trị khi dồn biến về tâm, mà khi đó với $n = 3$ thì kĩ thuật dồn 2 biến về bằng nhau đã đủ sử dụng. Tuy nhiên, kĩ thuật này sẽ phát huy tác dụng khi số biến tăng lên, cụ thể là với trường hợp n biến tổng quát. Lý do khá đơn giản: trong BĐT với n biến, cho dù ta dồn được 2 biến về bằng nhau thì cũng chưa thu được gì đáng kể, và trong trường hợp đó thì sau hữu hạn lần dồn biến vẫn không thể đưa được về trường hợp 1 biến (chứ chưa nói là đưa được về trường hợp các biến bằng nhau). Tuy nhiên, nếu sử dụng kĩ thuật dồn biến ra biên hoặc dồn biến về giá trị trung bình thì tình hình lại khác: sau mỗi lần dồn biến thì số lượng biến có giá trị cố định tăng lên (là giá trị tại biên hoặc giá trị trung bình), do đó chỉ cần hữu hạn lần dồn biến ta sẽ đưa được tất cả các biến về các giá trị cố định và bài toán xem như giải quyết xong.

Tất nhiên, khả năng để có thể dồn 1 biến bất kì về biên hoặc giá trị trung bình là không cao. Tuy nhiên, cái quan trọng là tinh thần của nó: dồn 1 biến về giá trị cố định. Bạn đọc có thể thấy ý tưởng này cực kì hiệu quả trong trường hợp 4 biến (xem câu c), Bài toán 3, $5). Trong mục này, chúng tôi tiếp tục giới thiệu 2 bài toán khác, mà trong đó ý tưởng dồn biến về giá trị trung bình đã cho lời giải bất ngờ. Đây là 2 bài toán đặc sắc của anh Phạm Kim Hùng, mà việc giải quyết chúng đã đem lại cho chúng tôi nhiều ý tưởng mới cho phương pháp dồn biến.

Bài toán 1. Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1 . Chứng minh rằng với $k = 4(n-1)$ ta luôn có:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{k}{a_1 + a_1 + ... + a_n} \geq n + \frac{k}{n} \qquad (1)$$

Lời giải:

Với $n = 1, n = 2$ thì bài toán đơn giản, nên dưới đây ta xét khi $n \geq 3$. Trước hết, ta khảo sát các trường hợp có thể dồn biến và rút ra:

Mệnh đề 1: Kí hiệu $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ là biểu thức vế trái BĐT cần chứng minh.
(i) Nếu $a_1 \leq x \leq a_2$ và $a_1a_2 \leq 1$ thì

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(x, \frac{a_1a_2}{x}, a_3, ..., a_n)$$

(ii) Nếu $(1 - a_1)(1 - a_2)[ka_1a_2 - (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1)] \geq 0$ thì

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$$

(iii) Nếu $a_1, a_2 \geq 1 \geq a_3$ thì:

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq min\{f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n), f(1, a_2, a_1a_3, a_1a_i, ..., a_n)\}$$

Chứng minh mệnh đề 1:
Để viết cho gọn ta đặt $A = \sum_{i=3}^n a_i$.
(i) Ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(x, \frac{a_1a_2}{x}, a_3, ..., a_n)\\
&= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{a_1a_2} + \frac{k}{A + a_1 + a_2} - \frac{k}{A + x + \frac{a_1a_2}{x}}\\
&= \frac{(x - a_1)(a_2 - x)[(A + a_1 + a_2)(A + x + \frac{a_1a_2}{x}) - ka_1a_2]}{a_1a_2(A + a_1 + a_2)(A + x + \frac{a_1a_2}{x})}
\end{aligned}$$

Theo BĐT Cauchy:

$$(A + a_1 + a_2)(A + x + \frac{a_1a_2}{x})) \geq n^2 \geq 4(n - 1) = k \geq ka_1a_2$$

và ta có đpcm.
(ii) Cũng từ đẳng thức ở trên cho $x = 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)\\
&= \frac{(1 - a_1)(1 - a_2)[ka_1a_2 - (A + a_1 + a_2)(A + a_1a_2 + 1)]}{a_1a_2(A + a_1 + a_2)(A + a_1a_2 + 1}
\end{aligned}$$

và ta có đpcm.
(iii) Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $ka_1a_2 \geq (\sum_{i=1}^n a_i)((\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1)])$ thì dùng (ii) ta có $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$.
Trường hợp 2: Nếu $ka_1a_2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i)((\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1)])$ thì vì $a_3 \leq 1 \leq a_2$ nên:

$$ka_1a_3 \leq (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i \neq 1,3} a_i + a_1a_3 + 1)$$

(thật vậy:

$$\frac{\sum_{i\neq 1,3} a_i + a_1a_3 + 1}{a_1a_3} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i - a_1 - a_3 + 1}{a_1a_3} + 1$$
$$\geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i - a_1 - a_2 + 1}{a_1a_2} + 1 = \frac{\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1}{a_1a_2})$$

Do đó, dùng (ii) ta có: $f(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) \geq f(1, a_2, ..., a_1a_i, ..., a_n)$.

Mệnh đề 1 chứng minh xong! Nó sẽ cho phép ta đưa bài toán về 1 biến.

Mệnh đề 2: Ta sẽ luôn đưa được bài toán về trường hợp có $n-1$ biến bằng nhau và ≤ 1.
Chứng minh mệnh đề 2:
***Bước 1:** Đưa về trường hợp có $n-1$ biến ≤ 1.

Giả sử còn có nhiều hơn 1 biến lớn hơn 1, mà ta có thể giả sử là a_1, a_2. Thì sử dụng mệnh đề 1 (iii) ta luôn có thể thay bộ $(a_1, ..., a_n)$ bởi 1 bộ khác, vẫn có tích bằng 1, làm cho f không tăng, và hơn nữa có số biến bằng 1 tăng lên ít nhất là 1. Do đó sau hữu hạn lần thay (không quá $n-1$) ta sẽ có được $n-1$ biến ≤ 1.
***Bước 2:** Đưa $n-1$ biến ≤ 1 về bằng nhau.

Giả sử $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n-1} \leq 1$ là $n-1$ biến có trung bình nhân là x. Nếu $n-1$ biến này chưa bằng nhau thì $a_1 < x < a_{n-1}$ và dùng mệnh đề 1 (i) ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$ bởi $(x, a_2, ..., \frac{a_1a_{n-1}}{x}, a_n)$. Khi đó f khôn giảm và số biến bằng x tăng lên ít nhất là 1. Ta cũng lưu ý là $\frac{a_1a_{n-1}}{x} \leq \frac{a_1}{x} \leq 1$ (vì a_1 là số nhỏ nhất trong $n-1$ số $a_1, ..., a_{n-1}$ nên $a_1 \leq x$), do đó việc thay thế này vẫn đảm bảo $n-1$ biến đều ≤ 1, điều đó cho phép việc thay thế có thể thực hiện liên tiếp. Vậy sau hữu hạn (không quá $n-1$) lần thay thế ta sẽ có $n-1$ biến ≤ 1 đều bằng nhau.

Cuối cùng, ta giải quyết bài toán 1 biến, tức là chứng minh:

$$f(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}}) \geq f(1, 1, ..., 1) \quad \text{với } x \leq 1$$

Đặt:

$$g(x) := f(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}}) = \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{k}{(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}}$$

với $x \in (0, 1]$.
Ta có:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{n-1}{x^2} + (n-1)x^{n-2} - \frac{k[n-1-\frac{n-1}{x^n}]}{((n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}})^2} \\ &= (n-1)\frac{x^n - 1}{x^2}\left(\frac{(n-1)x^n - 1}{(n-1)x^n + 1}\right)^2 \qquad \text{lưu ý là } k = 4(n-1) \end{aligned}$$

Ta thấy ngay $g(x) \leq 0$ với $x \in (0, 1]$, nên $g(x) \geq g(1)$ và ta có đpcm.
Bài toán chứng minh xong!

***Ghi chú:** *Bài toán ban đầu của anh Phạm Kim Hùng là với* $k = 3n, n \geq 4$. *Kết quả ở đây mạnh hơn, và như các bạn thấy trong chứng minh cho trường hợp 1 biến thì só* $k = 4(n-1)$ *"hợp lý" hơn.*

Bài toán 2. Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)...(1 + a_n^2) \leq \frac{2^n}{n^{2n-2}}(a_1 + a_2 + ... + a_n)^{2n-2}$$

Lời giải:

Với $n = 1, n = 2$ thì đơn giản nên ta chứng minh cho $n \geq 3$. Ta thấy bài toán tương đương với $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$ và cũng tương đương với $g(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$, trong đó:

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, ..., a_n) &= k(a_1 + a_2 + ... + a_n)^{2n-2} - (1 + a_1^2)(1 + a_2^2)...(1 + a_n^2) \\ g(a_1, a_2, ..., a_n) &= \ln(k) + (2n-2)\ln(a_1 + a_2 + ... + a_n) + \\ &\quad - \ln(1 + a_1^2) - \ln(1 + a_2^2) - ... - \ln(1 + a_n^2) \end{aligned}$$

(về việc tại sao phải xét cả f và g sẽ bình luận ở sau)

Khảo sát sơ bộ các trường hợp có thể dồn biến, ta có:

•Mệnh đề 1:

(i) Nếu $a_1 \geq 1 \geq a_2, a_3$ thì:

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq min\{f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n), f(a_1, 1, a_2a_3, ..., a_n)\}$$

(ii) Nếu $a_1 = max\{a_i\}_{i=1}^n$ và $a_1 \geq x \geq a_2 \geq 1$ thì:

$$g(a_1, a_2, ..., a_n) \geq g(x, \frac{a_1a_2}{x}, a_3, ..., a_n)$$

Chứng minh mệnh đề 1:
(i) Xét các hiệu

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n) \\
&= ks^{2n-2} - ku^{2n-2} + [2(1 + a_1^2a_2^2) - (1 + a_1^2)(1 + a_2^2)](1 + a_3^2)...(1 + a_n^2) \\
&\qquad\qquad (\text{với } s = a_1 + a_2 + ... + a_n, u = 1 + a_1a_2 + ... + a_n) \\
&= k(a_1 + a_2 - 1 - a_1a_2)(s^{2n-3} + s^{2n-4}u + ... + u^{2n-3}) + \\
&\quad +(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2) \\
&= -(1 - a_1)(1 - a_2)[k(s^{2n-3} + ... + u^{2n-3}) + \\
&\qquad\qquad -(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2)]
\end{aligned}$$

Sử dụng lại đẳng thức ở trên với a_3 đổi chỗ cho a_1, ta có:

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(a_1, 1, a_2a_3, ..., a_n) \\
&= -(1 - a_2)(1 - a_3)[k(s^{2n-3} + ... + v^{2n-3}) + \\
&\qquad\qquad -(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_1^2)(1 + a_4^2)...(1 + a_n^2)] \\
&\qquad\qquad\qquad (\text{với } v = 1 + a_2a_3 + a_1 + a_4 + ... + a_n)
\end{aligned}$$

Từ 2 đẳng thức ở trên, ta thấy:
$*$ nếu $k(s^{2n-3} + ... + u^{2n-3}) - (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2) \geq 0$ (2)
Thì $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$
$*$ nếu $k(s^{2n-3} + ... + v^{2n-3}) - (1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_1^2)(1 + a_4^2)...(1 + a_n^2) \leq 0$ (3)
Thì $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$
Do đó, ta chỉ cần chứng minh trong 2 BĐT (2) và (3) có ít nhất một cái đúng là xong! Chẳng hạn, ta giả sử (2) sai, và sẽ chứng minh (3) đúng. Muốn vậy, ta chỉ cần chứng minh: $u \geq v$ và $(1+a_1)(1+a_3^2) \leq (1+a_3)(1+a_1^2)$ là xong! Điều này có được từ việc tính toán đơn giản:

$$\begin{aligned}
&u - v = a_3 + a_1a_2 - a_1 - a_2a_3 = (1 - a_2)(a_1 - a_3) \geq 0 \\
&(1 + a_1)(1 + a_3^2) - (1 + a_3)(1 + a_1^2) = (a_3 - a_1)(a_1a_3 + a_1 + a_3 - 1) \leq 0
\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề (i) chứng minh xong!
(ii) Với việc xuất hiện hàm ln ta không thể xét hiệu rồi biến đổi, mà thay

vào đó ta dùng đạo hàm.
Xét:

$$g(t) = \ln(k) + 2(n-1)\ln(ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + ... + a_n) +$$
$$- \ln(1 + t^2a_1^2) - \ln(1 + \frac{a_2^2}{t^2}) - \ln(1 + a_3^2) - ... - \ln(1 + a_n^2)$$

với $t \in [\sqrt{a_2/a_1}, 1]$.
Ta có:

$$g'(t) = \frac{2(n-1)(a_1 - \frac{a_2}{t^2})}{ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + ... + a_n} - \frac{2ta_1^2 - \frac{2a_2^2}{t^3}}{(1 + t^2a_1^2)(1 + \frac{a_2^2}{t^2})}$$
$$= 2(a_1 - \frac{a_2}{t^2})[\frac{(n-1)}{ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + ... + a_n} - \frac{ta_1 + \frac{a_2}{t}}{(1 + t^2a_1^2)(1 + \frac{a_2^2}{t^2})}]$$

Vì $t \in [\sqrt{a_2/a_1}, 1]$ nên $a_1 - \frac{a_2}{t} \geq 0$. Do đó, gọi T là thừa số còn lại, ta chỉ cần chứng minh $T \geq 0$ là có thể suy ra g đồng biến (trên $[\sqrt{a_2/a_1}, 1]$).

Để viết cho gọn, ta đặt

$$c = \sqrt{(1 + t^2a_1^2)(1 + \frac{a_2^2}{t^2})}, d = ta_1 + \frac{a_2}{t}$$

Ta có:

$$T \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n-1}{d + a_3 + ... + a_n} \geq \frac{d}{c^2} \Leftrightarrow (n-1)c^2 \geq d^2 + d(a_3 + ... + a_n)$$

Vì $c \geq d$ (BĐT Bunhiacopski) nên để có BĐT trên ta chỉ cần:

$$(n-2)c \geq a_3 + ... + a_n$$

Điều này đúng vì $c > a_1a_2 \geq a_1 \geq max\{a_3, ..., a_n\}$.

Lấy $t_0 = max\{x, \frac{a_1a_2}{x}\}/a_1$, thì

$$t_0 \in [\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, 1], t_0a_1 = max\{x, \frac{a_1a_2}{x}\}, \frac{a_2}{t_0} = min\{x, \frac{a_1a_2}{x}\}$$

Vì g đồng biến trên $[\sqrt{a_2/a_1}, 1]$ nên $g(1) \geq g(t_0)$ và ta có đpcm.

Vậy mệnh đề (ii) chứng minh xong! Mệnh đề 1 chứng minh xong!

Trở lại bài toán, ta sẽ nói là bộ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ được thay thế bởi bộ $(b_1, b_2, ..., b_n))$ nếu $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(b_1, b_2, ..., b_n)$ **hoặc** $g(a_1, a_2, ..., a_n) \geq g(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Mệnh đề 2: Luôn đưa được về trường hợp có $n-1$ biến bằng nhau ≥ 1.
Chứng minh mệnh đề 2:
*__Bước 1:__ Đưa về trường hợp có $n-1$ biến ≥ 1.

Giả sử còn có 2 biến $a_2, a_3 < 1$. Khi đó phải có 1 biến > 1, mà ta có thể giả sử là a_1. Sử dụng mệnh đề 1 (i), ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ bởi bộ $(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$ hoặc bộ $(a_1, 1, a_2a_3, ..., a_n)$. Chú ý là cho dù thay bởi bộ nào, thì số các biến bằng 1 cũng tăng lên ít nhất là 1. Do đó, động tác thay thế này sẽ phải dừng lại sau không quá $n-1$ lần. Khi đó, ta sẽ có $n-1$ biến ≥ 1.
*__Bước 2:__ Ta chứng minh luôn có thể thay $n-1$ biến ≥ 1 bởi trung bình nhân của chúng. Thật vậy, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{n-1} \geq 1 \geq a_n$ và đặt $x = \sqrt[n-1]{a_1, a_2, ..., a_{n-1}} \geq 1$. Nếu trong $n-1$ biến đầu tiên vẫn còn biến khác x thì $a_1 > x > a_{n-1}$. Sử dụng mệnh đề (ii) ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$ bởi bộ $(x, a_3, ..., \frac{a_1a_2}{x}, a_n)$. Chú ý là $\frac{a_1a_{n-1}}{x} \geq a_{n-1} \geq 1$ (vì a_1 là số lớn nhất trong các số $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$ nên $a_1 \geq x$) cho nên việc thay thế này vẫn đảm bảo $n-1$ biến đầu tiên ≥ 1 (để có thể thay thế liên tiếp). Chú ý rằng sau khi thay thế thì số biến bằng x tăng lên ít nhất là 1. Do đó, sau không quá $n-1$ lần thay thế thì cả $n-1$ biến đầu tiên đều bằng x.

Cuối cùng ta giải quyết bài toán 1 biến.
Xét hàm số $h(x) := g(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}})$

$$= \ln(k) + 2(n-1)\ln((n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}) - (n-1)\ln(1+x^2) - \ln(1 + \frac{1}{x^{2n-2}})$$

với $x \geq 1$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 2(n-1)\frac{n-1-\frac{n-1}{x^n}}{(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}} - \frac{2(n-1)x}{1+x^2} - \frac{-\frac{2(n-1)}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n-2}}} \\
&= \frac{2(n-1)}{x}\left(\frac{(n-1)(x^n-1)}{(n-1)x^n+1} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^{2n-2}}\right) \\
&= \frac{2(n-1)}{x}\left(\frac{(n-1)(x^n-1)}{(n-1)x^n+1} - \frac{x^{2n}-1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}\right)
\end{aligned}$$

Chú ý là $x \geq 1$ nên để có $h'(x) \geq 0$ ta chỉ cần:

$$\frac{n-1}{(n-1)x^n+1} \geq \frac{x^n+1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}$$

Ta đạt được điều này bằng đánh giá đơn giản:

$$\frac{n-1}{(n-1)x^n+1} \geq \frac{1}{x^n+1} \geq \frac{x^n+1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}$$

(Có dấu $\geq$ thứ hai là do BĐT Bunhiacopski)
Vậy với $x \geq 1$ thì $h'(x) \geq 0$ nên $h(x)$ đồng biến, suy ra $h(x) \geq h(1) = 0$ và ta có đpcm.
Vậy bài toán chứng minh xong! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$ với $n \geq 3$ (còn với $n = 1, n = 2$ thì có đẳng thức).

***Nhận xét:**
1) Bài toán này do anh Phạm Kim Hùng đặt ra dưới dạng bài toán mở và chứng minh trên đây của chúng tôi là chứng minh đầu tiên cho nó.
2) Ở đây việc xét đồng thời 2 hàm f, g cho phép ta mở rộng khả năng dồn biến: khi thì xét f đơn giản hơn, khi thì xét g đơn giản hơn. Trong bài toán 1 thì vì vấn đề đơn giản hơn nên chỉ cần một hàm f là đủ.

8. Định lý dồn biến tổng quát.

Các bạn thân mến, nói về các định lý dồn biến phải nhắc tới 2 kết quả đầu tiên hết sức ấn tượng, là định lý dồn biến mạnh (SMV) của anh Phạm Kim Hùng và định lý dồn biến không xác định (UMV) của bạn Đinh Ngọc An. Trong đó, "xương sống" của các định lý này là bổ đề dãy số, một kết quả cho ta cảm giác rõ ràng thế nào là dồn biến.

Trong mục này, chúng tôi sẽ cung cấp cho các bạn một định lý dồn biến rất tổng quát – định lý GMV của anh Phan Thành Nam – với một cách tiếp cận mới. Có thể trình bày ngắn gọn bằng cách dẫn ra định lý và chứng minh nó, tuy nhiên chúng tôi không làm như vậy vì muốn chia sẽ với các bạn cả con đường (trong tư duy) để xây dựng nó. Hi vọng là sau khi xem xong, các bạn sẽ có cảm giác là có vô số định lý dồn biến.

Chúng ta bắt đầu bằng một số định nghĩa trong không gian R^n.

Định nghĩa 1:
• Không gian R^n là tập hợp các bộ thứ tự $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ với $x_i \in R, \forall i$.
• Một dãy $\{x_m = (x_{1,m}, ..., x_{n,m})\}$ trong R^n gọi là hội tụ về $z = (z_1, ..., z_n) \in R^n$ nếu từng dãy $x_{i,m}$ hội tụ về z_i khi $m \to \infty, \forall i = 1, 2, ..., n$.
• Cho $D \subset R^n$. Một hàm số $f : D \to R$ gọi là liên tục trên D nếu: với mọi dãy $\{x_m\} \subset D$ và với mọi $z \in D$ sao cho $\{x_m\}$ hội tụ về z, thì ta đều có: $f(x_m)$ hội tụvề $f(z)$.

Định nghĩa 2: Cho $D \subset R^n$. Ta nói:
• D đóng nếu với mọi dãy $\{x_m\} \subset D$ và với mọi $z \in R^n$ sao cho $\{x_m\}$ hội tụ về z, thì ta đều có $z \in D$.
• D bị chặn nếu tồn tại số thực M sao cho: $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in D\}$, thì $|x_i| \leq M, \forall i = 1, 2, ..., n$.

Ví dụ như một tập hợp hữu hạn thì đóng và bị chặn.

Xuất phát điểm của chúng ta là kết quả tuyệt đẹp sau đây:

Định lý 1: Cho D đóng và bị chặn trong R^n, và $f : D \to R$ liên tục. Thì f đạt giá trị nhỏ nhất trên D, nghĩa là tồn tại $x_0 \in D$ sao cho: $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in R$.

Đây là một kết quả cơ bản và có trong chương trình phổ thông ở các nước, tuy nhiên ở nước ta thì nó được xem là thuộc "Toán cao cấp". Tuy nhiên, để tiện lợi cho bạn đọc chúng tôi dẫn ra đây một chứng minh mà các bạn hoàn toàn có thể hiểu được với kiến thức phổ thông.

Chúng tôi nhắc lại một kết quả có trong SGK: " mọi dãy số thực đơn điệu và bị chặn thì hội tụ". "Tiên đề" này sẽ được sử dụng để chứng minh một kết quả về dãy con.

Định nghĩa 2: Cho 1 dãy số $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ (trong R hoặc trong R^n). Một dãy $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ được gọi là một dãy con của dãy $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ nếu $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy tăng ngặt các số nguyên dương.

**Ví dụ:* $\{a_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ là một dãy con của dãy $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$. Dưới đây các cận của chỉ số sẽ được bỏ qua nếu không gây hiểu lầm.

***Bổ đề* 1:** (Weierstrass) Mỗi dãy a_m bị chặn trong R thì có 1 dãy con hội tụ.
Chứng minh:

Ta chứng minh có một dãy con đơn điệu là xong.

Xét tập $T := \{m \in Z^+ | \exists m' > m$ sao cho $a_{m'} \geq a_m\}$. Nếu T hữu hạn thì dãy $\{a_m\}$ sẽ giảm kể từ 1 chỉ số nào đó. Nếu T vô hạn thì ta sẽ trích được 1 dãy con tăng. Trong cả hai trường hợp thì ta luôn có 1 dãy con đơn điệu.

Bổ đề 2: (Weierstrass) Mỗi dãy a_m bị chặn trong R^n thì có 1 dãy con hội tụ.
Chứng minh:

Xét $\{a_m = (x_{1,m}, ..., x_{n,m})\}$ là một dãy bị chặn trong R^n. Khi đó dãy $\{x_{1,m}\}$ bị chặn trong R nên có 1 dãy con $\{x_{1,m_{k_1}}\}$ hội tụ. Dãy $\{x_{2,m_{k_1}}\}$ cũng bị chặn trong R nên có 1 dãy con $\{x_{2,m_{k_2}}\}$ hội tụ. Bằng cách lấy "dãy con của dãy con" liên tiếp như vậy, cuối cùng ta thu được dãy con $\{a_{m_k} = (x_{1,m_k}, ..., x_{n,m_k}\}$ mà $\forall i = 1, 2, ..., n$, ta có dãy $\{x_{i,m_k}\}$ hội tụ trong R. Điều đó cũng có nghĩa là dãy $\{a_{m_k}\}$ hội tụ trong R^n.

Bổ đề 3: (Tính đầy đủ của R) Cho A là 1 tập bị chặn trong R. Thì tồn tại $M \in R$ sao cho: $M \leq A$ (nghĩa là $M \leq a, \forall a \in A$) và có 1 dãy $\{a_k\}$ trong A hội tụ về M. Ta sẽ kí hiệu $M = infA$.
Chứng minh:

Ta chứng minh rằng $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a - \varepsilon \leq A$. Giả sử ngược lại. Khi đó lấy $x_1 \in A$ tùy ý, bằng quy nạp ta xây dựng được dãy $\{x_m\}$ trong A sao cho $x_{m+1} \leq x_m - \varepsilon$, $\forall m \in Z^+$. Khi đó ta có: $x_m \leq x_1 - (m-1)\varepsilon$, $\forall m \in Z^+$ và điều này mâu thuẫn với A bị chặn dưới.

Như vậy, $\forall m \in Z^+$, tồn tại $a_m \in A$ sao cho $a_m - \frac{1}{m} \leq A$. Vì dãy $\{a_m\}$ bị chặn nên có dãy con $\{a_{m_k}\}$ hội tụ về M trong R. Ta chứng minh $M \leq A$ nữa là xong. Thật vậy, lấy $a \in A$ bất kì thì $a_{m_k} - \frac{1}{m_k} \leq a$, $\forall k \in Z^+$, nên cho $k \to \infty$ suy ra $M \leq a$.

Chứng minh định lý 1: Xét $A = f(D)$. Ta chứng minh A có phần tử nhỏ nhất.

Ta sẽ chỉ ra A có tính chất sau: nếu dãy $\{a_m\}$ chứa trong A và $a_m \to \alpha$ thì $\alpha \in A$. Thật vậy, theo định nghĩa ta có $x_m \in D$ sao cho $f(x_m) = a_m \to \alpha$. Vì dãy $\{x_m\}$ bị chặn (chứa trong D) nên có dãy con $\{x_{m_k}\}$ hội tụ về c trong R^n. Vì D đóng nên $c \in D$. Vì $f(x_m) \to \alpha$ nên Vì $f(x_{m_k}) \to \alpha$. Mặt khác, vì $\{x_{m_k}\} \to c$ và f liên tục nên $f(x_{m_k}) \to f(c)$. Vì giới hạn là duy nhất nên $f(c) = \alpha$.

Bây giờ, ta thấy A bị chặn dưới (vì từ lập luận trên với $\alpha = -\infty$ ta sẽ gặp mâu thuẫn). Do đó tồn tại $M = infA$. Do định nghĩa inf và tính chất của A vừa chỉ ra ở trên, suy ra $M \in A$. Vậy A có phần tử nhỏ nhất là M. Định lý chứng minh xong!

Định lý 1 là một mở rộng của một kết quả quen thuộc có trong SGK: "Cho $[a, b]$ là 1 khoảng đóng trong R và $f : [a, b] \to R$ liên tục, thì f có giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$". Do đó, về mặt trực giác thì định lý 1 khá rõ ràng. Tuy nhiên, có thể các bạn sẽ khó hình dung là định lý này thì liên quan gì đến vấn đề dồn biến? Hệ quả sau đây của định lý 1 sẽ là "chìa khóa" cho các định lý dồn biến của chúng ta. Lưu ý rằng tất cả các kết quả trong mục này không cần điều kiện f đối xứng.

Định lý 2: Cho:
- D là 1 tập đóng, bị chặn trong R^n, và Λ là 1 tập con đóng của D.
- $T : D \to D$ là một phép biến đổi bất kì.
- $f : D \to R$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(x) > f(T(x)), \forall x \in D \backslash \Lambda$.

Thì ta có GTNN của f đạt được trên Λ, nghĩa là:

$$f(x) > \min_{y \in \Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D \backslash \Lambda.$$

Chứng minh:

Do định lý 1, tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$. Nếu x_0 không thuộc Λ thì $f(x_0) > f(T(x_0))$, mâu thuẫn. Vậy $x_0 \in \Lambda$ và ta có điều phải chứng minh.

**Ghi chú:* Ta thấy phép biến đổi $T : D \to D$ nhưng thực ra trong định lý trên chỉ đòi hỏi tính chất của T trên $D \backslash \Lambda$. Do đó với $x \in \Lambda$ thì $T(x)$ có thể lấy giá trị tùy ý và ta có thể xem như $T(x) = x$. Quy ước này sẽ được sử dụng trong phần còn lại, nghĩa là $T(x) = x, \forall x \in \Lambda$ và ta chỉ quan tâm giá trị của T trên $D \backslash \Lambda$.

Đây là một hệ quả quá đơn giản phải không các bạn, tuy nhiên ý tưởng dồn biến của nó đã lộ rõ. Để minh họa, chúng tôi dẫn ra đây một chứng minh cho BĐT Cauchy.

Bài toán 1: (BĐT Cauchy) Cho n số thực không âm $x_1, ..., x_n$. Chứng minh rằng:

$$x_1 + ... + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 ... x_n}$$

Chứng minh:

Bằng cách chuẩn hóa, ta có thể giả sử $x_1 ... x_n = 1$ và chứng minh $x_1 + ... + x_n \geq n$. Tất nhiên ta chỉ cần xét khi $x_i \leq n, \forall i$.

Xét: $D = \{x = (x_1, ..., x_n) | x_i \in [0, n], x_1 ... x_n = 1\}$ thì dễ thấy D đóng và bị chặn. Xét $\Lambda = \{x_0 = (1, 1, 1, ..., 1)\}$.

Xét $f : D \to R$ liên tục như sau: với mỗi $x = (x_1, ..., x_n) \in D$

thì $f(x) = x_1 + ... + x_n$. Xét $T : D\backslash\Lambda \to D$ như sau: Với mỗi $x = (x_1, ..., x_n) \in D\backslash\Lambda$, thì tồn tại $x_i \neq x_j$ và ta đặt $T(x)$ là bộ thu được từ x sau khi thay x_i và x_j bởi trung bình nhân của chúng, khi đó dễ thấy $f(x) - f(T(x)) = (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 > 0$.

Vậy ta có thể áp dụng định lí 2 để suy ra $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$, hơn nữa dấu "$=$" chỉ xảy ra khi $x = x_0$.

Trong nhiều trường hợp, có thể hàm f sẽ không đủ tốt và ta sẽ chỉ có có điều kiện $f(x) \geq f(T(x))$. Tất nhiên khi đó ta không thể áp dụng định lý 1. Một đòi hỏi hợp lý là phép biến đổi T phải đủ tốt để bù lại (nhớ là phép biến đổi T là do ta chọn). Điều này đưa đến:

Định lý 3: Cho:
• D là 1 tập đóng, bị chặn trong R^n, và Λ là 1 tập con đóng của D.
• $T : D \to D$ là 1 phép biến đổi sao cho tồn tại một hàm số h liên tục $D \to R$ thỏa mãn: $h(T(x)) < h(x), \forall x \in D\backslash\Lambda$.
• $f : D \to R$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(x) \geq f(T(x)) \forall x \in D$.

Thì ta có GTNN của f trên D cũng là GTNN của f trên Λ, nghĩa là:

$$f(x) \geq \min_{y \in \Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D.$$

Mặc dù là trường hợp riêng của một định lý tổng quát hơn ở cuối bài, nhưng vì tầm quan trọng của định lý này nên chúng tôi vẫn dẫn ra đây một chứng minh cho nó.

Chứng minh:

Lấy $y_0 \in \Lambda$ sao cho $f(y_0) = \min_{y \in \Lambda}\{f(y)\}$. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $z \in D$ sao cho $f(z) < f(y_0)$. Tất nhiên ta có thể giả sử $h(x) \geq 0, \forall x \in D$ (nếu không chỉ việc thay h bởi $h' = h - M$, với M là GTNN của h trên D). Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có: $f(z) + \varepsilon h(z) < f(y_0)$. Đặt $g(x) := f(x) + \varepsilon h(x)$, $\forall x \in D$. Thì $g : D \to R$ liên tục, $g(x) > g(T(x)) \forall x \in D\backslash\Lambda$ và $g(z) < f(y_0) \leq \min_{y \in \Lambda}\{g(y)\}$. Điều này mâu thuẫn với định lý 2.

Sau đây là một hệ quả ấn tượng của định lý 3.

Hệ quả 1: (SMV-Strongly Mixing Variables) Cho:
• $D \in R^n$, $D = \{x = (x_1, ..., x_n) | x_i \geq \alpha, \sum x_i = ns = const\}$ và $s_0 := (s, s, ..., s) \in D$.
• Phép biến đổi $T : D \to D$ như sau: với mỗi phần tử $a = (a_1, .., a_n) \in D$, $a \neq s_0$, ta chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ nào đó (tùy theo hàm f bên dưới) sao cho

$a_i \neq a_j$, rồi thay a_i, a_j bởi trung bình cộng của chúng.
• $f : D \to R$ là hàm số liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$.
Khi đó: $f(a) \geq f(s_0), \forall a \in D$.
Chứng minh: Với phép biến đổi T như vậy, ta chọn $h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \forall x = (x_1, ..., x_n) \in D$. Áp dụng định lý 3 (ở đây $\Lambda = \{s_0\}$).
**Nhận xét:* Thông thường, trong áp dụng ta sẽ lấy a_i, a_j là min và max của $\{a_1, ..., a_n\}$. Khi đó, có thể chứng minh từ 1 phần tử bất kì của D, sau vô hạn lần lặp T sẽ thu được $(s, s, ..., s)$, và sử dụng tính liên tục của f ta cũng thu được kết luận.

Riêng trong trường hợp này (min và max) thì không nhất thiết thay a_i, a_j bởi trung bình cộng mà có thể tổng quát hơn:
Hệ quả 2: Cho:
• $D \in R^n$ đóng và bị chặn. Gọi Λ là tập hợp các phần tử trong D có dạng $(s, s, ..., s)$, và giả sử Λ khác rỗng.
• Phép biến đổi $T : D \to D$ như sau: với mỗi phần tử $a = (a_1, .., a_n) \in D \backslash \Lambda$, ta chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ sao cho a_i, a_j là min và max của $\{a_1, ..., a_n\}$, sau đó thay a_i, a_j bởi $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$.
• $f : D \to R$ là hàm số liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$.
Khi đó:

$$f(x) \geq \min_{y \in \Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D.$$

Chứng minh: Một cách tự nhiên, ta hi vọng vào hàm

$$h(a) = max\{a_1, ..., a_n\} - min\{a_1, ..., a_n\}, \forall a = (a_1, ..., a_n) \in D$$

Tuy nhiên, ta không có ngay $h(a) > h(T(a))$, $\forall a \in D \backslash \Lambda$. Đó là vì trong n số $a_1, ..., a_n$ có thể có nhiều số bằng nhau và bằng max hay min của $\{a_1, ..., a_n\}$. Nhưng ta chỉ việc thay T bởi $T^* = T^n$ (T^k nghĩa là lặp lại T với k lần) thì $h(a) > h(T^*(a)), \forall a \in D \backslash \Lambda$ và ta có thể áp dụng định lý 3.

Tuy nhiên, đôi khi chỉ 1 phép biến đổi T sẽ không đủ, ví dụ như khi ta chưa biết chính xác là dồn biến về biên hay về tâm. Do đó, định lý 3 được mở rộng thành định lý dồn biến tổng quát sau đây.

Định lý 4: (GMV – General Mixing Variables) Cho:
• D là 1 tập đóng, bị chặn trong R^n, và Λ là 1 tập con đóng của D.
• $T_j : D \to D$ là các phép biến đổi sao cho tồn tại các hàm số h_j liên tục $D \to R$ thỏa mãn: $h(T_j(x)) < h_j(x)$,$\forall x \in D \backslash \Lambda$, $\forall j \in \{1, ..., k\}$.

• $f: D \to R$ liên tục thỏa mãn $f(x) \geq \min\limits_{j \in \{1,\ldots,k\}} \{f(T_j(x))\}, \forall x \in D$.

Thì $f(x) \geq \min\limits_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$.

Ta sử dụng lại chứng minh của định lý 3 cùng với 1 cải tiến nhỏ.

Chứng minh:

Lấy $y_0 \in \Lambda$ sao cho $f(y_0) = \min\limits_{y \in \Lambda} \{f(y)\}$. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $z \in D$ sao cho $f(z) < f(y_0)$. Tất nhiên ta có thể giả sử $h_j(x) \geq 0, \forall x \in D, \forall j = 1, \ldots, k$. Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có: $f(z) + \varepsilon h_j(z) < f(y_0), \forall j = 1, \ldots, k$. Đặt $g_j(x) := f(x) + \varepsilon h_j(x)$, $\forall x \in D, \forall j = 1, \ldots, k$.

Đặt $g(x) = min\{g_1(x), \ldots, g_k(x)\}, \forall x \in D$. Thì $g: D \to R$ liên tục, $g(x) > g(T(x)) \forall x \in D \backslash \Lambda$ và $g(z) < f(y_0) \leq \min\limits_{y \in \Lambda} \{g(y)\}$. Điều này mâu thuẫn với định lý 2.

**Chi chú:* Ta đã sử dụng kết quả là nếu g_j là các hàm liên tục thì $g = min\{g_1, \ldots, g_k\}$ cũng là hàm liên tục. Tất nhiên ta chỉ cần chứng minh với $k = 2$, và trong trường hợp này thì chỉ cần để ý là $min\{g_1, g_2\} = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 - |g_1 - g_2|)$. Còn sự kiện $g(x) > g(T(x)), \forall x \in D \backslash \Lambda$ thì rất rõ ràng, vì nếu $u_j > v_j, \forall j = 1, \ldots, k$ thì $min\{u_1, \ldots, u_k\} > min\{u_1, \ldots, u_k\}$.

Các bạn thân mến, tuy hình thức phát biểu ngắn gọn nhưng GMV có tầm ứng dụng cực kì rộng rãi. Cứ mỗi một (hay một vài) phép biến đổi T thích hợp là ta lại có một định lý dồn biến mới. Chúng tôi kết thúc mục này bằng một hệ quả của GMV, mà có thể xem là sự mở rộng của SMV ở Hệ quả 2. Cũng xin lưu ý rằng các kết quả có tên SMV và UMV ở đây tổng quát hơn so với các định lý cùng tên mà chúng tôi đã dẫn ra ban đầu.

Hệ quả 3: (UMV – Undefined Mixing Variables) Cho:

• $D \subset \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n | x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n\}$, D đóng và bị chặn. Gọi Λ là tập hợp các phần tử trong D có t thành phần bằng 0 và $n - t$ thành phần bằng nhau ($t \geq 0$).

• 2 phép biến đổi $T_1, T_2 : D \to D$ như sau: với mỗi phần tử $a = (a_1, .., a_n) \in D \backslash \Lambda$, chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ sao cho $a_i = min\{a_t > 0, t = 1, \ldots, n\}$ và $a_j = max\{a_1, \ldots, a_n\}$, sau đó thay a_i, a_j bởi $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$ (ứng với T_1) và $\alpha' < a_i < a_j < \beta'$ (ứng với T_2).

• $f: D \to R$ liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq min\{f(T_1(a)), f(T_1(a))\}, \forall a \in D$.

Thì

$$f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D.$$

Chứng minh:

Chọn $h_1(a) = max\{a_1, ..., a_n\} - min\{a_1, ..., a_n\}$ và $h_2(a) = -h_1(a)$, $\forall a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Tương tự như hệ quả 2, ta thay T_1 bởi $T_1^* = T_1^n$ và $T_2^* = T_2^n$ để có: $h_1(a) > h_1(T_1^*(a))$, $h_2(a) > h_2(T_2^*(a))$, $\forall a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Áp dụng GMV ta có điều phải chứng minh.

9. Nhìn lại.

Các bạn thân mến, có lẽ bây giờ là lúc tạm dừng để nhìn lại hành trình vừa qua. Như chúng tôi đã nói trong $6, dồn biến đã được biết đến từ rất sớm thông qua hàm lồi và dẫn đến các kết quả tuyệt đẹp. BĐT Jensen có thể xem như một tiêu chuẩn để dồn biến về tâm một cách toàn cục. Về các kết quả này, các bạn có thể tìm đọc một cách rất đầy đủ trong cuốn "Bất đẳng thức" nổi tiếng của 3 nhà toán học $Hardy - Polya - Littewood$.

Trong trường hợp 3 biến, có lẽ quen thuộc nhất với bạn đọc là những BĐT lượng giác, chẳng hạn như:

$$sinA + sinB + sinC \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

$$cosA + cosB + cosC \le \frac{3}{2} \qquad (2)$$

với A, B, C là 3 cạnh 1 tam giác.

BĐT (1) có thể thu được ngay bằng cách áp dụng BĐT Jensen cho hàm lồi. BĐT (2) thì tinh tế hơn, hàm $f(x) = -cosx$ có $f''(x) = cosx$ nên chỉ lồi trên $[0, \pi]$. Do đó ta không thể áp dụng ngay BĐT Jensen cho 3 biến A,B,C. Tuy nhiên, ta có thể giả sử $A \le B \le C$ và khi đó thì $A, B \in [0, \pi]$ nên ta có thể dồn 2 biến A, B về bằng nhau. Sau đó bài toán chỉ còn một biến và trở nên đơn giản.

Như vậy, tư tưởng dồn biến đã dần lộ rõ. Thay vì mong muốn có ngay một cách dồn biến toàn cục, chúng ta hi vọng có thể từng bước đơn giản bài toán bằng cách giảm dần số biến. Đây chính là tư tưởng chính của phương pháp dồn biến. Trong trường hợp 3 biến, sau khi thực hiện được động tác dồn biến (bất kể là về 2 biến bằng nhau, hay dồn 1 biến ra biên, hay dồn 1 biến về giá trị trung bình) thì gần như bài toán chỉ còn 1 biến và xem như giải quyết đơn giản. Do đó, phép dồn biến không cần tác dụng với 2 biến bất kì mà có thể tận dụng thứ tự sắp được giữa các biến nếu BĐT là đối xứng.

Các bạn thân mến, chúng tôi dành ra 3 mục để khảo sát vấn đề dồn biến cho BĐT 3 biến cũng chỉ là để các bạn nắm được tư tưởng của phương pháp, chứ không phải liệt kê tất cả các kĩ thuật cần thiết. Chẳng hạn như dồn biến trong BĐT lượng giác với các BĐT tuyệt đẹp của Jackgarfulkel (xem phần bài tập) cũng khá thú vị. Tuy nhiên chúng tôi nghĩ rằng trình bày tất cả sẽ nhàm chán và vô vị, vì một khi nắm được tư tưởng chính thì các bạn có thể áp dụng trong vô vàn trường hợp khác nhau.

Đọc xong phần BĐT 3 biến, có lẽ bạn đọc sẽ có cảm giác là hình như mọi BĐT đều có thể chuyển về trường hợp 2 biến bằng nhau hoặc 1 biến đạt giá trị tại biên. Phải nói rằng điều này đúng cho hầu hết các BĐT mà chúng ta đã gặp. Tuy nhiên, ngay sau đây chúng tôi sẽ cung cấp cho các bạn một ví dụ nằm ngoài "thông lệ" đó. Trong ví dụ này, thậm chí BĐT đang xét là đa thức đối xứng thuần nhất 3 biến. Ví dụ này lấy từ ý tưởng của anh Bùi Việt Anh.

Bài toán 1. Cho $a, b, c \geq 0$. Khi đó BĐT:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 6abc)^2 + ((a + b + c)^3 - 36abc)^2 \geq 0$$

chỉ xảy ra dấu "=" trong trường hợp $(a, b, c) = (t, 2t, 3t), t \geq 0$ (và các hoán vị).

Bạn đọc tự kiểm tra điều đó.

Như vậy, các bạn có thể yên tâm là phương pháp dồn biến có ý nghĩa.

Với bài toán 4 biến thì thông thường chúng ta phải thực hiện hơn 1 lần động tác dồn biến nên sẽ phức tạp hơn. Trong trường hợp n biến tổng quát thì việc dồn biến trở nên cực kì khó khăn. Ngoài BĐT Jensen cho phép dồn 1 lúc cả n biến (nhưng đáng tiếc, nó chỉ giải quyết được 1 lượng khá nhỏ các BĐT) thì gần như ta không có công cụ nào khác. Trong trường hợp này, thông thường quy nạp cũng là một ý hay. Chúng tôi dẫn ra đây một ví dụ cho thấy sự tinh tế của chứng minh quy nạp trong BĐT.

Bài toán 2. (Phạm Kim Hùng) Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng với mọi $k > 0$ thì:

$$\frac{1}{(1 + a_1)^k} + \frac{1}{(1 + a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1 + a_n)^k} \geq \min\{1, \frac{n}{2^k}\}$$

Bài toán này đã được đưa lên Diễn Đàn Toán Học với tên gọi là Thách Thức 1, và là một bài rất khó. Tuy nhiên, nó sẽ vô cùng đơn giản nếu ta

làm việc với bài toán tổng quát hơn:
"Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng $s \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi $k > 0$ thì:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\{1, \frac{n}{1+\sqrt[n]{s}}\}."$$

Với bài toán tổng quát hơn này thì lại có thể chứng minh bằng quy nạp. Thật vậy, xét bài toán với n số, ta có thể giả sử $a_n = min\{a_1, ..., a_n\}$. Khi đó áp dụng giả thiết quy nạp cho $(n-1)$ số $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ có tích ≥ 1, ta đưa được ngay bài toán về 1 biến. Công việc còn lại chỉ là khảo sát hàm một biến.

Một kĩ thuật khác để đưa các BĐT n biến về 1 biến là dồn biến về giá trị trung binh trong $7. Như chúng tôi đã chỉ ra, ý tưởng cách dồn này dựa trên cách dồn biến về giá trị trung bình cho hàm lồi. Đây là cách dồn biến rất tốt vì nó có tính hữu hạn. Tuy nhiên, nó chỉ áp dụng được cho các bài cực trị đạt được tại tâm.

Bây giờ ta phải đối mặt với khả năng cực trị đạt tại cả tâm và biên. Rõ ràng khả năng dồn về một biến là không cao. Do đó chúng ta hi vọng vào điều tốt nhất là có một cách dồn biến toàn cục, đại loại như BĐT Jensen. Với mục tiêu đó, 2 định lý tuyệt đẹp phải kể đến là định lý SMV (dồn biến mạnh) và UMV (dồn biến không xác định). Hai định lý này có thể nói là "anh em song sinh". SMV dùng để "chuyên trị" các BĐT cực trị đạt được tại tâm, trong đó cải tiến đáng kể nhất là không cần dồn được 2 biến bất kì về bằng nhau mà chỉ cần dồn biến lớn nhất và biến nhỏ nhất. UMV thì đòi hỏi giả thiết đặt lên 2 biến bất kì, tuy nhiên nó cho phép ta dung hòa cả 2 trường hợp cực trị đạt được tại tâm và tại biên dưới một dạng tổng quát. Để cho hình thức đơn giản, 2 định lý này đều chỉ xét cho hàm đối xứng.

Chúng tôi đã quan sát 2 kết quả trên và nhận thấy sự không cần thiết của việc tách rời 2 trường hợp, và đã tìm ra một kết quả hội tụ đầy đủ ưu điểm của 2 định lý trên. Tuy nhiên nó chỉ là một trường hợp riêng của Hệ quả 3 trong $8. Định lý GMV không chỉ đơn thuần là tổng quát 2 định lý kể trên, mà nó mở ra một chân trời mới với vô vàn các kiểu dồn biến . Một điều kì lạ là ở đây chỉ đòi hỏi: nếu bộ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ chưa rơi vào các trường hợp "tới hạn" (tức là thuộc Λ), thì luôn có thể thay thế bằng 1 bộ (là $T(x)$). Nếu như trong SMV ("cổ điển"), sự kiện dồn 2 biến, lớn nhất và nhỏ nhất, về bằng nhau có thể dẫn đến một cảm nhận rõ ràng là n biến sẽ tiến về giá trị trung bình, thì trong trường hợp này bổ đề dãy số không còn tác dụng. Tuy nhiên, kết quả vẫn được chỉ ra.

Các bạn thân mến, các bạn đã cùng chúng tôi đi trên một hành trình, mà chúng tôi chọn vì nó tốt nhất chứ không phải là đầy đủ nhất. Có nhiều vấn đề chúng tôi không đưa ra, hoặc không trình bày kĩ, vì chúng tôi không coi trọng sự đầy đủ. Cái mà chúng tôi coi trọng là cố gắng để các bạn thấy được vấn đề một cách nhanh chóng, rõ ràng và hợp lý. Hi vọng với những tư tưởng mà chúng tôi đã khơi gợi các bạn sẽ đủ cảm hứng và khả năng để tiếp bước trên con đường sáng tạo.

Cuối cùng, chúng tôi muốn gửi lời cảm ơn đặc biệt tới anh Phan Thành Nam và anh Phạm Kim Hùng, những người đã có rất nhiều kết quả và ý tưởng được sử dụng. Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn tất cả tác giả các bài toán, các nguồn trích dẫn, trong đó có thầy Phạm Văn Thuận – người đã cung cấp cho chúng tôi một tài liệu về dồn biến có giá trị.

10. Bài tập.

Sau đây là một số bài tập dành cho bạn đọc. Hi vọng các bạn sẽ tìm được nhiều niềm vui khi thử sức với chúng. *(ghi chú: Θ bài dễ, Φ bài trung bình, Ξ bài khó, Ψ bài cực khó)*

Θ **Bài tập 1:** (Asian Pacific Math.2004) Giả sử a, b, c là các số dương tùy ý. Chứng minh BĐT

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

Θ **Bài tập 2:** (MOSP 2001) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương có tích bằng 1 thì ta có BĐT

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$$

Θ **Bài tập 3:** Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Θ **Bài tập 4:** (Huỳnh Tấn Châu) Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$.Chứng minh rằng:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}$$

Θ **Bài tập 5:** Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ thì ta có BĐT:

$$7(xy + yz + zx) \leq 12 + 9xyz$$

Φ **Bài tập 6:** (Chọn đội tuyển Việt Nam 1996) Cho a, b, c là các số thực bất kì, chứng minh rằng:

$$F(a, b, c) = (a + b)^4 + (b + c)^4 + (c + a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4) \geq 0$$

Φ **Bài tập 7:** (Phạm Văn Thuận−Zhao Bin). Giả sử x, y, z là ba số thực không âm nhưng chỉ có nhiều nhất một số bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{y^3 + z^3} + \frac{1}{z^3 + x^3} \geq \frac{20}{(a + b + c)^3}$$

Φ **Bài tập 8** (Phạm Kim Hùng). Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c không âm ta luôn có BĐT:

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2 + bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2 + ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2 + ab}} \geq \frac{4}{a + b + c}$$

Φ **Bài tập 9:** (Murray Klamkin) Chứng minh rằng với các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 2, thì

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \leq 3$$

Ξ **Bài tập 10:** (Tổng quát RMO2000) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm hằng số $k > 0$ nhỏ nhất sao cho BĐT sau luôn đúng:

$$a^k + b^k + c^k \geq ab + bc + ca$$

Ξ **Bài tập 11:** (Trung Quốc 2005) Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1/3$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\leq 3$$

Ξ **Bài tập 12:** (mathlinks) Cho $a,b,c\geq 0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\geq \frac{5}{2}$$

Ξ **Bài toán 13** Cho $a,b,c\in[p,q]$ với $0<p\leq q$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Bài toán 14.(Jackgarfulkel) Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:
Φ a)

$$sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}\geq\frac{4}{3}(1+sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2})$$

Φ b)

$$cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}+cos\frac{C}{2}\geq\frac{4}{\sqrt{3}}(1+cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2})$$

Φ **Bài toán 15.**(Jackgarfulkel) Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$cos(\frac{A-B}{2})+cos(\frac{B-C}{2})+cos(\frac{C-A}{2})\geq\frac{2}{\sqrt{3}}(sinA+sinB+sinC)$$

Ξ **Bài toán 16** (Phan Thành Nam) Cho ba sỗ thực x,y,z không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}\geq 2$$

Ξ **Bài tập 17** (Vasile Cirtoaje) Xét ba số thực không âm a,b,c thỏa điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\leq\frac{9}{2}$$

Ξ **Bài tập 18:** (Phan Thành Nam) Cho $a, b, c \geq 0$ và thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:
a) (VMEO1)

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{12}} \leq \sqrt{3}$$

b)

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{a+k(b-c)^2} \leq \sqrt{3}$$

Trong đó $k = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ξ **Bài toán 19** (Phan Thành Việt) Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi p là nửa chu vi của tam giác và m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến tương ứng hạ từ A, B, C xuống các cạnh đối diện. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \leq \sqrt{3p^2 + \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]}$$

Bài tập 20: (Phan Thành Nam) Cho $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x+y+z=0$. Chứng minh rằng
Ξ a)

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2} \geq 3$$

Ψ b)

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 3$$

Φ **Bài tập 21** (Phạm Kim Hùng) Cho $x, y, z, t \geq 0$ và $x+y+z+t=4$. Chứng minh rằng:

$$(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t) \leq 125 + 131xyzt$$

Φ **Bài tập 22** (Bất đẳng thức Tukervici) Với mọi số thực dương a, b, c, d thì

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2$$

Φ **Bài tập 23** (Phạm Văn Thuận– Nguyễn Anh Tuấn) Xét 4 số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} + \frac{1}{1-db} + \frac{1}{1-ca} \leq 8$$

Ξ **Bài tập 24** (Phạm Kim Hùng) Cho các số thực không âm a, b, c, d, k có tổng bằng 4. Chứng minh rằng

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k \leq max\{4, (\frac{4}{3})^{3k}\}$$

Ξ **Bài tập 25** (Phan Thành Nam)
Cho các số thực x, y, z, t thỏa: $max\{xy, yz, zt, tx\} \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1 - xy + y^2} + \sqrt{1 - yz + z^2} + \sqrt{1 - zt + t^2} + \sqrt{1 - tx + x^2}$$
$$\geq \sqrt{16 + (x - y + z - t)^2}$$

Ψ **Bài tập 26** (Phan Thành Nam) Cho các số thực $x, y, z, t \in [-1, 1]$ thỏa mãn $x + y + z + t = 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + x + y^2} + \sqrt{1 + y + z^2} + \sqrt{1 + z + t^2} + \sqrt{1 + t + x^2} \geq 4$$

(*Ghi chú: Bài này xuất phát từ trường hợp ba số trong bài $20a$, dĩ nhiên sẽ khó hơn rất nhiều. BĐT tương tự với 5 số không còn đúng nữa)

Φ **Bài tập 27** (Vasile Cirtoaje) Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ không âm và có tổng bằng n thì

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + na_1a_2...a_n \geq n^2$$

Ξ **Bài tập 28:** (Phạm Kim Hùng) Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n. Tìm gtnn của biểu thức

$$S = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_1a_2...a_n(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n})$$

Ξ **bài tập 29** Tìm hằng số dương k_m tốt nhất để BĐT sau luôn đúng với mọi dãy số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng n

$$(1 + mx_1)(1 + mx_2)...(1 + mx_n) \le (m + 1)^n + k_m(x_1x_2...x_n - 1)$$

trong đó m là hằng số dương bất kì.

Bài toán 30 (Phan Thành Việt) Cho $a_1, a_2, ..., a_n, s, k$ là các số thực dương thỏa mãn: $a_1a_2...a_n = s^n$ và $n - 1 = \frac{n}{(1+s)^k}$. Xét BĐT:

$$\frac{1}{(1 + a_1)^k} + \frac{1}{(1 + a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1 + a_n)^k} \le n - 1$$

Θ a) Chứng minh rằng BĐT trên nói chung không đúng.
Φ b) (VMO 1999) Chứng minh BĐT trên đúng trong trường hợp $k = 1$.
Ψ c) Tìm tất cả các giá trị k (tùy thuộc n) để BĐT trên đúng.

ABC METHOD
ABSTRACT CONCRETENESS

---NGUYỄN ANH CƯỜNG ---

A. Lời giới thiệu

Một lần nữa tôi lại có dịp gặp lại các bạn với một phương pháp chứng minh bất đẳng thức mới. Nếu như phương pháp chính phương hoá đã khơi dậy trong ta bao nhiêu sự thích thú và thỏa thuê khi hàng trăm bài bất đẳng thức khó đã ngã rạp trước sức mạnh của nó thì tôi tin chắc các bạn sẽ còn hạnh phúc hơn với phương pháp này. Các bạn có thể tin được không, khi trước đây chúng ta phải cực khổ lấy giấy nháp ra và biến đối thì bây giờ chúng ta sẽ có thể giải bài toán chỉ với cái lướt nhìn đầu tiên. Nào chúng ta hãy cùng nhau thưởng thức viên kim cương này sẽ cắt bánh chưng ra sao nhé J.

B. Phương pháp ABC

Tôi xin mở đầu phương pháp này bằng việc xét một số bài toán sau:

Bài 1:

Cho $ab+bc+ca=1$ và

i) $a+b+c=m, m\in\left[-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right]$. Tìm điều kiện của abc sao cho a,b,c là các số thực.

ii) $a+b+c\in\left[\sqrt{3},+\infty\right], a,b,c\geq 0$. Tìm điều kiện abc sao cho a,b,c là các số thực không âm.

Giải:

Chúng ta đã có hai đại lượng trung bình của a,b,c. Sự xuất hiện của abc khiến chúng ta liên tưởng tới định lý Viete, vì vậy ta nghĩ tới việc xét phương trình;

$X^3-mX^2+X-abc=0(*)$

Yêu cầu của đề bài tương đương với việc, tìm điều kiện của abc để

i) Phương trình (*) có ba nghiệm thực.

ii) Phương trình (*) có ba nghiệm không âm.

Đặt $f(X)=X^3-mX^2+X-abc$

Ta có: $f'(X)=3X^2-2mX+1$.Phương trình có hai nghiệm

$$X_1=\frac{m+\sqrt{m^2-3}}{3};X_2=\frac{m-\sqrt{m^2-3}}{3}$$

X	$-\infty$		X_2		X_1		$+\infty$
$f'(X)$		+	0	-	0	+	
$f(X)$		↗		↘		↗	

Phương trình có ba nghiệm khi và chỉ khi $f(X_2)\geq 0$, $f(X_1)\leq 0$

Từ đây suy ra: $$\frac{(6+2m^2)X_2-m}{9}\leq abc\leq\frac{(6+2m^2)X_1-m}{9}(1)$$

Đây cũng chính là đáp số của câu i).

Câu ii) , nhận xét rằng để a,b,c là các số thực dương thì ngoài việc phải thoả mãn (1), abc còn chịu thêm ràng buột $0 \le abc$, và ngược lại với $(1), abc \ge 0, a+b+c \ge 0, ab+bc+ca \ge 0$ thì $a,b,c \ge 0$. Vậy nên đáp số sẽ là:

$$\max\left\{0, \frac{(6+2m^2)X_2 - m}{9}\right\} \le abc \le \frac{\left(6+2m^2\right)X_1 - m}{9} \quad (2)$$

Như vậy là ta đã hoàn thành hai câu hỏi được nêu ra của bài toán.

Bài tóan trên giúp ta rút ra hai nhận xét sau:

Nhận xét i)

- Điều kiện cần và đủ để tồn tại các số thực a,b,c khi đã biết trước các giá trị $ab+bc+ca=1$ và $a+b+c=m, m \in \left[-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right]$ là $\frac{(6+2m^2)X_2 - m}{9} \le abc \le \frac{\left(6+2m^2\right)X_1 - m}{9}$.
- Điều kiện cần và đủ để tồn tại các số thực không âm a,b,c khi đã biết trước các giá trị $ab+bc+ca=1$ và $a+b+c \in \left[\sqrt{3}, +\infty\right]$ là $\max\left\{0, \frac{(6+2m^2)X_2 - m}{9}\right\} \le abc \le \frac{\left(6+2m^2\right)X_1 - m}{9}$.
    - Nhận xét 1 được suy ta trực tiếp từ bài toán đã nêu, chú ý rằng tại sao $a+b+c$ lại bị ràng buộc chạy trong các đoạn như trên. Có hai cách giải thích sau:
        - $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) = 3$
        - $f'(X) = 3X^2 - 2mX + 1$ buộc phải không hoàn toàn dương, hay nói cách khác là phương trình $f'(X) = 0$ phải có nghiệm, tức $\Delta' = m^2 - 3 \ge 0$
    - Nhận xét 1 còn cho ta thêm điều gì, thay vì phải sử dụng một bộ (a,b,c) với $a,b,c \in R$ để biễu diễn tất cả các phần tử của tập R^3 thõa $ab+bc+ca=1$, ta có thể sử dụng bộ $(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ với sự ràng buộc của $a+b+c$ và abc như đã nêu. Cũng hoàn toàn tương tự khi ta muốn biễu diễn tất cả các phần tử của tập R^{+^3} thoã $ab+bc+ca=1$.

Nhận xét ii)

- a.Với mỗi bộ số thực (a_0, b_0, c_0) đều tìm được hai bộ $(x_0, x_0, y_0);(z_0, z_0, t_0)$ sao cho

  $*\, a_0 + b_0 + c_0 = x_0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0$

  $*\, a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = x_0x_0 + x_0y_0 + y_0x_0 = z_0z_0 + z_0t_0 + t_0z_0$

  $*\, x_0x_0y_0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$

  Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0, b_0, c_0) bằng nhau.
- b.Với mỗi bộ số thực không âm (a_0, b_0, c_0) ta đều tìm được một trong hai bộ $(x_0, x_0, y_0);(z_0, z_0, t_0)$ hoặc $(0, x_0, y_0);(z_0, z_0, t_0)$ thõa mãn điều kiện sau

  $*\, a_0 + b_0 + c_0 = x_0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0$

  $*\, a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = x_0x_0 + x_0y_0 + y_0x_0 = z_0z_0 + z_0t_0 + t_0z_0$

  $*\, x_0x_0y_0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$

  Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0, b_0, c_0) bằng nhau.

  Hay

  $*\, a_0 + b_0 + c_0 = 0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0$

  $*\, a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = x_0y_0 = z_0z_0 + z_0t_0 + t_0z_0$

  $*\, 0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$

Đẳng thức xảy ra khi một trong ba biến (a_0, b_0, c_0) bằng 0.

- Nhận xét hai là không hiển nhiên và nó cũng chính là nguồn gốc của phương pháp này. Nhận xét 2 này có điều gì thú vị, chú ý rằng mọi biểu thức đối xứng $f(a,b,c)$ theo ba biến a,b,c đều có thể biễu diễn thành $g(A,B,C)$ thông qua 3 dại lượng trung bình
  - $A = a + b + c$
  - $B = ab + bc + ca$
  - $C = abc$

  Do đó theo một lẽ thông thường với suy nghĩ giảm số biến, ta sẽ cố định A, B và cho C chạy. Ta mong đợi hàm g đạt cực trị khi C đạt các giá trị biên. Tuy nhiên ta không cần biết một cách cụ thể C sẽ đạt gía trị biên khi nào, ta chỉ cần biết một cách trừu tượng khi C đạt giá trị biên thì a,b,c sẽ có hình thù ra sao, và nhận xét 2 sẽ cho ta lời giải cho câu hỏi này.

- Bây giờ chúng ta sẽ đi vào việc chứng minh chi tiết nhận xét 2:

a) Trước hết ta sẽ chứng minh bài toán với các bộ số thực (a_0, b_0, c_0) thỏa mãn: $a_0 + b_0 + c_0 = m$ và $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = 1$. Thông qua bài toán 1, với các ký hiệu X_1, X_2 được giữ nguyên, ta có:

$$Min = \frac{(6+2m^2)X_2 - m}{9} \le a_0b_0c_0 \le \frac{(6+2m^2)X_1 - m}{9} = Max$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét thử xem khi $a_0b_0c_0$ đạt giá trị biên thì hình thù của a_0, b_0, c_0 sẽ ra sao.

Xét phương trình $f(X) = X^3 - mX^2 + X - Min = 0(*)$. Ta có:

$f'(X) = 3X^2 - 2mX + 1$ có hai nghiệm là $X_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 3}}{3}; X_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 3}}{3}$ như đã nêu lên ở bài toán 1. Hơn thế nữa $f(X_2) = 0$, hay nói cách khác $f(x) = 0$ và $f'(x) = 0$ có cùng một nghiệm là X_2. Vậy nên phương trình $f(X) = 0$ phải có nghiệm kép, giả sử nghiệm kép đó là x_0, x_0 và nghiệm còn lại là y_0. Như vậy theo định lý Viet ta sẽ có :

$* x_0 + x_0 + y_0 = m = a_0 + b_0 + c_0$

$* x_0x_0 + x_0y_0 + y_0x_0 = 1 = a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0$

$* x_0x_0y_0 = Min \le a_0b_0c_0$

Chứng minh hoàn toàn tương tự với sự tồn tại của (z_0, z_0, t_0)

Như vậy là ta đã chứng minh được bài toán đã nêu trong trường hợp $a_0 + b_0 + c_0 = m$ và $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = 1$. Với một tư tưởng hoàn toàn tương tự, bạn đọc hãy chứng minh sự tồn tại cho trường hợp: $a_0 + b_0 + c_0 = m$ và $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = -1$

Bây giờ giả sử $a_0 + b_0 + c_0 = M$ và $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = \pm N$ thì liệu các bộ (x_0, x_0, y_0) và (z_0, z_0, t_0) có tồn tại không. Câu trả lời là có, thực vậy, xét các số $(a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{a_0}{\sqrt{|N|}}, \frac{b_0}{\sqrt{|N|}}, \frac{c_0}{\sqrt{|N|}}\right)$ thỏa mãn điều kiện:

$a_1 + b_1 + c_1 = \frac{M}{\sqrt{|N|}}, a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1 = \pm 1$. Như vậy theo chứng minh trên thì các bộ $(x_1, x_1, y_1), (z_1, z_1, t_1)$ là tồn tại. Nhận xét rằng ta có thể xây dựng các bộ (x_0, x_0, y_0) và (z_0, z_0, t_0) như sau: $(x_0, x_0, y_0) = \left(\sqrt{|N|}x_1, \sqrt{|N|}x_1, \sqrt{|N|}z_1\right)$ và $(z_0, z_0, t_0) = \left(\sqrt{|N|}z_1, \sqrt{|N|}z_1, \sqrt{|N|}t_1\right)$. Thực vậy:

$* x_0 + x_0 + y_0 = \sqrt{|N|}(x_1 + x_1 + z_1) = \sqrt{|N|}(z_1 + z_1 + t_1) = z_0 + z_0 + t_0 = \sqrt{|N|}\dfrac{M}{\sqrt{|N|}} = M = a_0 + b_0 + c_0$

$* x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0 = |N|(x_1 x_1 + x_1 y_1 + y_1 x_1) = z_0 z_0 + z_0 t_0 + t_0 z_0 = |N|(z_1 z_1 + z_1 t_1 + t_1 z_1) = \pm|N| = \pm N$

$* x_0 x_0 y_0 = \left(\sqrt{|N|}\right)^3 x_1 x_1 y_1 \le \left(\sqrt{|N|}\right)^3 a_1 b_1 c_1 = a_0 b_0 c_0 = \left(\sqrt{|N|}\right)^3 a_1 b_1 c_1 \le \left(\sqrt{|N|}\right)^3 z_1 z_1 t_1 = z_0 z_0 t_0$

Như vậy là ta đã chứng minh được hoàn chỉnh câu (a). Ý tưởng chứng minh câu (b) là hoàn toàn tương tự và xin được nhường cho bạn đọc

----

Bài 2:

Mọi đa thức f đối xứng theo các biến a,b,c đều có thể biễu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c$. Và $\deg(abc) \le \dfrac{\deg(f)}{3}$.

Giải:

Nhận xét rằng ta chỉ cần chứng minh sự biễu diễn cho các dạng đa thức sau, vì một đa thức đối xứng bất kỳ đều có thể được biễu diễn thông qua sự kết hợp của các dạng này bằng các phép nhân thêm hệ số và $+,-$ (elementary operation):

$I(n) = a^n + b^n + c^n$

$II(m,n) = a^m b^n + a^n b^m + b^m c^n + c^n b^m + c^m a^n + a^m c^n \qquad m \ge n \ge p \ge 0$

$III(m,n,p) = a^m b^n c^p + a^m b^p c^n + b^m a^n c^p + b^m a^p c^n + c^m a^n b^p + c^m a^p b^n$

Tuy nhiên, nhận xét rằng

- III có thể biễu diễn qua II cùng với abc như sau: $C = (abc)^p II(m-p, n-p)$
- II có thể biễu diễn qua I như sau: $II = I(m)I(n) - I(m+n)$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh I có thể biễu diễn qua $abc, ab+bc+ca, a+b+c$. Ta sẽ chứng minh điều này bằng phương pháp quy nạp:

Với $n = 0,1$, mệnh đề đã cho hiển nhiên đúng.

Giả sử ta đã chứng minh được $I(k)$ có thể biễu diễn thành đa thức thông qua các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c, \forall k \le K$. Nhận xét rằng điều này cũng đúng đối với $II(m,n)$ và $III(m,n,p)$ $\forall m \ge n \ge p \ge 0 : m+n \le K$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh tính biễu diễn của $I(K+1)$. Ta có:

$I(K+1) = (a+b+c)I(K) - II(K,1)$

Đồng thời: $II(K,1) = (ab+bc+ca)I(K-1) - III(K-1,1,1)$.

Do đó: $I(K+1) = (a+b+c)I(K) - (ab+bc+ca)I(K-1) + III(K-1,1,1)$.

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp, các biểu thức $I(K), I(K-1), III(K-1,1,1)$ đều có thể biễu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c$. Điều này cho ta kết luận tính đúng đắn của mệnh đề đã nêu

Như vậy, mệnh đề đã nêu đã được chứng minh thông qua nguyên lý quy nạp.

Tính chất $\deg(abc) \le \dfrac{\deg(f)}{3}$ được suy ra khá hiển nhiên, bởi lẽ biểu thức abc có bậc là 3 đối với các biến a,b,c. Do đó khi coi abc là một biến bậc 1 thì bậc của abc phải không lớn hơn $\dfrac{1}{3}$ so với bậc của đa thức tính theo các biến a,b,c

Bạn đọc có thể hiểu đa thức tính theo bậc của abc như sau. Giả sử:
$f(a,b,c) = (a+b+c)abc + ab + bc + ca$ vốn là một đa thức bậc 4 theo a,b,c. Nhưng khi tính bậc của đa thức theo biến abc, ta xem $a+b+c$ và $ab+bc+ca$ như các hằng số m,n. Khi đó đa thức được viết lại là: $f(a,b,c) = g(abc) = mabc + n$ là đa thức bậc nhất theo biến abc.

Thông qua hai bài toán trên, chúng ta đã có đầy đủ các kết quả cần thiết (background) để bước vào thế giới ABC, Abstract Concreteness. **J**

ABC Theorem

Định lý 1: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm đơn điệu trên R theo abc thì cực đại và cực tiểu xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

Định lý 2: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm lồi trên R theo abc cực đại xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

Định lý 3: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm lõm trên R theo abc cực tiểu xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

<u>Chứng minh:</u>
Cả ba định lý trên đều được chứng minh thông qua nhận xét ii).
<u>Định lý 1:</u>

- Với mỗi bộ số $(a_0,b_0,c_0) \in R^3$ đều tìm được hai bộ $(x_0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ sao cho
  $*\, a_0+b_0+c_0 = x_0+x_0+y_0 = z_0+z_0+t_0$
  $*\, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0 = x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0 = z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0$
  $*\, x_0x_0y_0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$
  Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0,b_0,c_0) bằng nhau.
- Với mỗi bộ số thực không âm (a_0,b_0,c_0) ta đều tìm được một trong hai bộ $(x_0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ hoặc $(0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ thõa mãn điều kiện sau

$*\, a_0+b_0+c_0 = x_0+x_0+y_0 = z_0+z_0+t_0$
$*\, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0 = x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0 = z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0 \, (1)$
$*\, x_0x_0y_0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$
Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0,b_0,c_0) bằng nhau.
Hay

$$* a_0 + b_0 + c_0 = 0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0$$
$$* a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = x_0 y_0 = z_0 z_0 + z_0 t_0 + t_0 z_0 (2)$$
$$* 0 \le a_0 b_0 c_0 \le z_0 z_0 t_0$$

Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0, b_0, c_0) bằng 0.

- *<u>Cách 1: (Direct Proof)</u>*

Do f là hàm đơn điệu theo biến $a_0 b_0 c_0$ nên hàm số đạt cực đại hay cực tiểu tại các điểm biên của $a_0 b_0 c_0$, hãy giả sử f tăng và ta cần tìm cực đại (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự), ta có

$$f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) \le$$
$$f(z_0 z_0 t_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(z_0 z_0 t_0, z_0 z_0 + z_0 t_0 + z_0 t_0, z_0 + z_0 + t_0)$$

Vậy nên cực đại xảy ra khi có hai biến bằng nhau.

Trong trường hợp $a, b, c \in R^+$, đối với trường hợp tăng tìm cực đại, ta chứng minh hoàn toàn tương tự như trên. Trong trường hợp tăng và tìm cực tiểu (trường hợp giảm cũng chứng minh tương tự), khi cố định $a + b + c, ab + bc + ca$ thì không phải lúc nào abc cũng đạt được cực tiểu khi có hai biến bằng nhau mà đôi khi là khi có một biến bằng 0. Do đó:

$$f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) \ge$$
$$f(x_0 x_0 y_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(x_0 x_0 y_0, x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0, x_0 + x_0 + y_0)$$

hoặc

$$f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) \ge$$
$$f(0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(0, x_0 y_0, x_0 + x_0)$$

Vậy nên cực tiểu sẽ xảy ra khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

Kết hợp mọi trường hợp ta rút ra kết luận như định lý 1.

- *<u>Cách 2: (Contradiction Proof)</u>*

Ta cũng chứng minh cho trường hợp tăng tìm cực đại. Giả sử hàm số đạt cực đại tại điểm (a_0, b_0, c_0) trong đó a_0, b_0, c_0 khác nhau từng đôi một và cực đại là M. Tuy nhiên lại tồn tại một bộ (z_0, z_0, t_0) thoã mãn:

$$M = f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) <$$
$$f(z_0 z_0 t_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(z_0 z_0 t_0, z_0 z_0 + z_0 t_0 + z_0 t_0, z_0 + z_0 + t_0)$$

Điều vô lý này cho phép ta kết luận cực đại xảy ra khi có hai biến bằng nhau

Trong trường hợp $a, b, c \in R^+$, ta lại xét trường hợp tăng và tìm cực tiểu, nếu như hàm số đạt cực tiểu tại điểm (a_0, b_0, c_0) trong đó a_0, b_0, c_0 khác nhau từng đôi một và không có biến nào bằng 0, đặt cực đại là M. Một trong hai trường hợp sau xảy ra:

$$M = f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) >$$
$$f(x_0 x_0 y_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(x_0 x_0 y_0, x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0, x_0 + x_0 + y_0)$$
$$M = f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) >$$
$$f(0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(0, x_0 y_0, x_0 + x_0)$$

Điều vô lý này cho phép ta kết luận cực đại xảy ra khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

<u>Định lý 2 và 3</u> được chứng minh tương tự với các tính chất của hàm lồi và lõm, hàm số lồi đạt cực đại , hàm số lõm đạt cực tiểu khi biến đạt các giá trị ở biên. Chi tiết của chứng minh xin nhường lại cho bạn đọc.

Từ các kết quả trên ta rút ra được một số hệ quả lí thú sau:

ABC Consequence

Hệ quả 1: Hàm số $f\left(a+b+c,ab+bc+ca,abc\right)$ là một đa thức bậc nhất theo abc đạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 2: Hàm số $f\left(a+b+c,ab+bc+ca,abc\right)$ là một tam thức bậc hai theo abc và hệ số bậc cao nhất dương đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 3: Mọi đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 đạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 4: Mọi đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 8 có hệ số của $a^2b^2c^2$ trong biểu diễn qua dạng $f\left(abc,ab+bc+ca,a+b+c\right)$ không âm đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

<u>Chứng minh:</u>

<u>Hệ quả 1:</u>

Đa thức bậc nhất $mx+y$ là hàm đơn điệu. Do đó, theo định lý 1 hàm $f\left(a+b+c,ab+bc+ca,abc\right)$, là đa thức bậc nhất theo abc, đơn điệu nđạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

<u>Hệ quả 2:</u>

Tam thức bậc hai với hệ số dương m^2x^2+nx+p là hàm lồi trên đoạn liên tục. Do đó theo định lý 2 thì đối với hàm số $f\left(a+b+c,ab+bc+ca,abc\right)$, là một tam thức bậc hai theo abc và hệ số bậc cao nhất dương, tức là một hàm lồi nên đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

<u>Hệ quả 3:</u>

Theo bài toán số 2, đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 có thể biễu diễn thành đa thức $f\left(a+b+c,ab+bc+ca,abc\right)$ và là đa thức bậc nhất theo abc (do $\deg(abc)\le\frac{\deg\left(f\right)}{3}=\frac{5}{3}$ suy ra $\deg\left(abc\right)=1$). Do đó theo hệ quả 1 đa thức đạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0

<u>Hệ quả 4:</u>

Theo bài toán số 2, đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 có thể biễu diễn thành đa thức $f\left(a+b+c,ab+bc+ca,abc\right)$ và là tam thức bậc hai theo abc (do $\deg(abc)\le\frac{\deg\left(f\right)}{3}=\frac{8}{3}$ suy ra $\deg\left(abc\right)=2$), hơn nữa hệ số của $a^2b^2c^2$ lại không âm nên theo hệ quả 3 ta đi đến kết luận âm đa th ức đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Các hệ quả trên thật sự là những vũ khí rất lợi hại. Với chúng, ta **có thể tóm gọn một phần rất lớn các bất đẳng thức đối xứng ba biến** , vốn là một thể loại vẫn thường xuyên được ra trong các kì thi học sinh giỏi hiện nay.

C. ABC và Ứng dụng

Bây giờ chúng ta hãy xét qua một số ví dụ cụ thể xem phương pháp này được vận dụng ra sao nhé J

> Bài 1 [Sưu Tầm]
> Cho $x, y, z \in R$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
> Tìm giá trị lớn nhất của $P = 2(x + y + z) - xyz$

Giải:
P đã ở sẵn trong dạng $f(x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$, và điều kiện đối xứng không ràng buộc xyz mà chỉ phụ thuộc vào $x + y + z, xy + yz + zx$ (*). Vậy nên ta có thể đưa bài tóan về việc giải quyết:
Cho $2a^2 + b^2 = 9$
Tìm giá trị lớn nhất của $P = 4a + 2b - a^2 b$
Để tìm giá trị lớn nhất ta thay $a = \sqrt{\frac{9 - b^2}{2}}$ vào P, và cần tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = f(b) = 2\sqrt{2(9 - b^2)} + 2b - \frac{b(9 - b^2)}{2}$$

$$f'(b) = \frac{-4b}{\sqrt{2(9 - b^2)}} - \frac{5}{2} + \frac{3b^2}{2} = 0 \Rightarrow 9b^6 - 87b^2 + 87b - 9 = 0 \Leftrightarrow (b^2 - 1)(9b^4 - 78b^2 + 9) = 0$$

Thay các nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 vào f và ta nhận được $f_{\max} = 10$ khi $a = 2, b = -1$.
(*) Lý luận này có thể giúp ta áp dụng ABC có thể được giải thích theo hai cách như sau:

- Trong ABC, ta chỉ quan tâm đến abc, còn $ab + bc + ca, a + b + c$ ta coi như các hằng số. Do đó chúng bị rang buộc như thế nào cũng không quan trọng
- Chúng ta có thể chuẩn hoá bài toán thành: Tìm giá trị lớn nhất của:
  $P = \frac{6(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - 27xyz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, đây vẫn là một đa thức bậc nhất nếu tính theo biến abc, do $x^2 + y^2 + z^2$ cũng là hằng khi $xy + yz + zx, x + y + z$ là hằng.

> Bài 2 [Nguyễn Anh Cường]
> Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:
> $$i) \frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2}$$
> $$ii) \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} + \frac{1}{4} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}\right)^2$$

Giải:
i) Bất đẳng thức của chúng ta rõ ràng có thể viết được dưới dạng đa thức đối xứng bậc 5

$$P = abc\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{2}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)(ab+bc+ca)\geq 0$$

Và ta chỉ cần xét cực tiểu khi có hai giá trị trong ba biến bằng nhau hay một biến bằng 0.
Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử $a=c$ bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3}+\frac{2}{3}\geq\frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}\Leftrightarrow(a-b)^2\left[\frac{1}{2a^2+b^2}-\frac{2a+b}{3\left(2a^3+b^3\right)}\right]\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^4(a+b)\geq 0.$$

Trường hợp có một số bằng 0, giả sử là c, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2}{3}\geq\frac{ab}{a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+3(a-b)^2\geq 0.$$

ii) Một đa thức đối xứng bậc bảy, nhưng các bạn đừng lo, đó vẫn là đa thức bậc một đối với abc J, do đó theo ta lại có thể áp dụng ABC trong trường hợp này. Ta xét hai trường hợp:
Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử $a=c$ bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2a^3+b^3}{4a^2b}+\frac{1}{4}\geq\left(\frac{2a^2+b^2}{a^2+2ab}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2a^3+b^3}{4a^2b}-\frac{3}{4}\right)\geq\left(\frac{2a^2+b^2}{a^2+2ab}\right)^2-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(2a+b)}{4a^2b}\geq\frac{(a-b)^2\left(3a^2+b^2+2ab\right)}{\left(a^2+2ab\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2\left[\left((2b-a)^2+a^2\right)\right]\geq 0$$

Trường hợp có một biến bằng 0, bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng.

Bài 3 [Iran Olympiad 1996]
Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với các số thực dương a,b,c

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

Bài tóan Iran 96 nổi tiếng, một đa thức đối xứng bậc 6 và là bậc hai đối với abc (**):

$$9[(a+b)(b+c)(c+a)]^2-4(ab+bc+ca)\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right]\leq 0$$

Vậy nên hàm số đạt cực đại khi có hai giá trị bằng nhau hay một số bằng 0.
Trường hợp có hai biến bằng nhau, bất đẳng thức tương đương với

$$\left(a^2+2ab\right)\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{2}{(a+b)^2}\right)\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow(a-b)^2\left[\frac{2a+b}{2a(a+b)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right]\geq 0\Leftrightarrow b(a-b)^2\geq 0$$

Trường hợp có một biến bằng nhau, giả sử là c, bất đẳng thức tương đương với:

$$ab\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow(a-b)^2\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{4(a+b)^2}\right]\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2\left(4a^2+4b^2+7ab\right)\geq 0$$

(**) Tại sao ta có thể kết luận được điều này từ đa thức vừa chuyển thành. Thứ nhất:

$4(ab+bc+ca)\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right]$chỉ chứa abc bậc 1, vì tuy đa thức này là bậc 6, nhưng thực sự ta chỉ cần xét bậc của abc trong $\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right]$, vốn là một đa thức bậc 4.
Còn biểu thức $9[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$ cũng vốn là một đa thức bậc 6, tuy nhiên $(a+b)(b+c)(c+a)$ chỉ chứa nhiều nhất là abc bậc 1, bình phương lên thì hệ số của $a^2b^2c^2$ là không âm.
Như vậy, đôi khi ta không cần khai triển toàn bộ dang biểu thức như thế nào, ta chỉ cần lý luận được hệ số của $a^2b^2c^2$ là đủ để áp dụng định lý ABC.

Bản chất của phương pháp là đánh giá abc, vậy nên việc gặp những bài tóan có bậc đẹp đẽ như vậy là một điều tốt đẹp nhưng không phải lúc nào cũng như vậy, thế nên thủ sẵn các biến đổi sau để đánh giá hàm số theo abc là một điều cần thiết.
MOT SO DANG THUC
Để thuận tiện trong những phần tiếp theo, ta quy ước $a=x+y+z, b=xy+yz+xz, c=xyz.$
Ta sẽ xét qua các đại luợng hoán vị vòng quang của các biến x,y,z sẽ được biễu diễn qua các đại lượng trên ra sao.

$$x^2+y^2+z^2=a^2-2b$$

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=ab-3c$$

$$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)=a^2b-2b^2-ac$$

$$x^3+y^3+z^3=a^3-3ab+3c$$

$$x^4+y^4+z^4=a^4-2a^2b+2b^2+4ac$$

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}=\frac{ab-3c}{c}$$

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=b^2-2ac$$

$$(xy)^3+(yz)^3+(zx)^3=b^3-3abc+3c^2$$

$$(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)=9c^2+(a^3-6ab)c+b^3$$

Dưới đây xin cung cấp cho các bạn một số đánh giá về a,b,c trong các miền khác nhau:
Định lý 1:
Phương trình bậc ba có các nghiệm thực x,y,z khi và chỉ khi $-27c^2+(18ab-4a^3)c+a^2b^2-4b^3\geq 0(1)$
Định lý 2:
Phương trình bậc ba có các nghiệm thực dương x,y,z khi và chỉ khi có (1) và $a>0,b>0,c>0$
Định lý 3:
Phương trình bậc ba có các nghiệm là ba cạnh tam giác khi và chỉ khi có $(1),(2)$ và $a^3-4ab+8c>0.$

Các hệ quả đã nêu tuy hữu hiệu nhưng vẫn còn gặp nhiều hạn chế.
Sau đây một số ví dụ ta không thể làm trực tiếp từ các hệ quả đã nêu mà phải nhờ vào một số biến đổi hay các định lý đã nêu.

<u>Bài 1 [Russia Olympiad 2005]:</u>
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn:
$a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\geq 3$$

Một bất đẳng thức đối xứng, điêu kiện không ràng buột abc, việc đưa về đa thức đối xứng là dễ dàng, tuy nhiên lại lên tới bậc 9, và là bậc ba theo abc L. Điều này nằm ngòai kiểm sóat của các hệ quả, vậy nên ta phải có chút thủ thuậ biến đổi nho nhỏ.

Đặt $x=\frac{bc}{a};y=\frac{ac}{b};z=\frac{ab}{c}$. Bất đẳng thức tương đương với:

$xy+yz+xz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy+z}+\frac{1}{yz+x}+\frac{1}{zx+y}\ge 3(*)$$

Bây giờ thì mọi chuyện trở nên dễ dàng rồi, một đa thức bậc hai theo xyz với hệ số bậc cao nhất không âm, và ta cần tìm cực đại. Ta chỉ cần xét các trường hợp khi có hai biến bằng nhau, hay một biến bằng 0.

Trường hợp 1: $x=z$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2}{xy+x}+\frac{1}{x^2+y}\ge 3 \text{ với } 2xy+x^2=1.$$

Thay $y=\frac{1-x^2}{2x}$, và ta cần chứng minh $\frac{2}{\frac{1-x^2}{2}+x}+\frac{1}{x^2+\frac{1-x^2}{2x}}\ge 3, x\in[0,1]$. Điều này không quá khó khăn và các bạn sẽ có thể giải quyết dễ dàng.

Trường hợp 2: $z=0$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 3 \text{ với } xy=1.$$

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{xy}=3$.

__Bài 2 [Nguyễn Anh Cường]:__

Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}+\sqrt{\frac{2(xy+yz+xz)}{x^2+y^2+z^2}}\ge 1+\sqrt{2}$$

Giấc mộng đưa về dạng đa thức đối xứng coi như tan vỡ. Ta đành đánh giá trực tiếp theo hàm đối với biến xyz. Vẫn với quy ước $a=x+y+z, b=xy+yz+zx, c=xyz$, sử dụng các hằng đẳng thức đã nếu ở trên ta biến bất đẳng thức về dạng:

$$\sqrt{\frac{a^4-2a^2b+2b^2+4ac}{b^2-2ac}}+\sqrt{\frac{2b}{a^2-2b}}\ge 1+\sqrt{2}$$

Hàm theo c là hàm bậc nhất nên đơn điệu. Theo định lý một, cực tiểu xảy ra khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

Trường hợp 1: $x=z$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{\frac{2x^4+y^4}{x^4+2x^2y^2}}+\sqrt{\frac{2(x^2+2xy)}{2x^2+y^2}}\ge 1+\sqrt{2}$$

Do tính thuần nhất của bất đẳng thức này nên ta có thể giả sử $x=1$, khi đó ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{y^4+2}{2y^2+1}}-1 \ge \sqrt{2}-\sqrt{\frac{2(2y+1)}{y^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y^2-1)^2}{2y^2+1+\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)}} \ge \frac{\sqrt{2}(y-1)^2}{y^2+2+\sqrt{(y^2+2)(2y+1)}}$$

Ta có thể đánh giá các mẫu số một cách nhẹ nhàng nhưng vẫn đảm bảo tính đúng đắn của dấu lớn hơn hoặc bằng sau khi đánh giá như sau:

$$\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)} \le \sqrt{2}y^3+\sqrt{2} \Rightarrow 2y^2+1+\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)} \le 2y^2+1+\sqrt{2}y^3+\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{(y^2+2)(2y+1)} \ge y+\sqrt{2} \Rightarrow y^2+2+\sqrt{(y^2+2)(2y+1)} \ge y^2+y+2+\sqrt{2}$$

Do đó công việc còn lại của chúng ta là chứng minh:

$$\frac{(y+1)^2}{\sqrt{2}y^3+2y^2+\sqrt{2}+1} \ge \frac{\sqrt{2}}{y^2+y+2+\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow y^4+y^3+\left(5-\sqrt{2}\right)y^2+\left(5+2\sqrt{2}y \ge 0\right)$$

Trường hợp 2: $z=0$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}}+\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}} \ge 1+\sqrt{2}$$

Ta có: $x^4+y^4 \ge \frac{(x^2+y^2)^2}{2} \ge 2x^2y^2$, do đó:

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}}+\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}} \ge 1+\sqrt{2} \ge \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}}+\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}}\right)$$

$$\ge \sqrt{2}-1+2\sqrt[4]{\frac{x^2+y^2}{2xy}} \ge 1+\sqrt{2}$$

Cuối cùng dưới đây là một số bài tập để các bạn làm quen với phương pháp này:

Bài tập áp dụng

Bài 1 [Sưu tầm]:

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab} \ge \frac{6}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Bài 2:[Darij Grinberg- Old and New Inequality]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Bài 3: [Mircea Lascu – Old and New Inequality]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Bài 4:[Vietnam TST, 1996]

Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a,b,c

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geq \frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

Bài 5:[Nguyễn Anh Cường]

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}}+2\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \sqrt{6}+2$$

D.ABC Upgrade

Như vậy là chúng ta đã phần nào lướt qua sức mạnh của phương pháp này, hy vọng các bạn thấy thích thú với những gì tôi đã trình bày. Trong các phần sau, tôi sẽ lần lượt lướt qua các điểm yếu của phương pháp này và lần lượt giải quyết chúng một cách đáng kể nhất.Việc ngày càng nâng cấp phương pháp vẫn còn là một vấn đề đang được phát triển, chúng tôi rất hoan nghênh các ý tưởng của các bạn về việc nâng cấp phương pháp.

Như các bạn đã thấy, đối với các bài toán bất đẳng thức có sự ràng buột giữa các biến a,b,c, nếu sự rang buột này chỉ liên quan đến $a+b+c$ và $ab+bc+ca$ thì định lý ABC sẽ có cơ hội phát huy sức mạnh. Thế nhưng đối với những bài toán mà bản thân abc bị ràng buột thì sao. Với ý tưởng như vậy, chúng ta sẽ nâng cấp định lý ABC để định lý này có khả năng đối phó với những bài toán thuộc những dạng trên.

ABC Upgrade

i) Cho a,b,c đồng thời là các số thực hoặc là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng $abc, a+b+c$ đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì $ab+bc+ca$ sẽ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

ii) Cho a,b,c đồng thời là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng $abc, ab+bc+ca$ đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì $a+b+c$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

<u>Chứng minh</u>

i) Giả sử $a+b+c=1$ và $abc=m$ (trường hợp $a+b+c=n$ có thể đưa về trường hợp này một cách dễ dàng bằng cách đặt $a=nx, b=ny, c=nz$, bạn đọc cũng đã được xem qua kỹ thuật này trong phần chứng minh định lý ABC ở các phần trên.). Ta sẽ chứng minh $ab+bc+ca$ đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau trong cả hai trường hợp $a,b,c \in R$ và $a,b,c \in R^+$. Đặt $ab+bc+ca=S$

Một lần nữa, ta lại đưa về bài toán tồn tại nghiệm của phương trình:

Đặt $f(X)=X^3-X^2+SX-m$

Ta có: $f'(X)=3X^2-2X+S$ .Phương trình có hai nghiệm

$$X_1=\frac{1+\sqrt{1-3S}}{3}; X_2=\frac{1-\sqrt{1-3S}}{3}$$

Phương trình có ba nghiệm khi và chỉ khi $f(X_2)\geq 0$, $f(X_1)\leq 0$.

Ta có : $f(X_2)\geq 0 \Leftrightarrow (6S-2)X_2+S-9m\geq 0$, giả sử có tập nghiệm là R_{X_2}

$f(X_1)\leq 0 \Leftrightarrow (6S-2)X_1+S-9m\leq 0$, giả sử có tập nghiệm là R_{X_1}

Trước tiên ta sẽ chứng minh cho trường hợp $a,b,c \in R$.

Gọi $S_{\min}, S_{\max}$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trong tập $R_{X_1} \cap R_{X_2}$ (giao của hai tập này khác rỗng, nêu không phương trình không có nghiệm với mọi giá trị của S). Nhận xét rằng hai giá trị này là nghiệm của một trong hai phương trình $(6S-2)X_1 + S - 9m = 0$ hay $(6S-2)X_2 + s - 9m = 0$ (các giá trị này chắc chắn tồn tại, nếu không thì phương trình bậc 3 sẽ có nghiệm khi S chạy tới cộng vô cùng hoặc âm vô cùng), khi đó ta sẽ có $S_{\min} \le S \le S_{\max}$. Bây giờ ta sẽ kiểm tra khi S đạt một trong hai giá trị này thì liệu có tồn tại ba số thực a,b,c không và hình thù của a,b,c sẽ ra sao.

Điều đầu tiên là rõ ràng, vì $S_{\min}, S_{\max} \in R_{X_1} \cap R_{X_2}$. Điều thứ hai, do $S_{\min}, S_{\max}$ là nghiệm của một trong hai phương trình $(6S-2)X_1 + S - 9m = 0$ hay $(6S-2)X_2 + s - 9m = 0$, nên hoặc là $f(X_1) = 0$, hoặc là $f(X_2) = 0$. Khi này phương trình bậc ba đã cho sẽ có nghiệm kép, hay nói cách khác, lúc này hình thù của (a,b,c) là (x,x,y)

Bây giờ ta sẽ chứng minh cho trường hợp $a,b,c \in R^+$. Trước hết ta cần phải có $m \ge 0$. Nhận xét rằng $0 \notin R_{X_1} \cap R_{X_2}$, vì không tồn tại các số thực a,b,c thoả mãn $a+b+c=1, ab+bc+ca=0, abc \ge 0$. Điều này có nghĩa là $R_{X_1} \cap R_{X_2}$ tách biệt thành các khoản mà các cận là cùng âm hoặc cùng dương. Gọi R_3 là tập $R_{X_1} \cap R_{X_2}$ bỏ đi các đoạn âm. Gọi $S_{\min}, S_{\max}$ là các giá trị nhỏ nhất và nhỏ nhất trong tập R_3 này. Và ta lại có: $S_{\min} \le S \le S_{\max}$. Lý luận tương tự như trường hợp R, ta cũng sẽ suy ra được khi S chạm các biên này thì hai trong ba biến (a,b,c) là bằng nhau.

ii) Bạn đọc có thể dễ dàng suy ra chứng minh cho định lý ABC Upgrade 2 sau khi đã xem qua chứng minh 1. Tuy nhiên đối với $a+b+c$ thì không có rang buộc về cận trên khi $a,b,c \ge 0$. Tuy nhiên sẽ có cận dưới do $a+b+c$ đã bị chặn dưới bởi 0. Do đó nên trong trường hợp này chỉ tồn tại $S_{\min}$, cũng vậy, khi này ta đi tới kết luận $a+b+c$ đạt giá trị nhỏ nhất khi hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

Các bạn có thể thấy tư tưởng trừu tượng sự cụ thể (abstract concreteness) rõ rang hơn trong chứng minh trên. Chúng ta không cần biết giá trị nhỏ nhất của $ab+bc+ca$ hay $a+b+c$ cụ thể là bao nhiêu nhưng vẫn có thể chứng minh được khi đạt được giá trị này thì hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

Chúng ta sẽ lướt qua một số ví dụ để xem cách áp dụng của định lý ABC Upgrade này như thế nào:

Bài 1: [Hojoo Lee] Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $abc \ge 1$. Chứng minh rằng:

$$1 \ge \frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a}$$

Giải:

Nhận xét rằng hàm số bên phải giảm khi biến a tăng. Do đó chúng ta chỉ cần chứng minh khi $abc=1$ (đối với trường hợp , $abc = k \ge 1$, ta có:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \le \frac{1}{1+\frac{a}{k}+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+\frac{a}{k}} \le 1)$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$f(a,b,c) = (1+a+b)(1+b+c)(1+c+a) - (1+a+b)(1+b+c) - (1+b+c)(1+c+a) - (1+c+a)(1+a+b) \ge 0$$

Nhận xét rằng bậc của đại lượng $ab+bc+ca$ trong $f(a,b,c)$ chỉ là bậc 1 ($f(a,b,c)$ chỉ là bậc 3 theo a,b,c). Vậy nên khi cố định $a+b+c$ thì $f(a,b,c)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $ab+bc+ca$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi này hai trong ba biến a,b,c bằng nhau. Ta đưa về bài toán:

Cho các số thực dương x,y thoã mãn: $x^2y=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+2x}+\frac{2}{1+x+y}\le 1.$$

Thay $y=\frac{1}{x^2}$ vào bất đẳng thức và ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{1+2x}+\frac{2}{1+x+\frac{1}{x^2}}\le 1 \Leftrightarrow -\frac{2(x-1)^2x(x+1)}{3(1+2x)(x^3+x^2+1)}\le 0$$

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn toàn.

__Bài 2: [Sưu Tầm]__: Cho các số thực dương a,b,c thoã mãn: $a+b+c=3abc$ .Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

__Bài 3 [Bùi Việt Anh]:__ Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a}+2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\ge 2$$

Giải:

Đối với bài toán này thì dù có cố định hai đại lượng nào đi nữa thì chúng ta đều sẽ không thu được một hàm số tốt với biến còn lại (tốt ở đây ngụ ý lồi, lõm hay đơn điệu). Tuy nhiên ở đây, ta sẽ thấy được sự liên hệ giữa hai đại lượng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a}$ và $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, chúng là tổng và tích của các đại lượng $\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}$. Như vậy chúng ta hãy thử chuyển biến theo hướng này xem.

Đặt $x=\frac{a}{b+c},y=\frac{b}{c+a},z=\frac{c}{b+a}$, vấn đề là mối liên hệ của x,y,z thế nào. Ở đây tôi xin đưa ra mối quan hệ, và với mối quan hệ này chúng ta có thể tìm ngược trở lại a,b,c. Và từ đó ta cũng sẽ có bài toán tương đương sau:

Cho $x,y,z\ge 0$ thoã mãn: $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2\Leftrightarrow 2xyz+xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$x+y+z+2\sqrt{xyz}\ge 2$.

Như vậy ta sẽ cố định xyz và $xy+yz+zx$ đưa về bài toán sau:

Cho $a,b\ge 0$ thỏa mãn: $2a^2b+a^2+2ab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $2a+b+2a\sqrt{b}$.

Thay $b=\frac{1-a^2}{2a^2+2a}=\frac{1-a}{2a}\left(a\le 1\right)$, ta cần chứng minh:

$2a+\frac{1-a}{2a}+\sqrt{2a(1-a)}\ge 2$. Thực vậy, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1-a}{2a}+\sqrt{\frac{2a}{1-a}}\left(1-a\right)\ge 2(1-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a}+\sqrt{\frac{2a}{1-a}}\ge 2$$

Mặt khác $\sqrt{\frac{2a}{1-a}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{(1-a)a}} \ge \frac{\sqrt{2}a}{\frac{1-a+a}{2}} \ge 2\sqrt{2}a$.

Do đó: $\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{2a}{1-a}} \ge \frac{1}{2a} + 2\sqrt{2}a \ge 2\sqrt{\frac{1}{2a}2\sqrt{2}a} = 2\sqrt[4]{2} \ge 2$.

Tóm lại bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn toàn.

Cuối cùng, một phần rất quen thuộc và không nên thiếu, đó là phần bài tập cho các bạn áp dụng:

Bài 1:[Sưu tầm]

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y+z}{3} + \sqrt[3]{xyz} \ge \frac{2}{3}\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}\right)$$

Bài 2: [Sưu tầm]

Cho các số thực dương a,b,c thoã mãn: $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \ge 1$$

Bài 3: [Nguyễn Anh Cường]

Cho các số thực dương a,b,c thoã mãn: $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{abc} + \sqrt{a+b+c}$$

E.Mở ô cửa đóng

Trong phần này, tôi sẽ xét qua một lớp các bài toán mà các biến bị chặn trong các tập đóng, vốn là một vấn đề còn chưa được phát triển trong các phần về định lý ABC đã nói ở trên. Đối với lớp bài toán này, chúng ta cũng có một phương pháp khác để giải quyết. Tôi sẽ giới thiệu về phương pháp này trước, sau đó sẽ chúng ta sẽ nghiên cứu về cách ứng dụng ABC trong các bài toán này sau:

Bài toán:
Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$. Chứng minh rằng $f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge C$ trong đó a,b,C là các hằng số cho trước.

Gặp những tình huống như thế này, dấu bằng của bất đẳng thức thường xảy ra tại các giá trị biên, nghĩa là bằng a hay b. Trong những trường hợp như vậy, ta sẽ cố gắng chứng minh $f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge \min\{f(a, x_2, ..., x_n), f(b, x_2, ..., x_n)\}$. Cuối cùng ta sẽ thu được giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được khi một số giá trị bằng a và các giá trị còn lại bằng b. Phương pháp này gọi là phương pháp tiếp cận dấu bằng. Ta sẽ lướt qua một số ví dụ sau:

Bài 1 [Thi đội tuyển toán trường THPT Năng Khiếu]
Cho $a,b,c \in [0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của:
$f(a,b,c) = a+b+c-ab-bc-ca$

Ta sẽ chứng minh $f(a,b,c) \le \max\{f(0,b,c), f(1,b,c)\}(*)$. Ta có chứng minh trực tiếp bằng phương pháp đại số như sau: $(f(a,b,c)-f(0,b,c))(f(a,b,c)-f(1,b,c)) = c(c-1)(1-a-b)^2 \le 0$, từ đó suy ra $(*)$
Hay bằng một cái nhìn giải tích, ta có thể suy ra nhanh chóng hơn với nhận xét hàm số đơn điệu theo biến a.
Và từ đó trực tiếp suy ra $(*)$.
Hoàn toàn thực hiện những bất đẳng thức tương tự đối với các biến b,c, ta sẽ suy ra tính chất sau:
$f(a,b,c) \le \max\{f(0,0,0);f(0,0,1);f(0,1,1);f(1,1,1)\}$. Từ đây có thể dễ dàng kết luận giá trị lớn nhất của $f(a,b,c)$ là 1. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như: $a=b=0, c=1$.

Bài 2 [Nguyễn Anh Cường]
Cho $x,y,z \in [1,2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$C = \frac{xy}{xz+yz} + \frac{xz}{xy+yz} + \frac{yz}{xy+xz}$$

Đối với bài toán này, nếu ta áp dụng ngay việc chứng minh $C(x,y,z) \le \max\{C(1,y,z), C(2,y,z)\}$ thì sẽ gặp khá nhiều khó khăn. Ở đây chúng ta sẽ áp dụng một mẹo nhỏ để làm cho công việc này tương đối đơn giản hơn:

$$C = f(x,y,z) = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}$$

. Đến đây các bạn cũng có thể đoán được chúng ta sẽ làm gì tiếp theo. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}; a,b,c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ và ta cần tìm giá trị lớn nhất của:

$$g(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Ta xẽ coi như b,c là các hằng số, và a là biến : $g''(a,b,c) = \frac{2b}{(c+a)^3} + \frac{2c}{(b+a)^3} > 0$. Như vậy g là hàm lồi theo biến a, tức là g đạt giá trị lớn nhất khi a chạm các biên.
Từ đây ta suy ra được điều mong muốn: $g(a,b,c) \le \max\{g(1,b,c), g(2,b,c)\}$.
Hoàn toàn thực hiện những bất đẳng thức tương tự đối với các biến b,c, ta sẽ suy ra tính chất sau:

$$g(a,b,c) \le \max\left\{g(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}); g(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}); g(1,1,\tfrac{1}{2}); g(1,1,1)\right\}$$

. Từ đây có thể dễ dàng suy ra giá trị lớn nhất của g là $\frac{19}{12}$, đạt được khi $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$, hay giá trị lớn nhất của f là $\frac{19}{12}$, đạt được khi $(x,y,z) = (2,1,1)$.

Như vậy qua hai ví dụ các bạn cũng đã có thể phần nào làm quen được với phương pháp này. Ở đây tôi sẽ nêu ra một phương pháp khác, chứng minh dựa vào định lý ABC.
Trong các phần trên, ta thấy rằng ABC chí áp dụng được khi các biến chạy hoàn toàn trong R hoặc R^+, vậy nên muốn áp dụng ABC, ta phải kéo dãn đoạn đã cho thành R hoặc R^+.

Bài 1 [Thi đội tuyển toán trường PTNK]
Cho $a,b,c \in [0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f(a,b,c) = a+b+c-ab-bc-ca$$

Ta quay lại bài toán này, ta sẽ tìm cách kéo giãn đoạn $[0,1]$ thành R^+. Nhận xét nếu nghịch đảo $a \to \frac{1}{a}$, ta thu được bộ số nằm trong đoạn $[1,+\infty]$. Vẫn chưa biến thành R^+ được, ta lại tiếp tục trừ bộ số cho 1 $\frac{1}{a} \to \frac{1}{a} - 1$ và ta sẽ thu được bộ số nằm trong đoạn $[0,+\infty]$. Như vậy ta đã chuyển $a \to \frac{1}{a} - 1 = x$ để kéo $[0,1] \to [0,+\infty]$.

Từ những ý tưởng như trên, ta sẽ đi tới lời giải sau:

Đặt $a = \frac{1}{1+x}, b = \frac{1}{1+y}, c = \frac{1}{1+z}$ trong đó $x, y, z \in R^+$. Biểu thức đã cho trở thành:

$$f(a,b,c) = g(x,y,z) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+x)(1+y)} - \frac{1}{(1+y)(1+z)} - \frac{1}{(1+z)(1+x)}$$

$$= \frac{(1+y)(1+z) + (1+z)(1+x) + (1+x)(1+y) - 3 - x - y - z}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$= \frac{xy + yz + zx + x + y + z}{xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1}$$

Đến đây bạn đọc cũng có thể dễ dàng thấy $g(x,y,z) \le 1$, không cần áp dụng thêm định lý ABC nữa, tuy nhiên biểu thức này chúng ta đã có thể áp dụng ABC một cách dễ dàng để đưa về trường hợp hai biến.

Có hai lợi thế khi chúng ta kéo dã một tập đóng thành tập R^+ như thế này, thứ nhất là ta có thể áp dụng được định lý ABC như trong trường hợp ở trên, thứ hai là ta có thể đánh giá được dễ dàng hơn, vì ở đây ta sẽ đánh giá các biến với số 0, và điều này lúc nào cũng dễ dàng hơn. Chẳng hạn trong biểu thức trên, đánh giá $xyz \ge 0$ và $\frac{1}{xy + yz + zx + x + y + z} \ge 0$.

Bài 2 [Olympic 30-4 – Thành phố Hồ Chí Minh]

Cho $x, y, z \in [1,2]$. Chứng minh rằng:

$$g(x,y,z) = (x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \le 10$$

Một lần nữa ta sẽ sử dụng kỹ thuật kéo dãn các biến. Ta sẽ sử dụng ABC, trước tiên kéo dãn $[1,2] \to R^+$ như sau: $x \to \frac{1}{x-1} - 2 = a$. Như vậy, đặt

$x=\frac{a+2}{a+1};y=\frac{b+2}{b+1};z=\frac{c+2}{c+1};a,b,c\in R^{+}$. Ta cần chứng min bài toán sau:

$$f(a,b,c)=\left(\frac{a+2}{a+1}+\frac{b+2}{b+1}+\frac{c+2}{c+1}\right)\left(\frac{a+1}{a+2}+\frac{b+1}{b+2}+\frac{c+1}{c+2}\right)\le 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{MN}{(a+1)(b+1)(c+1)(a+2)(b+2)(c+2)}\le 10$$

Ở đó: $M=(a+2)(b+1)(c+1)+(a+1)(b+2)(c+1)+(a+1)(b+1)(c+2)$

$N=(a+1)(b+2)(c+2)+(a+2)(b+1)(c+2)+(a+2)(b+2)(c+1)$

Thật đáng tiếc là bất đẳng thức: $MN-10(a+1)(b+1)(c+1)(a+2)(b+2)(c+2)\le 0$ không thể đánh giá bằng định lý ABC được, do hệ số của $a^2b^2c^2$ cuối cùng thu được là âm (bạn đọc có thể nhẩm ra dễ dàng). Thế nhưng chúng ta không bỏ cuộc một cách dễ dàng, chúng ta sẽ nhờ ABC Upgrade để giải quyết trường hợp này. Cố định abc và $a+b+c$, và ta sẽ thấy biểu thức thu được là đa thức bậc nhất theo $ab+bc+ca.$ Vậy nên ta đi đến kết luận bất đẳng thức đã cho đạt cực trị khi có hai biến bằng nhau. Như vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức:

$$f(a,a,b)=\left(2\frac{a+2}{a+1}+\frac{b+2}{b+1}\right)\left(2\frac{a+1}{a+2}+\frac{b+1}{b+2}\right)\le 10$$

$$\Leftrightarrow \left(2\left(\frac{a+2}{a+1}\right)-\left(\frac{b+2}{b+1}\right)\right)\left(\left(\frac{a+2}{a+1}\right)-2\left(\frac{b+2}{b+1}\right)\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow -(ab+3b)(ab+3a)\le 0$$

Như vậy là bài toán đã được chứng minh.

Sau đây là một số bài tập cho các bạn áp dụng:

Bài 1[Tạp chí toán học và tuổi trẻ]:

Cho $a,b,c\in[1,2]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$A=\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$$

Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ.

Bài 2: [Sưu tầm]

Cho $x,y,z\in[1,2]$. Chứng minh rằng:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

F.Định lý ABC mở rộng

Như vậy là chúng ta đã giải quyết được hai yếu điểm của ABC. Yếu điểm thứ ba dễ nhận ra là ABC chỉ áp dụng được cho các bài toán ba biến, thế còn nhiều biến hơn thì thế nào???. Chúng ta sẽ cùng nhau giải quyết vấn đề này với định lý ABC mở rộng.

Trước hết, chúng ta làm quen với một khái niệm mới nằm trong định lý ABC của chúng ta

I. Khả ABC

1) Định nghĩa

Xét một biểu thức ba biến $f(a,b,c)$.

Ta gọi $f(a,b,c)$ là một biểu thức khả ABC nếu như bất đẳng thức $f(a,b,c)\ge 0$ có thể được chứng minh dựa vào định lý ABC để đưa về hai trường hợp sau:

i) Hai biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0.

2) Phương pháp chứng minh khả ABC

Để chứng minh một biểu thức $f(a,b,c)$ là khả ABC, ta sẽ chuyển biểu thức $f(a,b,c)$ thành biểu thức g đối với các biến $A=a+b+c, B=ab+bc+ca, C=abc$ .Biểu thức $f(a,b,c)$ là một biểu thức khả ABC nếu như $g(A,B,C)$ là một hàm lồi theo biến C.

Ví dụ :

Chứng minh biểu thức sau là khả ABC

$f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)$

Giải:

Đặt $A=a+b+c, B=ab+bc+ca, C=abc$, ta có:

$f(a,b,c)=g(A,B,C)=A^3-3AB+3C+3C-AB+3C=A^3-4AB+9C$

Xét $g(A,B,C)$ theo biến C. Ta có: $g^{'}=9, g^{''}=0$ do đó g là hàm lồi theo biến C. Vậy biểu thức $f(a,b,c)$ là khả ABC.

II. Định lý ABC mở rộng

Xét một biểu thức đối xứng n biến $f(a_1,a_2,...,a_n)$, trong đó f có cực tiểu và $n\ge 3$. Ta sẽ coi $f(a_1,a_2,...,a_n)$ như là một biểu thức ba biến $g(a_1,a_2,a_3)$ với các số $a_4,a_5,...,a_n$ được coi như là các hằng số.

Khi đó nếu g khả ABC thì bất đẳng thức $f(a_1,a_2,...,a_n)\ge 0$ có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

$i)$ m biến bằng nhau, n-m biến bằng nhau.

$ii)$ 1 biến bằng 0.

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng đắn nếu nó được chứng minh tính đúng đắn trong hai trường hợp trên.

Chứng minh:

Ta giả sử f có cực tiểu như giả thiết đã nêu và cực tiểu xảy ra tại điểm $(x_1,x_2,...,x_n)$(*)

Nếu $x_1x_2...x_n=0$ hay x_i chỉ có khả năng nhận một trong hai giá trị cố định thì cực tiểu này không âm theo giả thiết đã nêu trong định lý.

Nếu x_i có khả năng nhận ba giá trị khác nhau và khác 0, ta giả sử (x_1,x_2,x_3) là một bộ mà ba giá trị trong bộ khác 0 và khác nhau từng đôi một. Ta cố định các biến $x_4,x_5,...,x_n$ như là những hằng số và xét hàm $f(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)$ như là hàm $g(x_1,x_2,x_3)$.

Theo giả thiết thì g là khả ABC, vậy nên nó đạt cực tiểu khi có hai số bằng nhau, hay một số bằng 0. Điều này cũng có nghĩa là tồn tại bộ (a,b,c) để $g(x_1,x_2,x_3) > g(a,b,c)$ hay

$f(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n) \geq f(a,b,c,x_4,...,x_n)$.

Điều này mâu thuẫn với giải thiết (*)

Tóm lại thì định lý ABC đã được chứng minh.

III. Ứng dụng ABC mở rộng

Bài toán 1:

Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với các giá trị thực dương của a,b,c,d

$$\frac{3(a^4+b^4+c^4+d^4)}{4abcd} \geq 1 + \frac{3(a^2+b^2+c^2+d^2)}{ab+ac+ad+bc+bd+cd} \quad (*)$$

Giải:

Bất đẳng thức tương đương với:

$$3(a^4+b^4+c^4+d^4)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - 4abcd(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$-12abcd(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 0$$

Đặt:

$$f(a,b,c,d) = 3(a^4+b^4+c^4+d^4)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - 4abcd(ab+ac+ad+bc+bd+cd) -$$
$$12abcd(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Nhận xét rằng nếu cố định biến d thì f là hàm đối xứng theo ba biến, và hơn nữa f khả ABC. Như vậy theo định lý ta sẽ chỉ phải xét các trường hợp sau (ta sẽ xử lý với (*)):

$i) a = 0$, bất đẳng thức là hiển nhiên

$ii) a = b = x, c = d = y$, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{3(x^4+y^4)}{2x^2y^2} \geq 1 + \frac{6(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+y)^2(x-y)^2}{2x^2y^2} \geq \frac{2(x-y)^2}{x^2+y^2+4xy}$$

Áp dụng BDT $(x+y)^2 \geq 4xy$ và $x^2+y^2 \geq 2xy$ ta sẽ chứng minh được trường hợp này.

$iii) a = b = c = x, d = y$, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{3(3x^4+y^4)}{4x^3y} \geq 1 + \frac{3(3x^2+y^2)}{3x^2+3xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-y)^2(3x^2+2xy+y^2)}{4x^3y} \geq \frac{3(x-y)^2}{3x^2+2xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức $3x^2+2xy \geq 3x^2$ và $3x^2+2xy+y^2 \geq 4xy$ ta sẽ chứng minh được trường hợp nỳa

Tóm lại theo định lý ta có điêu phải chứng minh.

Bài toán 2:

Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n = n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{2n\sqrt{n-1}}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} \geq n+2\sqrt{n-1}$$

Giải:

Đặt $f(a_1,a_2,...,a_n) = VP$.

Cố định $a_4, a_5, ..., a_n$ ta được hàm ba biến và khả ABC. Như vậy ta chỉ cần xét 2 trường hợp:
$i) a_1 = 0$. Bất đẳng thức hiển nhiên đúng
$ii)$ $mx + (n-m)y = n$. Chứng minh:

$$\frac{m}{x} + \frac{n-m}{y} + \frac{2n\sqrt{n-1}}{mx^2 + (n-m)y^2} \geq n + 2\sqrt{n-1}$$

Ta đưa về bài toán:

$$\frac{mx + (n-m)y}{n}\left(\frac{m}{x} + \frac{n-m}{y}\right) + \frac{2\sqrt{n-1}(mx + (n-m)y)^2}{n\left(mx^2 + (n-m)y^2\right)} \geq n + 2\sqrt{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(n-m)(x-y)^2}{nxy} \geq \frac{2\sqrt{n-1}m(n-m)(x-y)^2}{nmx^2 + n(n-m)y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(mx^2 + (n-m)y^2 - 2\sqrt{n-1}xy\right)(x-y)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên là đúng đắn do: $mx^2 + (n-m)y^2 \geq 2\sqrt{m(n-m)}xy \geq 2\sqrt{n-1}xy$.
Tóm lại bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

IV. Bài tập

__Bài 1:__ Chứng minh bất đẳng thức sau cho các số thực dương a, b, c, d

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{2abcd} + 14 \geq (a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

__Bài 2:__
Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoã: $\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j = 1$. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + ... + a_n^2 + ka_1a_2...a_n \geq \frac{2}{n-1} + \min\left\{2, k\left(\frac{2}{n(n-1)}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$$

__Bài 3:__
Chứng minh rằng đối với $x_1, x_2, .., x_n$ là các số thực thoã: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$ ta có bất đẳng thức sau:

$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 + \frac{6}{(n-2)\left(\sqrt{n}+1\right)}\sum x_1x_2x_3 \leq 1$$

__G. Kết luận__
Trong phần bài tập, chúng tôi đều cố gắng ghi rõ nguồn gốc của bài toán tôi lấy từ đâu. Tuy nhiên do sự hạn chế nên một số bài toán chúng tôi không rõ xuất xứ, tôi xin chân thành xin lỗi tác giả của bài toán và xin được đề tựa các bài toán là Sưu Tầm.

GEOMETRIZE ALGEBRA (GLA)

LỜI MỞ ĐẦU

Trong trào lưu bất đẳng thức phát triển như vũ bão hiện nay và một loạt những phương pháp ffầy giá trị của những tên tuổi nổi tiếng cũng như của các bạn say mê bất đẳng thức ra đời thif việc một phương pháp không thật sự nổi bật cho dù khá mạnh trở nên nhạt nhòa và bị lãng quên cũng chẳng có gì là khó hiểu. Với các phương pháp hiện nay thì việc giải các bài bất đẳng thức trong kì thi quốc gia, quốc tế không còn là khó khăn với một lượng lớn các bạn học sinh nữa. Tuy nhiên, lời giải đẹp và trong sáng cho một bài toán vẫn là điều mỗi chúng ta luôn vươn tới. Chẳng thể có một phương pháp nào mà lời giải mọi bài toán bằng phương pháp đó đều là đẹp nhất cả. Chính điều này tạo nên sự quyến rũ không bao giờ nhàm chán của bất đẳng thức. Là một người cũng khá yêu thích môn học đầy kì bí này, tôi cũng đúc kết cho riêng mình một phương pháp có tên là GLA, tạm dịch là “hình học hóa đại số”. Thực chất đây chỉ là ứng dụng của phương pháp p, R, r trong đại số mà thôi. Trong bất đẳng thức hình học, việc qui các đại lượng như độ dài, sin, cos của tam giác về p, R, r đã được khắp nơi trên thế giới nghiên cứu từ lâu nhưng mỗi người có những hiểu biết riêng và chưa có một cuốn sách nào nói thật chi tiết về nó cả. Có lẽ, do những bài bất đẳng thức lượng giác chưa bao giừo xuất hiện trong các kì thi quốc tế cả mà người ra cho rằng với những gì nghiên cứu về p, R, r hiện nay là quá đủ rồi và không nghiên cứu tiếp. Và đúng là trong bất đẳng thức lượng giác thì p, R, r có một sức mạnh hủy diệt đủ để giải quyết gần như tòan bộ. VIệc đem p, R, r ứng dụng vào trong đại số cũng không phải là một điều mới mẻ tuy nhiên mức độ của nó vẫn còn rất “manh mún”. Phần nhiều là do trong đại số đã có quá nhiều phương pháp mạnh nên phương pháp p, R, r đã bị lãng quên và không được đánh giá đúng mực. Đa số trong chúng ta tồn tại một quan niệm cố hữu rằng: “nếu đem so sánh bất đẳng thức đại số với hình học thì chẳng khác nào đem gã khổng lồ ra so với chú bé ti hon hay tay địa chủ với kẻ bần nông”. Cũng chẳng trách được họ vì xét về hình thức thì bất đẳng thức hình học chỉ là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức đại số có thêm điều kiện để thỏa mãn các tính chất hình học mà thôi. Theo quan điểm của riêng tôi thì bất đẳng thức đại số có thể ví như phạm trù cái riêng còn bất đẳng thức hình học có thể ví như phạm trù cái chung trong triết học: "Cái riêng là cái toàn bộ, phong phú hơ cái chung, cái chung là cái bộ phận, nhưng sâu sắc hơn cái riêng". Tôi mạnh dạn đi sâu vào tìm hiểu ứng dụng của p, R, r trong đại số và tách riêng nó ra thành một phương pháp có tên GLA trước hết là vì nhận thấy trong những dạng toán nhất định nó cho lời giải rất đẹp; sau thì là vì muốn góp phần nào công sức tìm lại tiếng nói cho bất đẳng thức hình học. Tôi muốn chứng minh phần nào quan điểm nêu trên của mình. Có thể là tôi quá ngông cuồng nhưng nếu qua bài viết tôi không chứng tỏ được gì thì đó là do khả năng hạn chế của tôi chứ chưa thể phủ định quan điểm của tôi được.

Trong quá trình viết phần lý thuyết sẽ được sắp đặt không tuân theo qui tắc thông thường. Phân đầu bài viết tôi cố xây dựng những kiến thức thật cơ bản và được áp dụng để có thể giải bài tập mà không cần dùng đến phần "lý thuyết tổng quan" cuối bài viết. Tại các kì thi học sinh giỏi thì ngoài những bất đẳng thức kinh điển được áp dụng trực tiếp còn lại tất cả những gì áp dụng đều phải chứng minh. Do đó làm sao để các bạn hiểu được lý thuyết để giải bài tập chứ không phải là dùng lý thuyết một cách máy móc.

Những bài tập trong phần viết này không quá khó, nếu bạn đọc nào muốn tìm hiểu những cái cao hơn xin liên hệ với tôi qua địa chỉ ở cuối bài viết. Đồng thời xin chân thành cảm ơn những ý kiến đóng góp từ bạn đọc.

Bùi Việt Anh

A. CỞ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Xin nói trước là tôi sẽ trình bày bài viết của mình không giống như sự trình bày những phương pháp khác của họ đó là đầu tiên xây dựng lý thuyết rồi đi vào giải quyết các bài tập và xem thử sức mạnh của phương pháp. Ở đây tôi chỉ đi sơ lược những gì cần thiết để giải các bài toán đối xứng 3 biến đã. Sau khi trình bày tương đối hoàn chỉnh với 3 biến ta mới bắt đầu đi tìm hiểu xem GLA còn có những ứng dụng nào và bộ mặt thật của nó ra sao. Việc trình bày theo cách này cũng không hoàn toàn là vô lý bởi lẽ sau khi đã giải được một loạt những bài toán 3 biến thì các bạn cũng nắm được khá chắc những kiến thức cơ sở của GLA để dễ dàng tiếp thu những lý thuyết cao xa hơn. Những gì mà tôi sẽ trình bày trong những phần từ A đến E thì với kiến thức của học sinh THCS cũng có thể hiểu gần như toàn bộ. Xóa nhòa ranh giới về tuổi tác cũng chính là điều tôi cố gắng thực hiện trong các phần từ A đến E.

Xét những bài bất đẳng thức 3 biến đối xứng với điều kiện các biến không âm: a, b, c

Bằng cách đặt $x=b+c, y=c+a, z=a+b$ hoặc $x=\sqrt{b+c}, y=\sqrt{c+a}, z=\sqrt{a+b}$ và nhiều cách khác nữa ta suy ra được x, y, z là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Như vậy ta đã chuyển một bài bất đẳng thức đại số thành hình học. Trường hợp trong 3 biến a, b, c có một biến bằng O thì tam giác suy biến thành đường thẳng. Ta coi đó là tam giác có $r = 0$.

Ta đã biết mọi tam giác đều được xác định bởi 3 yếu tố p, R, r nên sau khi qui bài toán về x, y, z ta qui về p, R, r. Do có khá nhiều định lý hay, bổ đề đẹp về quan hệ giữa p, R, r nên trong một số bài tán nhất định thì việc chuyển bài toán gồm 3 đại lượng a, b, c về p, R, r là thuận lợi hơn rất nhiều.

B. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC VÀ BỔ ĐỀ ÁP DỤNG TRONG BÀI VIẾT:

Qui ước: Khi nhìn thấy kí hiệu a, b, c ta hiểu đó là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Còn p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC.

VT là kí hiệu của vế trái, VP là kí hiệu của vế phải.

a) $ab+bc+ca=p^2+4Rr+r^2$

b) $2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+16Rr+4r^2$

c) $a^2+b^2+c^2=2p^2-8Rr-2r^2$

d) $2Rr-r^2-\frac{p^2}{9}=-\frac{1}{18p}(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$

e) $4Rr-r^2-\frac{p^2}{4}=-\frac{1}{32p}(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c)$

Chứng minh: Ta dễ dàng nhận thấy 3 đẳng thức cần chứng minh là tương đương với nhau nên chỉ cần chứng minh cho đẳng thức **a)** là đủ.

Ta có: $p-a=r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$ và $a=2R\sin A \Rightarrow \sin A=\frac{a}{2R};\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$.

Mặt khác áp dụng công thức: $\sin A=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} \Rightarrow \dfrac{a}{2R}=\dfrac{2\cdot\frac{r}{p-a}}{1+\frac{r^2}{(p-a)^2}}=\dfrac{2r(p-a)}{(p-a)^2+r^2}$

$\Rightarrow ap^2-2pa^2+a^3+ar^2=4Rr(p-a)\Rightarrow a^3-2pa^2+a\left(r^2+p^2+4Rr\right)-4Rrp=0$ (1)

Xét phương trình: $x^3-2px^2+\left(r^2+p^2+4Rr\right)x-4Rrp=0$ (*). Từ (1) ta thấy a, b, c là 3 nghiệm của (*). Do đó theo định lý Viet ta có:

$ab+bc+ca=p^2+4Rr+r^2$

d) Hệ thức này được chứng minh lần đầu tiên bởi nhà toán học P. Nuesch vào năm 1971 trong tạp chí “Elementary Math”, No 26, 1971 trang 19. Đây là một hệ thức khá phức tạp. Rất tiếc tôi chưa được đọc một cách chứng minh nào cả nên đành chứng minh tam bằng sách sau đây:

$2Rr-r^2-\frac{p^2}{9}=-\frac{1}{18p}(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$

$\Leftrightarrow 36Rrp - 18pr^2 - 2p^3 = -(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$ (1)

VT(1) = $9abc - 18\frac{S^2}{p} - 2p^3 = 9abc - 18(p-a)(p-b)(p-c) - 2p^3$

Đặt $p-a=x, p-b=y, p-c=z \Rightarrow x+y+z = p-a+p-b+p-c = p$;

$a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y \Rightarrow$ VP(1) = $-(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$

VT(1) = $9(x+y)(y+z)(z+x) - 18xyz - 2(x+y+z)^3$. Tức là ta cần chứng minh:

$9(x+y)(y+z)(z+x) - 18xyz - 2(x+y+z)^3 = -(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$ (2)

Ta có: VT(2) $= 9\left[x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xy\right] - 18xyz$

$$-2\left[x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y+z) + 3z^2(x+y) + 6xyz\right]$$

$= 3\left[x^2(y+z) + x^2(y+z) + z^2(x+y)\right] - 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 12xyz$ (3)

Đến đây việc chứng minh A = B đã đơn giản hơn rất nhiều. Nếu không tìm được cách chứng minh hay thì bạn đọc có thể chịu khó ngồi phân tích nhân tử. Việc làm này chỉ tốn chút công sức chứ không cần suy nghĩ nhiều vì đã có trước kết quả mà không cần nháp, xin trình bày để các bạn tham khảo:

Ta nhận thấy (3) là biểu thức đối xứng và dễ dàng thấy rằng nếu đặt (3) bằng $f(x,y,z)$ thì $2x = y+z$ là một nghiệm của $f(x,y,z)$. Do tính đối xứng và $f(x,y,z)$ có bậc bằng 3 nên $2y = z+x, 2z = x+y$ cũng là nghiệm của $f(x,y,z)$ và chỉ có 3 nghiệm đó. Dấu của x^3, y^3, z^3 trong $f(x,y,z)$ là dấu trừ nên có thể viết: $f(x,y,z) = -(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$

Đây là một mẹo nhỏ trong quá trình phân tích các biểu thức có tính chất đối xứng. Còn việc đi thi có được sử dụng tính chất đó không thì các bạn hãy tham khảo thầy giáo có uy tín nhé!

e) Hệ thức này được chứng minh lần đầu tiên bởi nhà toán học P. Nuesch vào năm 1972 trong tạp chí "Elementary Math", No 27, 1972 (trang 16-17). Các bạn có thể chứng minh tương tự như cach chứng minh **d)**.

Đây là một đẳng thức đẹp và nhiều ứng dụng nên các bạn trước hết hãy tìm cho riêng mình một lờii giải để hiểu được bản chất của nó. Sau đây mình xin giới thiệu lời giải của mình để các bạn tham khảo.

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$$128Rrp-32pr^2-8p^3=(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$$

$$\Leftrightarrow 32abc-32(p-a)(p-b)(p-c)-(a+b+c)^3=(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$$

Đặt $\begin{cases} a=2x+y+z \\ b=2y+z+x \\ c=2z+x+y \end{cases} \quad (x+y>0, y+z>0, z+x>0) \Rightarrow a+b+c=4(x+y+z)$ (1)

Ta dễ dàng nhận thấy với cách đặt đó thì điều kiện a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác không bị vi phạm và: $\begin{cases} p-a=y+z, p-b=z+x, p-c=x+y \\ 3a-b-c=4x \\ 3b-c-a=4y \\ 3c-a-b=4z \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta cần chứng minh:

$$32(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)-32(x+y)(y+z)(z+x)-64(x+y+z)^3=64xyz$$

$$\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)-(x+y)(y+z)(z+x)-2(x+y+z)^3=2xyz$$

Đến đây ta chứng minh $(m+n)(n+p)(p+m)+mnp=(m+n+p)(mn+np+pm)$ (*)

áp dụng với $m=y+z, n=z+x, p=x+y$ ta có:

(*) $\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)+(x+y)(y+z)(z+x)$

$$=2(x+y+z)^3+2\left[(x+y)(y+z)(z+x)+xyz\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y+z)\left[(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\right]$$

$$=2(x+y+z)^3+2(x+y+z)(xy+yz+zx) \text{ (đúng)}$$

Vậy ta đã chứng minh xong đẳng thức **e)**.

2. Các định lý:

Định lý 1: Cho tam giác ABC, D là một điểm bất kì thuộc BC. Khi đó:

$nc^2 + mb^2 = (d^2 + mn)a$ trong đó AD = *d*, BD = *m*, DC = *n*

Chứng minh:

Ta có $m^2 + d^2 - c^2 = 2md\cos\widehat{ADB}$ (1), $n^2 + d^2 - b^2 = 2nd\cos\widehat{ADC}$ (2)

Nhân cả 2 vế của (1) với *n* và cả 2 vế của (2) với *m* ta được:

$n(m^2 + d^2 - c^2) = 2mnd\cos\widehat{ADB}$ (3), $m(n^2 + d^2 - b^2) = 2mnd\cos\widehat{ADC}$ (4)

Cộng vế theo vế của (3) với (4) ta được:

$mn(m+n) + (m+n)d^2 - nc^2 - mb^2 = 2mnd\left(\cos\widehat{ADB} + \cos\widehat{ADC}\right) \Leftrightarrow (mn + d^2)a = nc^2 + mb^2$

Định lý 3: $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Cách 1: Giả sử *a*, *b*, *c* thỏa mãn $a > b \ge c \ge 0$ là 3 nghiệm của phương trình:
$M(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)X - 4pRr = 0$

Điều kiện để *a*, *b*, *c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác là:

$\begin{cases} b + c > a \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > a \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow p > a \ge b \ge c > 0$ (1)

$\Leftrightarrow$ Phương trình M(*X*) = 0 có nghiệm thỏa mãn (1)

Ta có: $M'(X) = 3X^2 - 4pX + p^2 + 4Rr + r^2$

$\Delta' = (2p)^2 - 3(p^2 + 4Rr + r^2) = p^2 - 12Rr - 3r^2$; M(*X*) có 3 nghiệm $\Rightarrow$ Δ’ ≥ 0.

Hai nghiệm của M’(*X*) = 0 là: $X_1 = \dfrac{2p - \sqrt{\Delta'}}{3}; X_2 = \dfrac{2p + \sqrt{\Delta'}}{3}$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} M(0) < 0 \\ M(X_1) \geq 0 \\ M(X_2) \leq 0 \\ M(p) > 0 \end{cases}$ Ta nhận thấy ngay M(0) < 0 và M(p) > 0.

Còn $\begin{cases} M(X_1) \geq 0 \\ M(X_2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right) \\ \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq -p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq \left|p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right)\right|$

$\Leftrightarrow (\Delta')^3 \geq p^2\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right)^2 \Leftrightarrow p^4 - 2p^2\left(2R^2 + 10Rr - r^2\right) + r(4R + r)^3 \leq 0$ (2)

$\Delta_1' = \left(2R^2 + 10Rr - r^2\right)^2 - r(4R + r)^3 = 4R(R - 2r)^3 \geq 0$

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow$ $2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \leq$

$p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}$

(Cách chứng minh này

Cách 2: Cách này chưa có trong bất kì một tài liệu nào cả và mang đậm bản sắc hình học

Ta có: $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

$\Leftrightarrow p^2 - 16Rr + 5r^2 \le \left(R^2 - 4Rr + 4r^2\right) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} + R(R-2r)$

$\Leftrightarrow 9.IG^2 \le \left[(R-2r) + \sqrt{R(R-2r)}\right]^2 \Leftrightarrow 3.IG \le R - 2r + OI$

Trong đó O, I, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trọng tâm của ΔABC. Trên đường thẳng IG ta lấy điểm H sao cho $\overrightarrow{IK} = 3\overrightarrow{IG}$. Ta sẽ dùng định lý 1 để tính đoạn OH

Theo định lý 1:

$OI^2.HG + OH^2.IG = \left(OG^2 + IG.GK\right)IK$

$\Leftrightarrow 2R(R-2r) + OK^2 = 3\left(R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9} + 2\cdot\dfrac{p^2-16Rr+5r^2}{9}\right)$ (do $GK = 2IG, IK = 3IG$)

$\Leftrightarrow 6R(R-2r) + 3.OK^2 = 9R^2 - \left(2p^2 - 8Rr - 2r^2\right) + 2p^2 - 32Rr + 10r^2$

$\Leftrightarrow 3.OK^2 = 3\left(R^2 - 4Rr + 4r^2\right) \Leftrightarrow OK^2 = (R-2r)^2 \Leftrightarrow OK = R - 2r$

Trong tam giác OIK ta luôn có: OI + OK ≥ IK hay $(R - 2r)$ + OI ≥ 3.IG

Tức là: $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Đẳng thức xảy ra ⇔ O nằm giữa I và K

Comment: Từ định lý 1 ta có thể tạo ra rất nhiều đoạn thẳng có độ dài đặc biệt và rất đẹp như OK trong bài này. Bạn nào có niềm say mê thì tìm tòi thử, còn trong bài viết này tôi chỉ dừng ở đây.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được:
$p^2 \ge 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Điều này tương đương với IK + OK ≥ OI. Đẳng thức xảy ra khi K nằm giữa O và I

Bây giờ ta sẽ đi tìm điều kiện cần để:

+ O nằm giữa I và K

+ K nằm giữa O và I

* O nằm giữa I và K khi: $\sqrt{p^2 - 16Rr + 5r^2} = R - 2r + \sqrt{R(R-2r)}$

$\Rightarrow p^2 - 16Rr + 5r^2 \ge R(R-2r) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

$\ge R(R-2r) + 2(R-2r)^2 = (R-2r)(3R-4r) \Rightarrow p^2 \ge 3(R+r)^2 \Rightarrow p \ge 3\sqrt{R+r}$

Theo định lý 2 đã trình bày thì điều này xảy ra khi tam giác có 2 góc ≥ 60°, tức là tam giác cân đó có cạnh bên lớn hơn hoặc bằng cạnh đáy.

* K nằm giữa O và I khi: $\sqrt{p^2 - 16Rr + 5r^2} = \sqrt{R(R-2r)} - (R-2r)$

$\Rightarrow p^2 - 16Rr + 5r^2 \le R(R-2r) + (R-2r)^2 \le (R-2r)(3R-4r)$

$\Rightarrow p^2 \le 3(R+r)^2 \Rightarrow p \le 3\sqrt{R+r}$

Theo định lý 2 đã trình bày thì điều này xảy ra khi tam giác có 2 góc ≤ 60°, tức là tam giác cân đó có cạnh bên nhỏ hơn hoặc bằng cạnh đáy.

Định lý 5: $a^2 + b^2 + c^2 \le 8R^2 + 4r^2$

Chứng minh: Ta có nhiều cách để chứng minh định lý này nhưng trong bài viết tôi sẽ sử dụng định lý 3 làm bổ đề vì đây là một bổ đề rất mạnh và tính ứng dụng cao.

Nhận thấy $R(R-2r) \le R(R-2r) + r^2 = (R-r)^2$. Do đó:
$p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)(R-r) \Leftrightarrow p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R^2 - 3Rr + 2r^2)$

$\Leftrightarrow p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \Leftrightarrow 2p^2 \le 8R^2 + 8Rr + 6r^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 8Rr + 2r^2 \le 8R^2 + 8Rr + 6r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 8R^2 + 4r^2$

Lại có $a^2+b^2+c^2+16Rr+4r^2=2(ab+bc+bc)$

$\Rightarrow 8R^2+16Rr+8r^2\ge 2(ab+bc+bc)\Rightarrow 4(R+r)^2\ge ab+bc+ca$

Định lý 4: $p^2\ge 2R^2+8Rr+3r^2$ trong mọi tam giác nhọn

Các bất đẳng thức tương đương: $a^2+b^2+c^2\ge 4(R+r)^2$

$ab+bc+ca\ge 2R^2+12Rr+4r^2$

Những bất đẳng thức này đã gặp nhiều trong các sách nên xin được không đưa ra chứng minh.

Định lý 2: Nếu tam giác ABC có: Hai góc ≥ 60° thì $p\ge\sqrt{3}(R+r)$

Hai góc ≤ 60° thì $p\le\sqrt{3}(R+r)$

Một góc bằng 60° thì $p=\sqrt{3}(R+r)$

Chứng minh: Ta có: $\dfrac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R}=\dfrac{a+b+c}{4R}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{r}{R}\right)$

$=\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(B-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(C-\dfrac{\pi}{3}\right)$ (1)

Đặt $x=A-\dfrac{\pi}{3},y=B-\dfrac{\pi}{3},z=C=\dfrac{\pi}{3}$ ta có $x+y+z=0$

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x\ge y\ge z$

$(1)=\sin x+\sin y+\sin z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}-2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$=2\sin\dfrac{x+y}{2}\left(\cos\dfrac{x-y}{2}-\cos\dfrac{x+y}{2}\right)=4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}$

Do $x+y+z=0$ và $x\ge y\ge z$ nên $x+y\ge 0$ và $x\ge 0$, $x<\pi$, $x+y<\pi$

suy ra $4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\ge 0$

– Nếu $y\ge 0\Leftrightarrow B\ge\dfrac{\pi}{3}$ thì $\sin\dfrac{y}{2}\ge 0$ do đó $\dfrac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R}=4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\ge 0$

Tức là $p \geq \sqrt{3}(R+r)$ khi ΔABC có 2 góc ≥ $\frac{\pi}{3}$

– Nếu $y \leq 0$ thì $\sin\frac{y}{2} \leq 0$, do đó: $\frac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R} = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \leq 0$

Tức là $p \leq \sqrt{3}(R+r)$ khi ΔABC có 2 góc ≤ $\frac{\pi}{3}$

– Nếu $y = 0$ thì $p = \sqrt{3}(R+r)$ do $\sin\frac{y}{2} = 0$

Định lý 6: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}$ (*)

CM: Ta luôn có: $IG \geq IO - OG \Leftrightarrow IG \geq \sqrt{R(R-2r)} - \frac{1}{3}\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}$

$\Leftrightarrow 3.IG \geq 3\sqrt{R(R-2r)} - \sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)} \Leftrightarrow 3.IG \geq \frac{a^2+b^2+c^2-18Rr}{3\sqrt{R(R-2r)}+\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}}$ (1)

Do $9.IG^2 = p^2 - 16Rr + 5r^2$ nên $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2 \geq 24Rr - 12r^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow 3.IG \geq \frac{6Rr-12r^2}{3\sqrt{R(R-2r)}+\sqrt{9R^2-24R+12r^2}} = \frac{6Rr-12r^2}{6\sqrt{R(R-2r)}} = r\sqrt{\frac{R-2r}{R}}$

$\Rightarrow 9.IG^2 \geq \frac{r^2(R-2r)}{R^2}$. Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra ⇔ ΔABC đều

Comment: Định lý 6 chỉ chặt hơn BĐT quen thuộc $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ chút xíu nhưng nó đặc biệt quan trọng khi "đương đầu" với những BĐT chặt. Như các bạn đã biết BĐT $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ là một BĐT tương đối chặt những vẫn chưa đủ độ mạnh để khuất phục những bài "cứng đầu". Tuy nhiên chỉ cần làm chặt hơn một chút xíu:

(**) $p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$ thì lại giải quyết những bài toán đó 1 cách khá "ngon lành". Định lý 6 có tầm quan trọng không kém so với (**). Thực ra vẫn có thể làm chặt hơn nữa BĐT (*) thành:
$p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{RR-2r}$ (***) có điều hình thức của (***) quá cồng kềnh nên rất khó áp dụng.

Tóm lại ta có BĐT kẹp:

$$16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R} \le p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

Định lý 7: Cho tam giác ABC thỏa mãn $a \ge b \ge c$ và $a+b \ge 3c$. CMR: $\frac{r}{R} \le \frac{4}{9}$

Chứng minh: Ta có: $\frac{r}{R} = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}$

Đặt $f(c) = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{(a+b)c^2 - 2c^3 + (a+b)(a-b)^2}{2abc^2} \ge \frac{(a+b-2c)c^2}{2abc^2} \ge 0$$

Do đó $f(c)$ đồng biến theo c. Thay $c = \frac{a+b}{3}$ vào $f(c)$ ta được:

$$f(c) \le f\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{4(2b-a)(2a-b)}{9ab} = \frac{4}{9} - \frac{2(a-b)^2}{9ab} \le \frac{4}{9}$$

Vậy $\frac{r}{R} \le \frac{4}{9}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{3}{2}c$

C. Xây dựng các đẳng thức

Đây chính là phần "xương sống" của phương pháp này. Chỉ cần nắm vững các đẳng thức trong phần này thì nhiều bài tập mặc dù rất khó trong các phần sau cũng trở nên đơn giản.

• Xét $a, b, c > 0$

Như đã nói ở phần A, sau khi đặt:

$x = b + c, y = c + a, z = a + b$ thì x, y, z trả thành độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Ta sẽ chuyển một số đại lượng trong đại số về hình học thông qua p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác XYZ

1. Tính $a^2 + b^2 + c^2$ và $ab + bc + ca$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2\left(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca\right)$ (1)

$xy + yz + zx = (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

• $4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = (x + y + z)^2 - 2\left[2(xy + yz + zx) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right]$

$\Leftrightarrow 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 4p^2 - 2\left(16Rr + 4r^2\right) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2$

• $4(ab + bc + ca) = 2(xy + yz + zx) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

$4(ab + bc + ca) = 16Rr + 4r^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 4Rr + r^2$

• $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \dfrac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} = \dfrac{p^2}{4Rr + r^2} - 2$

2. Tính $\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Ta có: $\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)}{8xyz}$

$= \dfrac{(p - x)(p - y)(p - z)}{xyz} = \dfrac{pr^2}{4Rrp} = \dfrac{r}{4R}$

3. Tính $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$

$$=\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}-3=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}-3$$

$$=\frac{p\left(4Rr+r^2\right)}{(p-x)(p-y)(p-z)}-3=\frac{p\left(4Rr+r^2\right)}{pr^2}-3=\frac{4R+r}{r}-3=\frac{2(2R-r)}{r}$$

4. $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+bc+ca)\right]+3abc$

$$=p\left(p^2-8Rr-2r^2-4Rr-r^2\right)+3pr^2=p\left(p^2-12Rr\right)$$

5. $a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2(ab+bc+ca)^2+4abc(a+b+c)$

$$=\left(p^2-8Rr-2r^2\right)^2-2\left(4Rr+r^2\right)^2+4p^2r^2$$

$$=p^4-4\left(4Rr+r^2\right)p^2+4\left(4Rr+r^2\right)^2-2\left(4Rr+r^2\right)^2+4p^2r^2=p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2$$

6. $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{p}{\sqrt[3]{pr^2}}=\sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$

7. Gọi S là diện tích của tam giác XYZ có độ dài 3 cạnh là x,y,z

Ta có: $16S^2=(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

$$=\left[(x+y)^2-z^2\right]\left[z^2-(x-y)^2\right]=(x+y)^2z^2-z^4-\left(x^2-y^2\right)^2+z^2(x-y)^2$$

$$=\left(x^2+y^2+2xy\right)z^2-z^4-x^4-y^4+2x^2y^2+z^2x^2-2xyz^2+z^2y^2$$

$$=2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)-\left(x^4+y^4+z^4\right)$$

Trong một số bài toán trường hợp $x^2\ge y^2+z^2$ (x là max của $\{x,y,z\}$) ta nhận ngay thấy bài toán đúng. Do đó chỉ cần xét thêm trường hợp $x^2<y^2+z^2$ là bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Đặt $m=x^2,n=y^2,p=z^2$ thì ta lại có m,n,p là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Nếu gọi R_1,r_1 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác MNP có đọ dài 3 cạnh là m,n,p thì:

$$16S^2=2(mn+np+pm)-\left(m^2+n^2+p^2\right)=16R_1r_1+4r_1^2\Rightarrow 4S^2=4R_1r_1+r_1^2$$

Vậy nhiều bài toán 3 biến qua 2 lần đặt ẩn thì ta qui được về bài toán 2 biến. Do các bài toán ta đang nghien cứu là bất đẳng thức đối xứng nên sau khi chuẩn hóa các bài toán chỉ còn 1 biến. Mà bài toán 1 biến thương giải được một cách dễ dàng.

8. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3 \ =p\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$

$=\frac{p(xy+yz+zx)}{xyz}-3=\frac{p\left(p^2+4Rr+r^2\right)}{4Rrp}-3=\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rr}-3=\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}$

9. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{4Rr+r^2}{pr^2}=\frac{4R+r}{pr}$

10. $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{p}{pr^2}=\frac{1}{r^2}$

11. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2}$

$=\frac{r^2(4R+r)^2-2p^2r^2}{p^2r^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2r^2}$

12. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ =\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}$

13. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2y^2z^2}=\frac{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2}$

$=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2}{16R^2r^2p^2}=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2r^2p^2}-\frac{1}{Rr}$

14. $(a+b)(b+c)(c+a)=xyz=4Rrp$

$abc=(p-x)(p-y)(p-z)=\frac{S^2}{p}=pr^2$

15. $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}$

$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{abc}=\frac{r^2(4R+r)^2-2p^2r^2}{pr^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p}$

16. $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=(ab+bc+ca)^3-3abc(a+b)(b+c)(c+a)$

$=r^3(4R+r)^3-12p^2r^3R$

17. $\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2}$

$=\dfrac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)+(b^2+c^2)(b^2+a^2)+(c^2+a^2)(c^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$

$=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2}$

$=\dfrac{(p^2-8Rr-2r^2)^2+(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2}{(p^2-8Rr-2r^2)\left[(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2\right]-p^2r^4}=\dfrac{p^4-8(2R+r)rp^2+5r^2(4R+r)^2}{4r^2(4R^2+6Rr+r^2)p^2-2p^4r^2-2r^3(4R+r)^3}$

18. $(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b)=a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3a^2b^2c^2+abc(a^3+b^3+c^3)$

$=r^3(4R+r)^3-12R^2r^3p+3p^2r^4+p^2r^2(p^2-12Rr)$

$=r^2\left[r(4R+r)^3+3p^2r^2+p^4-24Rrp^2\right]$

Phần xây dựng những công thức cơ bản xin được dừng lại ở đây. Trong quá trình làm bài tập nếu cần những công thức khác thì bạn đọc cũng có thể dễ dàng tự xây dựng. Do mọi đa thức đối xứng đều qui được về tổng và tích của 3 đại lượng $a+b+c, ab+bc+ca, abc$ nên đều qui được về p,R,r.

D. MỘT SỐ BÀI TOÁN SƯU TẦM

Phần này gồm những bài toán rất nổi tiếng và đã có nhiều cách giải. Tuy nhiên trong bài viết này ta sẽ dùng phương pháp GLA để giải.

Bài 1. (Iran 1996)

Cho a, b, $c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\ge\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$

Giải

Áp dụng công thức 1 và 13 trong phần C ta cần phải chứng minh:

$$\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2r^2p^2}-\frac{1}{Rr}\ge\frac{9}{4\left(4Rr+r^2\right)}\Leftrightarrow\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2rp^2}-\frac{1}{R}\ge\frac{9}{4(4R+r)}$$

Xét $A=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2rp^2}$. Ta sẽ chứng minh A đồng biến theo p.

C1: Tính đạo hàm

C2: $A=\dfrac{p^2+\dfrac{(4Rr+r^2)^2}{p^2}+2\left(4Rr+r^2\right)}{16R^2r}\ge\dfrac{\dfrac{8}{9}p^2+\dfrac{2\left(4Rr+r^2\right)}{3}+2\left(4Rr+r^2\right)}{16R^2r}$

Đến đây ta nhận ngay thấy A đồng biến theo p.

Mà $p^2-16Rr+5r^2=9.IG^2\ge0\Rightarrow p^2\ge16Rr-5r^2$. Do đó

$$A\ge\frac{(16Rr-5r^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2r\left(16Rr-5r^2\right)}=\frac{\left(20Rr-4r^2\right)^2}{16R^2r^2\,(16R-5r)}=\frac{(5R-r)^2}{R^2\,(16R-5r)}=\frac{25R^2-10Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}$$

Công việc còn lại của ta chỉ còn là đi chứng minh:

$$\frac{25R^2-10Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}-\frac{1}{R}\ge\frac{9}{4(4R+r)}\Leftrightarrow\frac{9R^2-5Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}\ge\frac{9}{4(4R+r)}$$

$$\Leftrightarrow4(4R+r)\left(9R^2-5Rr+r^2\right)\ge9\left(16R^3-5R^2r\right)$$

$$\Leftrightarrow4\left(36R^3+9R^2r-20R^2r-5Rr^2+4Rr^2+r^3\right)\ge9\left(16R^3-5R^2r\right)$$

$$\Leftrightarrow4\left(36R^3-11R^2r-Rr^2+r^3\right)-9\left(16R^3-5R^2r\right)\ge0\Leftrightarrow r(R-2r)^2\ge0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r=0 \\ R=2r \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b, c=0 \text{ (và các hoán vị)} \\ a=b=c \end{array}\right.$

Comment: Lời giải bài toán trên cũng như lời giải của các bài toán tiếp theo sau đây sẽ được trình bày một cách rất tỉ mỉ để các bạn tiện theo dõi. Tuy nhiên, như đã thấy, lời giải trên rất sáng sủa và gọn gàng. Bạn nào yêu thích bất đẳng thức hình chắc sẽ cảm nhận được ngay vẻ đẹp của lời giải còn bạn nào chưa quan tâm thực sự đến bất đẳng thức hình vì cho rằng nó không còn ở đằng sau và biết đâu sau khi đọc bài viết này các bạn sẽ thay đổi cái nhìn về bất đẳng thức hình.

Bài 2. Cho $a, b, c \geq 0$ và $ab+bc+ca=1$. CMR: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$

Giải

Áp dụng đẳng thức 1 và 12 phần C ta có bài toán sau:

Cho $x, y, z > 0$ và $4Rr+r^2=1$. CMR: $\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow p^2-10Rrp+1 \geq 0$ (1)

Xét phương trình: $f(x)=x^2-10Rrx+1=0$; $\Delta'=25R^2r^2-1$

$\Rightarrow x_1=5Rr-\sqrt{25R^2r^2-1}$; $x_2=5Rr+\sqrt{25R^2r^2-1}$

Để chứng minh (1) ta chỉ phải chứng minh $p \geq x_2=5Rr+\sqrt{25R^2r^2-1}$

Ta có:

$$\sqrt{25R^2r^2-1}=\sqrt{25R^2r^2-(4Rr+r^2)^2}=r\sqrt{9R^2-8Rr-r^2} \leq r\sqrt{(3R-r)^2}=r(3R-r)$$

$$\Rightarrow 5Rr+\sqrt{25R^2r^2-1} \leq 5Rr+r(3R-r)=2-3r^2$$

Lại có $p^2-16Rr+5r^2=9.IG^2 \geq 0 \Rightarrow p \geq \sqrt{16Rr-5r^2}=\sqrt{4-9r^2}$

Mà $\sqrt{4-9r^2} \geq 2-3r^2 \Leftrightarrow 4-9r^2 \geq (2-3r^2)^2 \Leftrightarrow 4-9r^2 \geq 4-12r^2+9r^4$

$\Leftrightarrow r^2(1-3r^2) \geq 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} r^2=0 \\ p^2=16Rr-5r^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, y=z=1$

Vậy $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1, c=0$ và các hoán vị.

Mở rộng: Cho a, b, $c \geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ và $b+c\geq a\geq b\geq c$

CMR: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{a+b+c+abc}$

Giải: Trước tiên ta nhận thấy bài toán này chặt hơn bài toán ban đầu bởi lẽ:
$1=ab+bc+ca\geq a(b+c)\geq a^2\Rightarrow a\leq 1\Rightarrow(1-a)(1-b)(1-c)\geq 0$

$\Leftrightarrow 1-a-b-c+ab+bc+ca-abc\geq 0\Leftrightarrow 2\geq a+b+c+abc$

Với bài toán ban đầu ta có thể chứng minh bằng nhiều cách đại số mà lời giải khá gọn gàng nhưng với bài toán mở rộng này thì lời giải bằng đại số là khá phức tạp. Ta sẽ dùng G.L.A. để chứng minh bài toán này.Ta nhận thấy với điều kiện của bài toán thì a, b, c là độ dài 3 cạnh 1 tam giác (Trường hợp $b+c=$ a tam giác suy biến thành đường thẳng). Áp dụng công thức 1 phần C ta cần phải CM:

$$\frac{\sum(a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{5}{a+b+c+abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}\geq\frac{5}{a+b+c+abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5-16Rr-4r^2}{(a+b+c)(1-2Rr)}\geq\frac{5}{(a+b+c)(1+2Rr)}\Leftrightarrow\left[5-\left(16Rr+4r^2\right)\right](1+2Rr)\geq 5(1-2Rr)$$

$$\Leftrightarrow 5+10Rr-(1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right)\geq 5-10Rr\Leftrightarrow 20Rr\geq(1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right)\quad(1)$$

Ta nhận thấy: $(1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right)\leq 18(1+2Rr)Rr=18Rr+2Rr.18Rr\ \leq$

$\leq 18Rr+2Rr(ab+bc+ca)=20Rr$. Do đó (1) được chứng minh.

Vậy $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{a+b+c+abc}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=1$, $c=0$.

Bài 3. Cho $x,y,z>0$. Tìm điều kiện để bất đẳng thức sau luôn đúng.

$$\sum\sqrt{\frac{x}{(x+y)(x+z)}}\geq\frac{4}{\sqrt{3(x+y+z)}}\left(1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right)$$

Giải

Đứng trước bài toán này, các phương pháp đại số không biết nên bắt đầu từ đâu bởi đề bài xuất hiện những căn thức rất khó hịu và điều kiện để bài toán đúng theo như dự đoán thì không đơn giản. Nhưng dạng bài này chắc chắn dùng G.L.A để giải. Có điều ta thử xem độ phức tạp của bài toán đến đâu nhé.

Đặt $y+z=a, z+x=b, x+y=c$. Bài toán trở thành:

$$\sum\sqrt{\frac{p-a}{bc}} \ge \frac{4}{\sqrt{3p}}\left(1+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right) \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\prod\sin\frac{A}{2}\right) \ (1)$$

(Trong đó p là nửa chu vi của ΔABC có độ dài 3 cạnh là a,b,c)

Bạn đọc có thể nhận ngay ra (1) chính là 1 trong các bất đẳng thức của Jack Garfulkel. Điều kiện để bài toán trên đúng là khi tam giác ABC nhọn. Tức là $b^2+c^2>a^2$ (giả sử $a=\max\{a, b, c\}$) $\Leftrightarrow (x+y)^2+(x+z)^2>(y+z)^2$

$$\Leftrightarrow x(x+y+z)>yz \Leftrightarrow x+y+z>\frac{yz}{x} \text{ (trong đó } x=\min\{x,y,z\}\text{)}$$

Việc của ta bây giờ là đi chứng minh (1) với điều kiện ΔABC nhọn. Đây là một bài rất chặt nên chứng minh bằng G.L.A cũng không hề đơn giản.

Giải

Ta có: $\cos\frac{A}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right), \cos\frac{B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right), \cos\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

Đặt $A'=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}, B'=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}, C'=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \sum\sin A' \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\prod\cos A'\right) \ (2)$$

trong đó A',B',C' là số đo 3 góc của 1 tam giác nhọn có $\min\{A',B',C'\}\ge\frac{\pi}{4}$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{p}{R} \ge \frac{4}{R3}\left(1+\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}\right) \Leftrightarrow p^2-\sqrt{3}Rp-4Rr-r^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow p\le\frac{R\sqrt{3}+\sqrt{3R^2+16Rr+4r^2}}{2} \Leftrightarrow p^2\le\frac{3R^2+8Rr+2r^2+R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2}}{2} \ (3)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\frac{\pi}{4}\le A'\le B'\le C'\le\frac{\pi}{2}$

TH1: $B' \le \frac{\pi}{3}$. Áp dụng định lý 2 ta có $p^2 \le 3(R+r)^2$. Do đó ta chỉ cần chứng minh: $6(R+r)^2 \le 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$\Leftrightarrow 6R^2 + 12Rr + 6r^2 \le 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$\Leftrightarrow 3R^2 + 4Rr + 4r^2 \le R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

Mà $R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2} \ge R\sqrt{9R^2 + 36Rr + 36r^2} = 3R(R+2r) \ge 3R^2 + 4Rr + 4r^2$

Suy ra (3) được chứng minh

TH2: $B' \ge \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2} \ge \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{24} > 0{,}116$

$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1}{4\sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2}} < 2{,}16$. Áp dụng định lý 3 ta chỉ cần chứng minh:

$2(2R^2 + 10Rr - r^2) + 4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \le 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$\Leftrightarrow R^2 + 12Rr - 4r^2 + 4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \le R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$\Leftrightarrow t^2 + 12t - 4 + 4(t-2)\sqrt{t(t-2)} \le t\sqrt{9t^2 + 48t + 12}$ trong đó $t = \frac{R}{r}, t \in [2;\ 2{,}16)$

$VT \le t^2 + 12t - 4 + 4(t-2)\sqrt{2{,}16(2{,}16-2)} \le t^2 + 12t - 4 + 2{,}4(t-2) = t^2 + 14{,}4t - 8{,}8$

$VP \ge t\sqrt{(3{,}2t + 5{,}6)^2 + (t-2)(9{,}28 - 1{,}24t)} \ge t(3{,}2t + 5{,}6)$

Mà $t(3{,}2t + 5{,}6) - (t^2 + 14{,}4t - 8{,}8) = 2{,}2(t-2)^2 \ge 0$, do đó VP ≥ VT.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 2$.

Vậy $\sum \cos\frac{A}{2} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1 + \prod \sin\frac{A}{2}\right)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Bài 4. Cho $x, y, z > 0$. CMR:

$$8(x+y+z)^3 xyz(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \ge \left[\sum (x+y)^2\right]^3 \prod \left[(x+y)(x+z) - 2yz\right] \quad (1)$$

Giải

Đặt $x=\frac{b+c-a}{2}, y=\frac{c+a-b}{2}, z=\frac{a+b-c}{2}$ thì ta có a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác và: $a=y+z, b=z+x, c=x+y \Rightarrow$

$x+y+z=p, xyz=(p-a)(p-b)(p-c)$

(p là nửa chu vi tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c)

$$2\left[(x+y)(x+z)-2yz\right]=(x+z)^2+(x+y)^2-(y+z)^2=b^2+c^2-a^2$$

Tương tự $2\left[(y+z)(y+x)-2zx\right]=c^2+a^2-b^2$, $2\left[(z+x)(z+y)-2xy\right]=a^2+b^2-c^2$

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ $8p^3(p-a)(p-b)(p-c)a^2b^2c^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^3 \prod \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3(p-a)(p-b)(p-c)a^2b^2c^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^3 \prod (a^2+b^2-c^2)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$

Nếu $b^2+c^2 \leq a^2$ thì VT $\geq 0 \geq$ VP $\Rightarrow$ (đpcm)

Nếy $b^2+c^2 > a^2$ thì đặt $a^2=m, b^2=n, c^2=p$

Ta có: m, n, p là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác.

Mặt khác theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$(a^2+b^2+c^2)^3=\left(\sum \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^4}\right)^3 \leq (a+b+c)^2(a^4+b^4+c^4) \quad (3)$$

Từ (2) và 93) suy ra để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh:

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)a^2b^2c^2 \geq (a^4+b^4+c^4)\prod (a^2+b^2-c^2)$$

$$\Leftrightarrow (2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)a^2b^2c^2 \geq (a^4+b^4+c^4)\prod (a^2+b^2-c^2)$$

$$\Leftrightarrow (2mn+2np+2pm-m^2-n^2-p^2)mnp \geq (m^2+n^2+p^2)\prod (m+n-p)$$

$$\Leftrightarrow (16R_1r_1+4r_1^2)4R_1r_1p_1 \geq (m^2+n^2+p^2)8p_1r_1^2 \Leftrightarrow 8R_1^2+2R_1r_1 \geq m^2+n^2+p^2 \quad (4)$$

(4) đúng theo định lý 5.

Tức là ta đã chứng minh xong (1). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ghi chú: R_1, r_1, p_1 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi ΔMNP có độ dài 3 cạnh là m, n, p.

Comment: Tạm thời bỏ qua độ cồng kềnh của bài toán thì độ chặt của nó đã đủ làm điêu đứng các phương pháp đại số rồi. Tôi đã thử đi tìm một lời giải đại số và kết quả sau nhiều cố gắng mới có được lời giải dài gấp 5 lần lời giải này. Có lẽ bài này sinh ra là để dành riêng cho G.L.A.

Bài 5. Cho a, b, $c > 0$. CMR: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$

Giải

Áp dụng công thức 3 và 8 ta cần chứng minh: $\frac{2(2R-r)}{r}\geq 4\cdot\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}$

$\Leftrightarrow 2R(2R-r)\geq p^2-8Rr+r^2 \Leftrightarrow 4R^2+6Rr-r^2\geq p^2$ (đúng theo định lý 3)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 6. Chứng minh rằng $\forall a$, b, c không âm ta có BĐT:

$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca)$

Giải

Nếu trong 3 số a, b, c có 2 số bằng 0 thì ta có ngay đpcm.

Nếu trong 3 số có 2 số $\neq 0$ thì áp dụng các công thức 1 và 14 ta cần chứng minh:

$p^2-8Rr-2r^2+2pr^2+1\geq 2(4Rr+r^2)\Leftrightarrow p^2+2pr^2+1\geq 16Rr+4r^2$

Ta có: $2pr^2+1=pr^2+pr+1\geq 3\cdot\sqrt[3]{p^2r^4}\geq 3\cdot\sqrt[3]{27r^2.r^4}=9r^2$ (1), $p^2\geq 16Rr-5r^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Xin giới thiệu cùng bạn đọc 2 cách chứng minh khác được trình bày trong cuốn "Sáng tạo bất đẳng thức" của Phạm Kim Hùng.

Cách 1: Sử dụng tam thức bậc 2

Chuyển về tam thức bậc 2 của a là: $f(a)=a^2+2(bc-b-c)a+(b-c)^2+1$

$\Delta'=(bc-b-c)^2-(b-c)^2-1=bc(b-2)(c-2)-1$

Nếu $bc-b-c\geq 0$ ta có ngay đpcm.

Nếu $bc-b-c\leq 0$ hay $(b-1)(c-1)\leq 1$. Ta chia ra làm 2 trường hợp.

Có đúng 1 trong 2 số $b,c>2$, số còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 2. Ta có ngay $\Delta'\leq 0$

+ Cả hai số b,c đều nhỏ hơn 2. Theo bất đẳng thức AM − GM ta có:

$b(2-b)\le 1, c(2-c)\le 1 \Rightarrow \Delta'\le 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Đặt $k=a+b+c$. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$abc\ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\Rightarrow abc\ge (k-2a)(k-2b)(k-2c)$$

Rút gọn lại ta được: $4(ab+bc+ca)-k^2\le \frac{9}{k}abc$ (*)

Bất đẳng thức của bài toán tương đương với:

$$(a+b+c)^2+2abc+1\ge 4(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)-k^2\le 1+2abc$$

Sử dụng (*) ta chỉ cần chứng minh: $\left(\frac{9}{k}-2\right)abc\le 1$

Theo bất đẳng thức AM − GM ta có: $\left(\frac{9}{k}-2\right)abc\le \left(\frac{9}{k}-2\right)\frac{k^3}{27}=\frac{(9-2k)k^3}{27}\le 1$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

Bài 7. (Phạm Kim Hùng) Giả sử a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\ge \frac{10}{(a+b+c)^2}$

Cách 1: (Của PKH)

Khai triển hai vế bằng cách gui đồng mẫu số:

$$\left(\sum_{sym} a^4+3\sum a^2b^2\right)\left(\sum_{sym} a^2+2\sum_{sym} ab\right)\ge 10\left(\sum_{sym} a^4\left(b^2+c^2\right)+2a^2b^2c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum a^6+2\sum a^4\sum ab+6_{a,b,c}\sum a^3b^3+2abc\sum_{sym} c^2(a+b)\ge 6\sum_{sym} a^4\left(b^2+c^2\right)+11a^2b^2c^2$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Để chứng minh bất đẳng thức trên ta tìm cách loại bỏ các biểu thức chứa c. Ta có: $4c^3\left(a^3+b^3\right)\ge 4c^4\left(a^2+b^2\right)$

$$2c(a+b)\left(a^4+b^4\right)+2c^3\left(a^3+b^3\right)+(a+b)c^5-c^4\left(a^2+b^2\right)-6c^2\left(a^4+b^4\right)$$

$$=\left(a^4+b^4-ca^3-c^3a\right)(a-c)+\left(a^4+b^4-cb^3-c^3b\right)(b-c)\ge 0$$

$$6c^3\left(a^3+b^3\right)+2c(a+b)\left(a^4+b^4\right)+c^5(a+b)\ge 5c^4\left(a^2+b^2\right)+6c^2\left(a^4+b^4\right)$$

Ngoài ra dễ thấy: $2abc\sum_{sym} c^2(a+b) \ge 12a^2b^2c^2 \ge 11a^2b^2c^2$

Như vậy với phần còn lại ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức 2 biến (thực chất là chứng minh cho trường hợp $c = 0$) như sau:

$$a^6+b^6+2ab\left(a^4+b^4\right)+6a^3b^3+2c^4ab \ge 6a^2b^2(a+b)+c^4\left(a^2+b^2\right)$$

Bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\left(a^2-b^2\right)\left(a^4-b^4\right)+2ab(a-b)\left(a^3-b^3\right) \ge 2c^4(a-b)^2+a^2b^2(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[(a+b)\left(a^3+b^3+ab^2+a^2b\right)+2ab\left(a^2+b^2+ab\right)-2c^4-a^2b^2\right] \ge 0$$

Hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$, $c = 0$ và các hoán vị.

Cách 2: Áp dụng công thức 17 ta cần CM:

$$\frac{p^2-8(2R+r)rp^2+5r^2(4R+r)^2}{4r^2\left(4R^2+6Rr+r^2\right)p^2-2p^4r^2-2r^3(4R+r)^3} \ge \frac{10}{p^2} \quad (1)$$

Đặt $f(p)$ = VT − VP. Tính $f'(p)$ với chú ý $p^2 \ge 16Rr-5r^2$ ta được $f'(p) \ge 0$

$\Rightarrow f(p) \ge f\left[\left(16Rr-5r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$. Đến đây ta chỉ việc thay $p^2 = 16Rr-5r^2$ vào (1) rồi rút gọn là ta được đpcm nhưng việc rút gọn đó khá mất thời gian và dễ nhầm lẫn. Chính vì vậy ta sẽ thay $p^2 = 16Rr-5r^2$ vào đẳng thức thứ 3 trong công thức 17. Ta cần chứng minh:

$$\frac{(8R-7r)^2+(4R+r)^2-2\left(16Rr-5r^2\right)}{(8R-7r)\left[(4R+r)^2-2\left(16Rr-5r^2\right)\right]-(16R-5r)r^2} \ge \frac{10}{16R-5r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(8R-7r)^2+16R^2-24Rr+11r^2}{(8R-7r)\left(16R^2-24Rr+11r^2\right)-(16R-5r)r^2} \ge \frac{10}{16R-5r}$$

$$\Leftrightarrow (16R-5r)\left(16R^2-24Rr+11r^2+10r^2\right) \ge (8R-7r)\left[10\left(16R^2-24Rr+11r^2\right)-(16R-5r)(8R-7r)\right]$$

$$\Leftrightarrow (16R-5r)\left(16R^2-24Rr+21r^2\right) \ge (8R-7r)\left(32R^2-88Rr+75r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (16R-5r)\left(32R^2-48Rr+42r^2\right) \ge (16R-14r)\left(32R^2-88Rr+75r^2\right)$$

Ta thấy $16R-5r \ge 16R-14r = 2(8R-7r)$,

$2\left(16R^2-24Rr+21r^2\right) \ge 32R^2-88Rr+75r^2$

Từ 2 điều trên ta có ngay đpcm, tức (1) được giải quyết

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} r = 0 \\ p^2 = 16Rr - 5r^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b, c = 0$ và các hoán vị

Bài 8 (Vũ Đình Quý) Cho *a*, *b*, *c* > 0. CMR: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3abc}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4$

Giải

Đặt $\frac{a}{b} = x, \frac{b}{c} = y, \frac{c}{a} = z \Rightarrow xyz = 1 \ (x, y, z > 0)$

Bài toán trở thành: Cho xyz = 1. CMR: $x + y + z + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq 4$

Chuyển về p, R, r ta được bài toán: Cho $pr^2 = 1$. CMR: $p + \frac{3}{4Rr + r^2} \geq 4$

Ta có: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq 3(4Rr + r^2) \geq 27r^2 \Rightarrow p^3 \geq 27pr^2 = 27 \Rightarrow p \geq 3$

$p + \frac{3}{4Rr + r^2} \geq p + \frac{9}{p^2} = 3 \cdot \frac{p}{3} + \frac{9}{p^2} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{3}} \geq 4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 9. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh Δ và *k* là một số thực ≥ 2,6. CMR:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + kzx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + kxy}} \geq \frac{3}{\sqrt{1 + k}} \quad (*)$$

Giải

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có: $\left(\sum x\right)^2 \leq \left(\sum \frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}}\right)\left(\sum x\sqrt{x^2 + kyz}\right)$

$\left(\sum x\sqrt{x^2 + kyz}\right)^2 \leq \left(\sum x\right)\sum\left(x^3 + kxyz\right)$. Suy ra:

$$\sum \frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}} \geq \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{\sum x}\sqrt{x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz}} \quad (1)$$

Mặt khác:

$x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz = (x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right) + 3(k + 1)xyz$

$= 2p\left(p^2 + 6Rr(k - 1) - 3r^2\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy để chứng minh được (*) chỉ cần chứng minh:

$$\frac{2p}{\sqrt{p^2+6Rr(k-1)-3r^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 4(k+1)p^2 \geq 9\left[p^2+6Rr(k-1)-3r^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (4k-5)p^2 - 54Rr(k-1) + 27r^2$$

Đặt $f(k)=(4k-5)p^2-54Rr(k-1)+27r^2 \Rightarrow f'(k)=4p^2-54Rr \geq 0$ (do $p^2 \geq 16Rr-5r^2$) $\Rightarrow$ $f(k)$ đồng biến theo k

$$\Rightarrow f(k) \geq f(2,6) = 5,4p^2-86,4Rr+27r^2 = 5,4\left(p^2-16Rr+5r^2\right) \geq 0$$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow k = 2,6$ và $a = b = c$.

Bài 10. Cho $a,b,c>0; a+b+c+1=4abc$. CMR: $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Giải

Chuyển về p,R,r ta được bài toán tương đương như sau:

Cho $p+1=4pr^2$. CMR: $p^2r^2 \geq 4Rr+r^2$

Ta có: $p^2 \geq 27r^2 \Rightarrow \frac{4p^3}{27} \geq p+1 \Rightarrow p \geq 3$

Ta cần chứng minh: $p(p+1) \geq 4\left(4Rr+r^2\right)$

Mặt khác: $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ (1)

Do $p \geq 3$ nên $4p^2 \geq 9(p+1)$ $\Rightarrow$ $4p^2 \geq 9\cdot 4pr^2 \Rightarrow p \geq 9r^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p(p+1) \geq 4\left(4Rr+r^2\right)$ tức là bài toán đã được giải quyết

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 11 (Nguyễn Duy Khánh).

Cho $a,b,c \geq 0$. CMR: $\sum \frac{(a+b)^2}{ab} \geq 12 + \frac{32abc(a+b+c)\sum(a-b)^2}{\prod(a+b)^2}$

Giải

BIến đổi vế trái:

$$\sum\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{\sum(a+b)^2c}{abc}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)+4abc}{abc}=\frac{4Rrp+4pr^2}{pr^2}=\frac{4(R+r)}{r}$$

$$12+\frac{32abc(a+b+c)\sum(a-b)^2}{\prod(a+b)^2}=12+\frac{32p^2r^2\left[2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)-4\left(4Rr+2r^2\right)\right]}{16p^2R^2r^2}$$

$$=12+\frac{4\left(p^2-12Rr-3r^2\right)}{R^2}$$

Theo định lý 3 ta có $p^2\le 2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R(R-2r)}(R-2r)$

Suy ra: $VP\le 12+\frac{4\left[2R^2-2Rr-4r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\right]}{R^2}$

$$\le 12+\frac{8(R-2r)\left(R-r+\sqrt{R(R-2r)}\right)}{R^2}\le 12+\frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{4(R+r)}{r}\ge 12+\frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r}\ge\frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}\Leftrightarrow 4(R-2r)^2\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow R=2r\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 12 (Nguyễn Duy Khánh).

Cho $a,b,c\ge 0$. CMR: $\frac{\prod(a+b)^2}{8a^2b^2c^2}\ge\prod\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\right)$

Giải

Chuyển về p,R,r ta cần chứng minh:

$\frac{8x^2y^2z^2}{\prod(x+y-z)^2}\ge\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}{x^2y^2z^2}$. Dễ thấy $VT=\frac{2R^2}{r^2}$

Biến đổi vế phải: VP

$$=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[\left(xy+yz+zx\right)^2-2xyz\left(x+y+z\right)\right]}{x^2y^2z^2}-1$$

$$=\frac{\left(2p^2-8Rr-2r^2\right)\left[\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2\right]}{16R^2r^2p^2}-1$$

Ta có: $\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2=p^4+2\left(4Rr+r^2\right)p^2+\left(4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2$

Mặt khác: $2\left(4Rr+r^2\right)p^2\le 9Rrp^2;\left(4Rr+r^2\right)^2\le\frac{p^2}{3}\cdot\frac{9Rr}{2}=\frac{3Rrp^2}{2}$

$$\Rightarrow\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-16Rrp^2\le p^2\left(p^2-\frac{7Rr}{2}\right)$$

Lại có $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2\le 4R^2+\frac{7Rr}{2}$. Do đó $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\le 4R^2p^2$

Mà $x^2+y^2+z^2\le 8R^2+4r^2$. Vậy $VP\le\frac{\left(8R^2+4r^2\right)4R^2p^2}{16R^2r^2p^2}-1=\frac{2R^2}{r^2}=VT$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

E. CÁC BÀI TOÁN TỰ SÁNG TẠO

Phải nói ngay rằng "sáng tạo" ở đây không có nghĩa tôi là người đầu tiên tìm ra chúng mà chỉ là độc lập tìm ra các bài toán đó. Trong hàng triệu người yêu toán khắp cả nước không thiếu gì những người tìm ra phương pháp G.L.A. thậm chí tìm ra từ rất lâu rồi và phát triển nó ở tầm cao hơn tôi nhiều. Tuy nhiên, cho tới nay chưa có bất kì một tài liệu nào trình bày một cách hệ thống về nó cả. Cũng có những người bằng phương pháp khác tìm ra những bài toán dưới đây để minh họa cho phương pháp của họ. Do sự hạn chế trong việc đọc tài liệu nên tôi không biết chúng đã xuất hiện ở đâu chưa. Có điều những bài toán đó được tìm ra một cách dễ dàng từ những công thức rất đơn giản đã xây dựng trong phần C. Chính vì thế thừoi gian để tìm ra các bài toán dưới đây còn nhanh hơn cả việc đi tìm một bài toán trong tài liệu nào đấy rồi nhận nó là của mình để bị mang tiếng.

I. CÁC BÀI TOÁN KHÔNG ĐIỀU KIỆN

1. Cho $a,b,c>0$. CMR: $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{19}{8}$ (*)

Giải

Áp dụng các công thức 1 và 3 trong C ta cần phải chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{2(2R-r)}{r}+2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{4Rr+r^2}{p^2-8Rr-2r^2}\ge\frac{19}{8}\quad(1)$$

Theo định lý 5 ta có: $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. Do đó để chứng minh (1) ta chỉ cần CM:

$$\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+\frac{3}{8}\cdot\frac{4Rr+r^2}{\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)-8Rr-2r^2}\ge\frac{19}{8}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}-2\ge\frac{3}{8}\left(1-\frac{4Rr+r^2}{4R^2-4Rr+r^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r\left[\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\right]}\ge\frac{3}{8}\cdot\frac{4R(R-2r)}{(2R-r)^2}\Leftrightarrow 8(2R-r)^2\ge 3Rr\left[\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\right]$$

Ta nhận thấy: $\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\le 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}\le\frac{6R}{r}$

Suy ra: $VP\le 3Rr\cdot\frac{6R}{r}=18R^2=8\left(\frac{3R}{2}\right)^2\le 8(2R-r)^2=VP$

Do đó (2) được chứng minh, tức là (*) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

2. Cho $a,b,c>0$. CMR: $8(a+b+c)^2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+64a^2b^2c^2$

$\geq 6(a+b+c)abc\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]+(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$

Áp dụng các công thức 1, 5, 14 trong C ta cần phải chứng minh:

$$8p^2\left[\left(4Rr+r^2\right)^2-2p^2r^2\right]+64p^2r^4\geq 6p^2r^2\left(2p^2-8Rr-2r^2\right)+16p^2R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow 2(4R+r)^2-4p^2+16r^2\geq 3\left(p^2-4Rr-r^2\right)+4R^2\Leftrightarrow 4R^2+4Rr+3r^2\geq p^2$$

(đúng theo định lý 3)

Comment: Nếu bài toán trên giải bằng phương pháp đại số thì lời giải cực kì dài dòng trong khi với G.L.A lời giải lại ngắn gọn và đẹp mắt như vậy. Qua đó, ta rút ra một điều là không thể đánh giá một bài toán qua vẻ bề ngoài của nó (trông đẹp mắt hay cồng kềnh) mà phải dựa vào nội dung (tức là giải) của nó.

3. Cho a, b, $c>0$. CMR: $\dfrac{8\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\dfrac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-1$

Giải

Áp dụng các công thức 1, 4 và 14 trong C ta cần chứng minh:

$$\frac{8p\left(p^2-12Rr\right)}{4pRr}\geq\frac{4\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}{4Rr+r^2}-1\Leftrightarrow\frac{2p^2}{Rr}-24\geq\frac{4p^2}{4Rr+r^2}-9$$

$$\Leftrightarrow\frac{2p^2}{Rr}-\frac{4p^2}{4Rr+r^2}\geq 15\quad\Leftrightarrow p^2\geq\frac{15Rr(4R+r)}{2(2R+r)}$$

Ta đã biết $p^2\geq 16Rr-5r^2$ và việc chứng minh:

$16Rr-5r^2\geq\dfrac{15Rr(4R+r)}{2(2R+r)}$ là quá đơn giản ($\Leftrightarrow$ $4R^2\geq 3Rr+10r^2$)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

4. Cho a, b, $c>0$. CMR: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}\geq\dfrac{5}{3}$

Giải

Áp dụng công thức 4, 8, 14 ta cần chứng minh: $\dfrac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}+\dfrac{pr^2}{2p\left(p^2-12Rr\right)}\geq\dfrac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}-\frac{3}{2}\geq\frac{1}{6}-\frac{r^2}{2\left(p^2-12Rr\right)}\Leftrightarrow\frac{p^2-14Rr+r^2}{4Rr}\geq\frac{p^2-12Rr-3r^2}{6\left(p^2-12Rr\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(p^2-14Rr+r^2\right)\left(p^2-12Rr\right)\geq 2Rr\left(p^2-12Rr-3r^2\right)\ (*)$$

Do $p^2\geq 16Rr-5r^2$ nên

$$\begin{cases}2\left(p^2-14Rr+r^2\right)=\left(p^2-12Rr-3r^2\right)+\left(p^2-16Rr+5r^2\right)\geq p^2-12Rr-3r^2 & (1)\\ 3\left(p^2-12Rr\right)\geq 3\left(4Rr-5r^2\right)=4Rr+r(8R-15r)\geq 4Rr & (2)\end{cases}$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta được (*) tức là bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

5. Cho a, b, $c>0$. CMR: $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{19}{8}$

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+9\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 15\ (1)$$

Giải

Áp dụng công thức 1 và 3 ta cần chứng minh:

$$\frac{2(2R-r)}{r}+9\sqrt{\frac{4Rr+r^2}{p^2-8Rr-2r^2}}\geq 15\quad (*)$$

Theo định lý 5 ta có: $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$. Do đó để chứng minh (*) ta chỉ cần chứng minh: $\frac{4R-2r}{r}+9\cdot\frac{\sqrt{4Rr+r^2}}{2R-r}\geq 15\Leftrightarrow\frac{4R-2r}{r}-6\geq 9\left(1-\frac{\sqrt{4Rr+r^2}}{2R-r}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r}\geq 9\cdot\frac{4R(R-2r)}{(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{4Rr+r^2}\right)}\Leftrightarrow(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{4Rr+r^2}\right)\geq 9Rr$$

Ta có: $VT\geq(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{9r^2}\right)=4R^2+2Rr-2r^2\geq 9Rr=VP$

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

6. Cho a, b, $c>0$. CMR: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{162abc}{(a+b+c)^3}\geq 9$

Giải

Áp dụng công thức 3 và 14 ta cần chứng minh:

$$\frac{p\left(p^2-12Rr\right)}{pr^2}+\frac{162pr^2}{p^3}\geq 9 \Leftrightarrow \frac{p^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{p^2}\geq 9$$

Đặt $f\left(p\right)=\frac{p^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{p^2} \Rightarrow f'\left(p\right)=\frac{2p}{r^2}-\frac{324r^2}{p^3}=\frac{2\left(p^4-162r^4\right)}{p^3r^2}\geq 0$

Do đó $f(p)$ đồng biến theo p tức là $f\left(p\right)\geq f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)$

Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{16Rr-5r^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{16Rr-5r^2}\geq 9 \Leftrightarrow \frac{4R-5r}{r}-3\geq 6-\frac{162r}{16R-5r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(R-2r\right)}{r}\geq 6\cdot\frac{16\left(R-2r\right)}{16R-5r} \Leftrightarrow 16R-5r\geq 24r \Leftrightarrow 16R\geq 29r \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Mở rộng: Tìm hằng số k tốt nhất sao cho BĐT sau luôn đúng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{kabc}{(a+b+c)^3}\geq 3+\frac{k}{27}.$$

Với cách làm tương tự ta dễ dàng tìm được $k=\frac{729}{4}$

8. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có:

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4}+\frac{12\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}\geq 5 \quad (*)$$

Giải

Áp dụng các công thức 1, 4, 5 và 14 ta cần chứng minh:

$$\frac{p^2r^2}{p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}+\frac{12p\left(p^2-12Rr\right)}{p\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}\geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{12\left(p^2-12Rr\right)}{p^2-8Rr-2r^2}-4\geq 1-\frac{p^2r^2}{p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(2p^2-28Rr+2r^2\right)}{p^2-8Rr-2r^2}\geq \frac{p^4-\left(16Rr+r^2\right)p^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}{p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\left(p^2-14Rr+r^2\right)}{p^2-8Rr-2r^2}-\frac{p^4-\left(16Rr+r^2\right)p^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}{p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2}\geq 0 \quad (1)$$

Đặt VT của (1) là $f(p)$. Ta có $f\backslash(p) \geq 0$, do đó $f\left(p\right)\geq f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)$

Mà $f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)=\frac{8\left(2Rr-4r^2\right)}{8Rr-7r^2}-\frac{2(4R+r)^2-6\left(16Rr-5r^2\right)}{2(4R+r)^2-5\left(16Rr-5r^2\right)}$

$$=\frac{16(R-2r)}{8R-7r}-\frac{16(R-2r)(2R-r)}{32R^2-64Rr+27r^2}=\frac{32(R-2r)^2(8R-5r)}{(8R-7r)\left(32R^2-64Rr+27r^2\right)}\geq 0$$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

9. Cho a, b, $c>0$. CMR: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq \frac{7}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{5}{6}\cdot\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ (*)

Giải

Áp dụng công thức 1, 3 và 6 ta cần chứng minh:

$$\frac{4R-2r}{r}\geq \frac{7}{2}\cdot\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$$

$$\Leftrightarrow 6(4R-2r)\geq 21\cdot\frac{4R^2-4Rr+r^2}{4R+r}+5\left(\sqrt[3]{\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)r}-3r\right)$$

$$\Leftrightarrow 24(R-2r)\geq 21\cdot\frac{4R(R-2r)}{4R+r}+5\cdot\frac{4(R-2r)(R+3r)}{A^2+3rA+9r^2}$$

(trong đó $A=\sqrt[3]{\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)r}$)

$$\Leftrightarrow 6(4R+r)\geq 21R+\frac{5r(R+3r)(4R+r)}{A^2+3rA+9r^2}\Leftrightarrow 3(R+2r)\left(A^2+3rA+9r^2\right)\geq 5r(R+3r)(4R+r)$$

Ta có: $A^2+3rA\geq 2\sqrt{A^3 3r}=2\sqrt{3r^2\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)}$

Suy ra: $3\left(A^2+3rA\right)\ge 2r\sqrt{27\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)}\ge 2r(10R+7r)$

Do đó trong (2) thì $VT\ge r(R+2r)(20R+41r)\ge VP$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

Bài 11. Cho a, b, $c \ge 0$. CMR:

$$\frac{a}{a^2+2bc}+\frac{b}{b^2+2ca}+\frac{c}{c^2+2ab}\le\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

Giải

Trước tiên ta thấy ngay $VP=\dfrac{p}{4Rr+r^2}$. Công việc ta cần làm trước tiên là qui VT về p,R,r

Ta có: $VT=\dfrac{\sum\left[a\left(b^2+2ca\right)\left(c^2+2ab\right)\right]}{\left(a^2+2bc\right)\left(b^2+2ca\right)\left(c^2+2ab\right)}$

$$=\frac{2(a+b+c)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4abc\left(a^2+b^2+c^2\right)-abc(ab+bc+ca)}{9a^2b^2c^2+4abc\left(a^3+b^3+c^3\right)+2\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right)}$$

Áp dụng các đẳng thức 1, 4, 14, 16 ở phần C ta được:

$$VT=\frac{2p\left[\left(4Rr+r^2\right)^2-2p^2r^2\right]+4pr^2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)-pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^2r^2\left(p^2-12Rr\right)+2r^3\left[(4R+r)^3-12p^2R\right]}$$

$$=\frac{2pr^2(4R+r)^2-4p^3r^2+4p^3r^2-8pr^3(4R+r)-pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^4r^2-48Rr^3p^2+2r^3(4R+r)^3-24Rp^2r^3}$$

$$=\frac{2pr^2(4R+r)^2-9pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^4r^2+2r^3(4R+r)^3-72Rp^2r^3}=\frac{p\left[2(4R+r)^2-9r(4R+r)\right]}{9p^2r^2+4p^4+2r(4R+r)^3-72Rrp^2}$$

Ta cần CM: $VT\le\dfrac{p}{4Rr+r^2}\Leftrightarrow\dfrac{2(4R+r)^2-9r(4R+r)}{9p^2r^2+4p^4+2r(4R+r)^3-72Rrp^2}\le\dfrac{1}{4Rr+r^2}$

Đặt $p^2=t$ và $f(t)=\dfrac{1}{9tr^2+4t^2+2r(4R+r)^3-72Rrt}$

$$f'(t)=-\frac{8t+9r^2-72Rr}{\left[9tr^2+4t^2+2r(4R+r)^3-72Rrt\right]^2}<0\quad(\text{do } t\ge 16Rr-5r^2\ge 9Rr)$$

Do đó $f(t)$ nghịch biến theo t tức là $f(t) \le f\left(16Rr - 5r^2\right)$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(4R+r)^2 - 9r(4R+r)}{9\left(16Rr-5r^2\right)r^2 + 4\left(16Rr-5r^2\right)^2 + 2r(4R+r)^3 - 72Rr\left(16Rr-5r^2\right)} \le \frac{1}{4Rr+r^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(4R+r)^3 - 9r(4R+r)^2 \le 2(4R+r)^3 + 4r(16R-5r)^2 + 9r^2(16R-5r) - 72Rr(16R-5r)$$

$$\Leftrightarrow 4(16R-5r)^2 + 9r(16R-5r) + 9(4R+r)^2 - 72R(16R-5r) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(256R^2 - 160Rr + 25r^2\right) + 144Rr - 45r^2 + 9\left(16R^2 + 8Rr + r^2\right) - 1152R^2 + 360Rr \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 16R^2 - 64Rr + 64r^2 \ge 0 \Leftrightarrow 16(R-2r)^2 \ge 0$$

Comment: Để chứng minh bài toán trên ta còn vài lời giải khác tuy nhiên lời giải nào cũng phải dùng đến những phân tích rất phức tạp do đó rất dễ nhầm lẫn. Giải bằng G.L.A. do ta dễ xây dựng sẵn những công thức cơ bản nên tiện cho việc kiểm tra và ta lại có thể xét đạo hàm xem biểu thức sau khi qui về p, R, r là đồng biến hay nghịch biến để qui p về R và r một cách thích hợp. Việc giảm được 1 biến trong những bài toán cồng kềnh như thế này có ý nghĩa rất lớn lao.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 2r \\ \begin{cases} p^2 = 16Rr - 5r^2 \\ r = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow I \equiv G \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c \\ a = b, c = 0 \ (\text{hoặc các hoán vị}) \end{array}\right.$$

Bài 12. Cho a, b, $c > 0$. CMR: $\dfrac{a^3+2abc}{b+c} + \dfrac{b^3+2abc}{c+a} + \dfrac{c^3+3abc}{a+b} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{2}$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^3+b^3+c^3+2abc\right)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) - \sum \frac{a^3+b^3}{a+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3+b^3+c^3+2abc\right)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \ge \frac{5}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Áp dụng các đẳng thức $1, 3, 12, 14$ phần C ta cần chứng minh:

$$\left[p\left(p^2 - 12Rr\right) + 2pr^2\right] \cdot \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4Rrp} \ge \frac{5}{2}\left(p^2 - 8Rr - 2r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(p^2 - 12Rr + 2r^2\right)\left(p^2 + 4Rr + r^2\right)}{4Rr} \ge \frac{5}{2}\left(p^2 - 8Rr - 2r^2\right) \ (*)$$

Đặt $p^2 = t$ và $f(t) = VT - VP$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{t + 4Rr + r^2 + t - 12Rr + 2r^2}{4Rr} - \dfrac{5}{2}$

$= \dfrac{2t - 8Rr + 3r^2}{4Rr} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{2t - 18Rr + 3r^2}{4Rr} \geq 0$ (do $t \geq 16Rr - 5r^2$)

Do đó $f(t)$ đồng biến theo p tức là để (*) ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $p^2 = 16Rr - 5r^2$ hoặc $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ (tùy độ chặt)

Mặt khác:

$$\frac{\left[\left(16Rr - 5r^2\right) - 12Rr + 2r^2\right]\left[\left(16Rr - 5r^2\right) + 4Rr + r^2\right]}{4Rr} \geq \frac{5}{2}\left[\left(16Rr - 5r^2\right) - 8Rr - 2r^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(4Rr - 3r^2\right)\left(20Rr - 4r^2\right)}{4Rr} \geq \frac{5}{2}\left(8Rr - 7r^2\right) \Leftrightarrow \frac{(4R-3r)(5R-r)}{R} \geq \frac{5}{2}(8R - 7r)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(20R^2 - 19Rr + 3r^2\right) \geq 40R^2 - 35Rr \Leftrightarrow 6r^2 \geq 3Rr \Leftrightarrow 2r \geq R \ (**)$$

Dễ thấy (**) là một BĐT sai và khi thay $p^2 = 16Rr - 5r^2$ vào (*) thì ta thấy độ chênh giữa VT và VP là rất nhỏ. Do đó ta hoàn toàn tự tin rằng khi thay $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ và (*) thì ta sẽ có được điều phải chứng minh mặc dù $\dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ là một đại lượng rất bé. Trong quá trình giải bài việc biến đổi dẫn đến một bất đẳng thức ngược dấu như (**) là không thể tránh khỏi. Rõ ràng để "chắc ăn" ta sẽ thay $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ và (*) nhưng việc làm này lại cồng kềnh hơn so với thay $p^2 = 16Rr - 5r^2$ rất nhiều. Qua phân tích trên ta đã thấy bắt buộc phải thay $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ vào rồi nhưng liệu có phải cần thiết cứ ở đâu có p^2 là đều thay bằng $16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ hay không? Với một bạn có "sức khỏe" và khả năng tính toán tốt thì cứ việc thay hết vào nhưng cá nhân tôi thì có một nguyên tắc biến đổi càng đơn giản càng tốt. Quay trở lại việc thay $p^2 = 16Rr - 5r^2$ vào (*), liệu đây có phải là một việc làm vo tác dụng không? Xin trả lời là "không" vì qua quá trình đó ta đã ước lượng được độ chênh giữa VT – VP do đó có "cảm nhận" rằng chỉ cần thay $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ vào biểu thức $p^2 - 4Rr + r^2$ còn trong biểu thức

$p^2+4Rr+r^2$ chỉ cần thay $p^2=16Rr-5r^2$ thôi và tất nhiên ở VP thì buộc phải thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$. Tiếp tục quá trình phân tích, về việc tính toán thì khi thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ vào một trong hai biểu thức $p^2+4Rr+r^2$ và $p^2-12Rr+2r^2$ và biểu thức còn lại là $p^2=16Rr-5r^2$ thì độ phức tạp trong tính toán là tương đương nhưng khi thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ vào trong biểu thức $p^2+4Rr+r^2$ thì ta dôi ra được lượng $p^2-12Rr+2r^2$ còn vào trong biểu thức $p^2-12Rr+2r^2$ lượng dôi ra (so với khi thay $p^2=16Rr-5r^2$) là $p^2+4Rr+r^2$. Chính vì thế việc thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ vào biểu thức $p^2-12Rr+2r^2$ là tốt hơn rất nhiều so với thay vào biểu thức $p^2+4Rr+r^2$. Với những bạn đã "dày dạn" kinhnghiệm "chiến đấu" thì nhìn lướt qua là có thể biết thay như thế nào cho hợp lý rồi, còn với những bạn mới làm quen với BĐT thì quá trình phân tích trên sẽ giúp cho các bạn phần nào khi giải những bài tập sau này. Bây giờ ta bắt đầu quá trình thay nhé!

$$\frac{\left(16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}-12Rr+2r^2\right)\left(16Rr-5r^2+4Rr+r^2\right)}{4Rr}$$

$$\geq\frac{5}{2}\left(16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}-8Rr-2r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(4Rr-3r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}\right)\left(20Rr-4r^2\right)}{4Rr}\geq\frac{5}{2}\left(8Rr-7r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(4R-3r+\frac{r(R-2r)}{R}\right)(5R-r)}{R}\geq\frac{5}{2}\left(8R-7r+\frac{r(R-2r)}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(20R^2-19Rr+3r^2\right)+\frac{2r(R-2r)(5R-r)}{R}\geq 40R^2-35Rr+5r(R-2r)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2r(R-2r)(5R-r)}{R}\geq 8r(R-2r)\Leftrightarrow 5R-r\geq 4R\Leftrightarrow R\geq r\ \text{(đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R=2r \\ \begin{cases} I\equiv G \\ r=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a=b, c=0 \end{array}\right.$ (hoặc các hoán vị)

Bài 13. Cho a, b, $c > 0$. CMR:

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\le\frac{9}{4(ab+bc+ca)} \text{ với } a+b+c=1 \ (*)$$

Giải

Biến đổi vế trái. Do $a+b+c=1$ nên $p = 1$.

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}=\frac{\sum(a+bc)(b+ca)}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}$$

$$=\frac{(ab+bc+ca)+\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]+abc(a+b+c)}{abc+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+abc\left(a^2+b^2+c^2\right)+a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{4Rr+r^2+(a+b)(b+c)(c+a)-2abc+p^2r^2}{pr^2+r^2(4R+r)^2-2p^2r^2+pr^2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)+p^2r^4}$$

$$=\frac{4Rr+r^2+4Rr-2r^2+r^2}{r^2+r^2(4R+r)^2-2r^2+r^2\left(1-8Rr-2r^2\right)+r^4}=\frac{8Rr}{r^2(4R+r)^2-r^3(8R+2r)+r^4}$$

$$=\frac{8R}{r(4R+r)^2-r^2(8R+2r)+r^3}=\frac{8R}{16R^2r}=\frac{1}{2Rr}$$

Vậy ta cần phải chứng minh: $\dfrac{1}{2Rr}\le\dfrac{9}{4\left(4Rr+r^2\right)}\Leftrightarrow 2r\le R$ (đúng)

Tức là (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

Bài 14. Cho $a,b,c>0; ab+bc+ca=1$. CMR: $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 25\left(a^2+b^2+c^2\right)+2$ (*)

Giải

Trước tiên dựa vào điều kiện ta đi tìm bài toán gốc của (*)

$$(*)\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 24\left(a^2+b^2+c^2\right)+(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc} \geq \frac{24\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{24\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2} \quad (1)$$

(1) chính là bài toán gốc sau khi đã loại bỏ điều kiện. Với những bạn mới làm bất đẳng thức thì ngay việc đưa về dạng (1) cũng gặp nhiều khó khăn. Nhưng với cả những bạn luyện nhiều bất đẳng thức rồi thì qui về dạng (1) rồi cũng chưa biết nên làm theo cách nào. Dạng (1) chính là dạng sở trường của S.O.S. nhưng lần này lựa chọn S.O.S để giải lại không mấy sáng suốt. Các bạn hãy giải thử sẽ thấy ngay những khó khăn gặp phải. Khi đã biết G.L.A. thì việc giải bài trên khôg mấy khó khăn. Ta cần phải chứng minh: $\dfrac{4Rrp}{pr^2} \geq \dfrac{24\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}{p^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{6\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}{p^2} \quad (**)$$

Ta thấy ngay VP đồng biến theo p, vấn đề bây giờ là chọn cận trên nào để giải quyết bài toán. Dùng định lý $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ có đủ mạnh để giải quyết bài toán không? Áp dụng định lý (2) $p^2 \leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$ thì chắc chắn sẽ giải quyết được bài toán nếu như bài toán đúng. Tuy nhiên ta rất hạn chế sử dụng định này bởi nó quá cồng kềnh. Quan sát một tí thì ta thấy bất đẳng thức (1) trở thành đẳng thức khi $a=b=c$ hoặc $a=2b=2c$ và các haớn vị trong khi định lý $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ chỉ xảy ra đẳng thức khi tam giác là tam giác đều. Do vậy ta không thể áp dụng định lý này và dù không muốn nhưng ta cũng buộc lòng phải áp dụng (2).

(**) sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\frac{R}{r} \geq \frac{6\left[\left(2R^2+10Rr+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}-r^2\right)-8Rr-3r^2\right]}{2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}}$$

$$\Leftrightarrow 2R^3+10R^2r-Rr^2+2R(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \geq 12R^2r+12Rr^2-18r^3+12r(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow 2R^3-2R^2r-13Rr^2+18r^3 \geq 2(6r-R)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)\left(2R^2+2Rr-9r^2\right) \geq 2(6r-R)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$\Leftrightarrow 2R^2 + 2Rr - 9r^2 \ge 2(6r - R)\sqrt{R(R-2r)}$ (3)

Nếu $6r \le R$ thì ta có ngay VT ≥ 0 ≥ VP

Nếu $6r > R$ thì (3) tương đương với:

$(2R^2 + 2Rr - 9r^2)^2 \ge (4R^2 - 48Rr + 144r^2)(R-2r)R$

$\Leftrightarrow 4R^4 + 4R^2r^2 + 81r^4 + 8R^3r - 36Rr^3 - 36R^2r^2$

$\ge (4R^3 - 48R^2r + 144Rr^2 - 8R^2r + 96Rr^2 - 288r^3)R$

$\Leftrightarrow 4R^4 + 8R^3r - 32R^2r^2 - 36Rr^3 + 81r^4 \ge (4R^3 - 56R^2r + 240Rr^2 - 288r^3)R$

$\Leftrightarrow 64R^3r - 272R^2r^2 + 252Rr^3 + 81r^4 \ge 0 \Leftrightarrow 64R^3 - 272R^2r + 252Rr^2 + 81r^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow 64R\left(R - \frac{9}{4}r\right)^2 + 16r\left(R - \frac{9}{4}r\right)^2 \ge 0$ (đúng)

Vậy $\frac{(a+b+c)^3}{abc} \ge 25(a^2 + b^2 + c^2) + 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c$ hoặc $a = 2b = 2c$ và các haớn vị

Comment: Trường hợp đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ thì dễ nhận thấy rồi nhưng còn trường hợp đẳng thức xảy ra khi $a = 2b = 2c$ thì ta tìm ra như sau. Theo lời giải bằng G.L.A thì đẳng thức xảy ra khi và chỉkhi:

$$\left[\begin{array}{l} R = 2r \\ \begin{cases} p^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \\ R = \frac{9}{4}r \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c \\ \begin{cases} \text{O nằm gi ữ a I và K} \\ R = \frac{9}{4}r \end{cases} \end{array}\right.$$

Điều kiện O nằm giữa I và K cho ta biết tam giác đó phải là tam giác cân còn điều kiện $R = \frac{9}{4}r$ sẽ giúp ta tìm ra được một đẳng thức nữa là $a = 2b = 2c$ (Xin nhắc lại 1 chút là K là điểm sao cho $\overline{IK} = 3\overline{IG}$)

Lời giải trên nếu tóm ngắn lại cũng chỉ hơn 10 dòng nhưng ở phần sau các bạn sẽ thấy bài trên có thể giải trong 5 dòng sau khi đưa thêm một số lý thuyết từ p, R, r vào G.L.A.

Bài 15. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. CMR:

$$\frac{a^2}{5a+1}+\frac{b^2}{5b+1}+\frac{c^2}{5c+1}\le\frac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

Giải

Biến đổi VT:

$$VT=\frac{\sum a^2(5b+1)(5c+1)}{(5a+1)(5b+1)(5c+1)}=\frac{25abc(a+b+c)+5\sum\left[a^2(b+c)\right]+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{125abc+25(ab+bc+ca)+5(a+b+c)+1}$$

$$=\frac{25p^2r^2+5\left(4Rrp-2pr^2\right)+p^2-8Rr-2r^2}{125pr^2+25\left(4Rr+r^2\right)+5p+1}$$

$$=\frac{25r^2+5\left(4Rr-2r^2\right)+1-8Rr-2r^2}{125r^2+25\left(4Rr+r^2\right)+5+1}=\frac{13r^2+12Rr+1}{150r^2+100Rr+6}=\frac{13r^2+12Rr+p^2}{150r^2+100Rr+6p^2}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{13r^2+12Rr+p^2}{150r^2+100Rr+6p^2}\le\dfrac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}}=\dfrac{p}{8\sqrt{3\left(4Rr+r^2\right)}}$

Xét $f(p)=VP-VT$, suy ra

$$f'(p)=\frac{1}{8\sqrt{3\left(4Rr+r^2\right)}}-\frac{2p\left(150r^2+100Rr+6p^2\right)-12p\left(13r^2+12Rr+p^2\right)}{\left(150r^2+100Rr+6p^2\right)^2}$$

$\dfrac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}}-\dfrac{p\left(36r^2+14Rr\right)}{\left(75r^2+50Rr+3p^2\right)^2}$. Xét $g(p)=\dfrac{p\left(36r^2+14Rr\right)}{\left(75r^2+50Rr+3p^2\right)^2}$

$$\Rightarrow\ g'(p)=\frac{\left(36r^2+14Rr\right)\left(75r^2+50Rr-9p^2\right)}{\left(75r^2+50Rr+3p^2\right)^3}.$$

Do $p^2\ge16Rr-5r^2$ và $R\ge2r$ nên g'(p) ≤ 0 ⇒ g(p) nghịch biến theo p, tức là:

$$f'(p)\ge\frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}}-\frac{\sqrt{(16R-5r)r}\left(36r^2+14Rr\right)}{\left[75r^2+50Rr+3\left(16Rr-5r^2\right)\right]^2}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}}-\frac{\sqrt{(16R-5r)r}\left(36r^2+14Rr\right)}{\left(60r^2+98Rr\right)^2}$$

Nhận thấy $4\left(14Rr+36r^2\right)=56Rr+144r^2\le98Rr+60r^2$

$$2\sqrt{3r(4R+r)}\sqrt{(16R-5r)r} \le 2r(16R-5r) \le 98Rr+60r^2$$

Từ 2 điều trên ra thấy ngay $f'(p) \ge 0 \Rightarrow f(p)$ đồng biến theo p.

Vậy ta sẽ chứng minh được $f(p) \ge 0$ nếu chứng minh được $f\left(\sqrt{(16R-5r)r}\right) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{16R-5r}}{8\sqrt{3(4R+r)}} \ge \frac{13r^2+12Rr+(16R-5r)r}{150r^2+100Rr+6(16R-5r)r} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{16R-5r}{3(4R+r)}} \ge \frac{56R+16r}{49R+30r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16R-5r}{3(4R+r)}-1 \ge \left(\frac{56R+16r}{49R+30r}\right)^2-1 \Leftrightarrow \frac{4(R-2r)}{3(4R+r)} \ge \frac{(7R-14r)(105R+46r)}{(49R+30r)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(49R+30r)^2 \ge 21(105R+46r)(4R+r) \Leftrightarrow 784R^2+5571Rr+2604r^2 \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 16. Cho $a,b,c \ge 0$. CMR: $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}+\frac{16}{5}\cdot\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{7}{5}$

Giải

Áp dụng các công thức 1 và 14 phần C ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}}+\frac{4r}{5R} \ge \frac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}}-1 \ge \frac{2}{5}-\frac{4r}{5R}$$

Theo định lý 6 ta có: $p^2 \ge 16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ nên:

điều bạn sắp đọc được trong mục này sẽ làm bạn thực sự ngạc nhiên...

Chúng ta sẽ mở đầu với bất đẳng thức $AM - GM$, đây có thể coi là bất đẳng thức cơ bản nhất trong những bất đẳng thức cơ bản. Nhưng chúng ta chỉ cần tìm hiểu bất đẳng thức này trong trường hợp các số n rất nhỏ. Với $n = 2$ chẳng hạn, ta có bất đẳng thức

Ví dụ 3.2.1. *Với mọi $a, b \geq 0$ ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$.*

Sẽ không có nhiều điều cần phải bàn tới ở bất đẳng thức trên, ngay khi các bạn học về số thực thì việc chứng minh bất đẳng thức đó đã là quá dễ. Bất đẳng thức tương đương với $(a-b)^2 \geq 0$, một điều quá hiển nhiên. Bây giờ, chúng ta xét tiếp khi $n = 3$ và bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 3.2.2. *Với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.*

Khi hỏi về một chứng minh thật cụ thể cho bất đẳng thức này, chúng ta sẽ cảm thấy một chút bối rối. Tất nhiên, bất đẳng thức trên không khó, lời giải chỉ trong duy nhất một dòng ...

$$VT - VP = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right),$$

Và chắc chắn đây là cách làm thông minh nhất, vì chúng ta không phải qua một bước trung gian nào cả. Cả 2 ví dụ trên đều được chứng minh bằng phương pháp phân tích bình phương, nhưng theo một nghĩa tương đối hẹp. Thuận lợi rất lớn trong lời giải bài toán bằng cách này là việc sử dụng rất ít kiến thức cao cấp, thậm chí bạn không cần biết bất kì một định lí về bất đẳng thức nào cả. Ngoài ra, nó còn là một phương pháp rất tự nhiên theo suy nghĩ của chúng ta.

Nếu đọc kĩ các bài toán ở chương trước, các bạn đã gặp không ít những bài toán sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Còn bây giờ, chúng ta sẽ khái quát cách sử dụng và đi tìm bản chất của một phương pháp chứng minh cực kì hiệu quả - *phương pháp phân tích bình phương $S.O.S$.*

Bài toán quan trọng mà chúng ta phải xem xét đến trong mục này là một bất đẳng thức nổi tiếng đã được giới thiệu ở chương trước, bất đẳng thức *Iran 96.*

Problem 3 (Iran 96). *Với mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

Đây cũng là bài toán có hình thức phát biểu rất đơn giản và đẹp mắt. Ngoài ra, nó còn là một bất đẳng thức rất khó khi bạn chưa được tiếp cận trước đó. Nhưng trước tiên, chúng ta hãy xem lại bất đẳng thức trong kì thi IMO 2005 và tìm một chứng minh thật tự nhiên cho nó.

Ví dụ 3.2.3 (IMO 2005 Pro. A3). *Giả sử x, y, z là các số thực dương và $xyz \geq 1$. Hãy chứng minh rằng*

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + y^2 + x^2} \geq 0.$$

LỜI GIẢI. Việc đầu tiên, ta cần đưa bất đẳng thức về dạng chuẩn hoá- đồng bậc.

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2.xyz}{x^5 + (y^2 + z^2)xyz} = \frac{x^4 - x^2yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)}$$
$$\frac{x^4 - x^2yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)} \geq \frac{2x^4 - x^2(y^2 + z^2)}{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}$$

Nếu đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ thì ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{a,b,c} \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{a,b,c} (a-b) \left(\frac{a}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{b}{2b^2 + (a+c)^2} \right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{a,b,c} (a-b)^2 \frac{c^2 + c(a+b) + a^2 - ab + b^2}{(2a^2 + (b+c)^2)(2b^2 + (a+c)^2)} \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z = 1$. ❑

Chứng minh trên không phải là chứng minh duy nhất, và có thể còn có nhiều chứng minh độc đáo hơn. Nhưng nếu xem xét khách quan thì chứng minh trên hoàn toàn rất tự nhiên và cơ bản. Nói khái quát, khi đứng trước một bất đẳng thức bất kì của 3 biến a, b, c, ta sẽ tìm cách đưa chúng về dạng tổng của các bình phương $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ kí hiệu

$$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq 0.$$

Phần đưa về dạng chính tắc trên là bước đầu tiên trong cách sử dụng phương pháp S.O.S. Nếu bạn đã khá quen với bất đẳng thức thì việc lập công thức trên là tương đối đơn giản, chỉ cần biết qua một số phép biến đổi và hằng đẳng thức, còn nếu bạn chưa quen, thì các thắc mắc sẽ được giải quyết trong mục "Biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S và một số kĩ thuật phân tích".

Tất nhiên, nếu trong biểu diễn cơ sở đó các hệ số S_a, S_b, S_c đều không âm thì bài toán được chứng minh. Từ trước tới nay, đây vẫn là cách mà cách bạn thường làm nhưng đây chỉ là trường hợp đơn giản nhất trong kĩ thuật chứng minh của phương pháp S.O.S. Điều quan trọng hơn. S.O.S giúp chúng ta giải quyết trong các trường hợp mà theo quan niệm cũ là không thể áp dụng được : Có một số hệ số trong S_a, S_b, S_c là không dương.

Thông thường, trong các bài toán đối xứng ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Với các bài toán hoán vị thì phải xét thêm trường hợp $c \geq b \geq a$. Trong trường hợp $a \geq b \geq c$ ta có các nhận xét sau

- Nếu $S_b \geq 0$: Do $(a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$ nên
$$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (S_c + S_b)(a-b)^2 + (S_b + S_a)(b-c)^2.$$
Và phần còn lại của bài toán là chứng minh $S_a + S_b \geq 0$, $S_c + S_b \geq 0$. Thông thường hai bất đẳng thức này luôn có thể chứng minh khá đơn giản, vì chúng không còn phải nhân thêm với các bình phương $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ nữa.

- Nếu $S_b \leq 0$: Do $(a-c)^2 \leq 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$ nên
$$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (S_c + 2S_b)(a-b)^2 + (2S_b + S_a)(b-c)^2.$$
Cũng vậy, việc chứng minh còn lại $S_c + 2S_b \geq 0$ và $2S_b + S_a \geq 0$ sẽ đơn giản hơn rất nhiều.

Ngoài ra nếu $S_a + S_b + S_c \geq 0, S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$ thì theo định lí về dấu của tam thức bậc 2 cũng dễ dàng suy ra được
$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0.$$

Trong nhiều trường hợp, ta cần thêm một số ước lượng mạnh hơn, chẳng hạn ước lượng hay dùng đến là
$$\frac{a-c}{b-c} \geq \frac{a}{b} (a \geq b \geq c).$$

Chẳng hạn khi ta có $S_b, S_c \geq 0$ thì
$$S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 = (b-c)^2 \left(S_b \left(\frac{a-c}{b-c} \right)^2 + S_a \right) \geq (b-c)^2 \left(\frac{a^2 S_b}{b^2} + S_a \right).$$

Và như vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$.

Ta có thể tóm tắt các kết quả trên thành một định lí chung như sau

Định lý 3.3 (Định lí S.O.S). *Xét biểu thức*
$$S = f(a,b,c) = S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2,$$

Trong đó S_a, S_b, S_c là các hàm số của a, b, c.

1. *Nếu* $S_a, S_b, S_c \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.
2. *Nếu* $a \geq b \geq c$ *và* $S_b, S_b + S_c, S_b + S_a \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.
3. *Nếu* $a \geq b \geq c$ *và* $S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.
4. *Nếu* $a \geq b \geq c$ *và* $S_b, S_c \geq 0, a^2S_b + b^2S_a \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.
5. *Nếu* $S_a + S_b + S_c \geq 0$ *và* $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.

Ngoài ra để $S \geq 0$ với mọi $a, b, c \geq 0$ thì ta phải có $S_a + S_b|_{a=b} \geq 0, S_b + S_c|_{b=c} \geq 0, S_c + S_a|_{c=a} \geq 0$. Trong đó $S_a + S_b|_{a=b}$ có nghĩa là ta xét biểu thức $S_a + S_b$ khi $a = b$. Với các bài toán đối xứng ta có ngay $S_a = S_b$ nếu $a = b$. Nhận xét này rất quan trọng trong các các bài toán tìm hằng số tốt nhất.

Dường như định lí này còn có vẻ quá đơn giản và nếu nói rằng nó có ứng dụng với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến thì thật khó mà tưởng tượng được. Nhưng thực tế thì S.O.S đã làm được điều này và đây là một điều rất ngạc nhiên.

Một câu hỏi nữa đặt ta là với những biểu thức nào thì ta có thể chuyển về dạng chính tắc S.O.S như vậy? Câu trả lời là mọi hàm số đối xứng $f(a, b, c)$ thoả mãn $f(a, a, a) = 0$ và f có thể chứa căn thức, phân thức của a, b, c luôn luôn có biểu diễn ấy. Chứng minh điều này bạn xem trong phần tiếp theo.

Bây giờ là một số ví dụ cụ thể để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp này, và nếu có thể thì trước tiên bạn hãy thử chứng minh chúng theo cách khác.

Ví dụ 3.2.4. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 2.$$

LỜI GIẢI. Ta chú ý đến 2 đẳng thức sau đây

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right),$$
$$(a + b)(b + c)(c + a) - 8abc = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2.$$

Như thế sau khi thêm bớt 1 ở mỗi số hạng vế trái, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{2c(a - b)^2 + 2b(a - c)^2 + 2a(b - c)^2}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Ta tìm được

$$S_a = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2a = b+c-a - \frac{abc}{ab+bc+ca},$$
$$S_b = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2b = a+c-b - \frac{abc}{ab+bc+ca},$$
$$S_c = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2c = a+b-c - \frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

Do tính đối xứng nên có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c$, khi đó dễ thấy $S_b \geq 0, S_c \geq 0$. Dựa vào tiêu chuẩn thứ nhất, ta chỉ cần chứng minh rằng $S_a + S_b \geq 0$ là xong. Nhưng điều này rất hiển nhiên vì

$$S_a + S_b = 2c - \frac{2abc}{ab+bc+ca} = \frac{2c^2(a+b)}{ab+bc+ca} \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Chúng ta hãy trở lại với bất đẳng thức Iran 1996.

Ví dụ 3.2.5 (Iran TST 1996). *Chứng minh rằng với các số thực không âm x, y, z ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{4(xy+yz+zx)}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $a = x+y, b = y+z, c = z+x$. Ta phải chứng minh

$$(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Bằng biến đổi đơn giản, ta có thể chuyển bất đẳng thức trên về dạng

$$\left(\frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2}\right)(b-c)^2 + \left(\frac{2}{ca}-\frac{1}{b^2}\right)(a-c)^2 + \left(\frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2}\right)(a-b)^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow S_a = \frac{2}{bc} - \frac{1}{a^2},\ S_b = \frac{2}{ca} - \frac{1}{b^2},\ S_c = \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}.$$

Giả sử rằng $a \geq b \geq c$ thì $S_a \geq 0$. Sử dụng tiêu chuẩn 4 ta chỉ cần chứng minh $b^2S_b + c^2S_c \geq 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 \geq abc$, nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$a \leq b+c \Rightarrow b^3 + c^3 \geq bc(b+c) \geq abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. □

Có một vài cách chứng minh khác cho bất đẳng thức Iran 96, cách thông thường chúng ta biết là khai triển và sử dụng bất đẳng thức *Schur*, hoặc dùng cách đa thức đối xứng. Tuy nhiên bạn đọc sẽ đồng ý với tác giả, rằng các phương pháp đó chỉ có ý nghĩa là chứng minh bất đẳng thức đúng về mặt toán học, chứ không để lại nhiều ấn tượng hay mở rộng. Việc biết sử dụng phương pháp S.O.S đã làm bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều, đây thực sự là một lời giải đẹp và ngắn gọn, thoả mãn được mỹ quan toán học của nhiều người.

Phương pháp phân tích bình phương đã từng xuất hiện theo cách này hay cách khác trong một số bài toán bất đẳng thức, vì nó là một hướng suy nghĩ rất tự nhiên đối với bất đẳng thức. Nhưng chắc chắn đây sẽ là lần đầu tiên mà phương pháp này được hệ thống và được coi là phương pháp chính thống cho chúng ta. Nó đem lại cho chúng ta một cách nhìn chủ động và vô cùng hiệu quả đối với các bài toán, mà chỉ một thời gian ngắn trước còn là những bài toán vô cùng khó khăn. Bất đẳng thức Iran 96 được coi là bài toán cơ bản ứng dụng phương pháp này (mặc dù tác giả nghĩ đến S.O.S từ một bất đẳng thức cũ hơn). S.O.S là tên lấy từ chữ cái đầu tiên của cụm từ *Sum of Square* trong tiếng Anh.

3.2.2 Định lí về biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S và một số kĩ thuật phân tích

Để khẳng định niềm tin của chúng ta về sự tồn tại một biểu diễn cơ sở cho phương pháp S.O.S ta cần một chứng minh cụ thể cho lớp các hàm đa thức, phân thức cho phép chứa các luỹ thừa hữu tỉ (nói cách khác, có thể chứa căn thức). Ngoài ra, nếu không có gì thay đổi, chúng ra chỉ xét bài toán trong trường hợp các biến số không âm (vì một biểu diễn của đa thức đúng trong tập R^+ thì cũng đúng trong R). Ta có các định nghĩa và định lí sau đây

Định nghĩa 3. *Một hàm phân thức ba biến $F(a,b,c)$ được gọi là đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $F(a,b,c) = F(x,y,z)$ đúng với mọi hoán vị (x,y,z) của (a,b,c). Hơn nữa nếu với mọi số thực dương x mà $F(x,x,x) = 0$ thì $F(a,b,c)$ được gọi là hàm đối xứng ba biến chuẩn.*

Định nghĩa 4. *Hàm nửa đối xứng ba biến Một hàm phân thức ba biến $G(a,b,c)$ được gọi là nửa đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $G(a,b,c) = G(a,c,b)$ đúng với mọi bộ ba số thực dương (a,b,c). Hơn nữa nếu với mọi cặp hai số thực dương x,y mà $G(x,y,y) = 0$ thì $G(a,b,c)$ được gọi là hàm nửa đối xứng ba biến chuẩn.*

Định lý 3.4 (Biểu diễn cơ sở đối với lớp hàm đa thức). *Giả sử $F(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng ba biến chuẩn thì tồn tại một đa thức nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng*

$$F(a,b,c) = G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2.$$

CHỨNG MINH. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh định lí trên cần dựa vào một số hiểu biết cơ bản về không gian véctơ. Cách chứng minh rất ngắn gọn và hay nhưng cần sử dụng một số công cụ cao cấp.

Bởi vì định lý chỉ hạn chế trong lớp các đa thức ba biến nên có có thể nói tới bậc của đa thức. Trong đa thức ba biến a, b, c sẽ chứa (và chỉ chứa !) các hạng tử dạng $t_{m,n,p}a^m b^n c^p$ trong đó m, n, p là các số nguyên không âm. Nếu $t_{m,n,p} \neq 0$ thì $m + n + p$ được gọi là bậc của hạng tử này. Trong trường hợp ngược lại ta quy ước bậc của hạng tử này bằng 0. Số $m + n + p$ lớn nhất được gọi là bậc của đa thức đó. Rõ ràng, ta chỉ cần chứng minh định lý cho lớp các đa thức bậc n.

Ký hiệu $S(F)$ là tập hợp tất cả các đa thức ba biến $F(a, b, c)$ đối xứng chuẩn bậc n, $S(Q)$ là tập hợp tất cả các đa thức $Q(a, b, c)$ đối xứng ba biến chuẩn bậc n có dạng $Q(a, b, c) = G(a, b, c)(b - c)^2 + G(b, c, a)(c - a)^2 + G(c, a, b)(a - b)^2$, ở đây $G(a, b, c)$ là đa thức nửa đối xứng ba biến bậc $n - 2$ (ta xét $n \geq 2$ vì với n=1 thì định lý hiển nhiên đúng). Rõ ràng $S(Q) \cup \{0\}$ là không gian véctơ con của không gian véctơ $F(a, b, c)$. Và do đó số chiều của không gian $S(Q) \cup \{0\}$ không vượt quá số chiều của không gian $S(F) \cup \{0\}$. (*)

Với các $\alpha, \beta, \gamma \in N$, kí hiệu $\lambda = (\alpha, \beta, \gamma)$ và xét các đa thức đặc biệt sau

(i). $F_\lambda(a, b, c) = \sum_{sym} a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}$, trong đó tổng được lấy trên tất cả các bộ hoán vị $(\alpha', \beta', \gamma')$ của (α, β, γ).

(ii). $G_\lambda(a, b, c) = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha b^\gamma c^\beta$.

(iii). $Q_\lambda(a, b, c) = G_\lambda(a, b, c)(b - c)^2 + G_\lambda(b, c, a)(c - a)^2 + G_\lambda(c, a, b)(a - b)^2$.

Ký hiệu f_n là tập hợp tất cả các bộ số $\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ thoả mãn các điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = n, \alpha \geq \beta \geq \gamma$. Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức $F_\lambda(a, b, c)$ với $\lambda(\alpha, \beta, \gamma) \in f_n$ là hệ sinh độc lập tuyến tính của $S(F) \cup \{0\}$ do đó số chiều của $S(F) \cup \{0\}$ bằng số phần tử của f_n. (1)

Ký hiệu q_n là tập hợp tất cả các bộ số $\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ thoả mãn các điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = n - 2, \alpha + 2 \geq \beta \geq \gamma$. Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức $Q_\lambda(a, b, c)$ với $\lambda(\alpha, \beta, \gamma) \in q_n$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính của $S(Q) \cup \{0\}$ do đó số chiều của $S(Q) \cup \{0\}$ không nhỏ hơn số phần tử của q_n. (2)

Từ các kết quả (1), (2) với chú ý là f_n và q_n có cùng số phần tử ta suy ra số chiều của $S(Q) \cup \{0\}$ không nhỏ hơn số chiều của $S(F) \cup \{0\}$ (**).

Vậy từ các kết quả (*), (**) suy ra số chiều của hai không gian $S(Q) \cup \{0\}$, $S(F) \cup \{0\}$ là bằng nhau, từ đó suy ra mọi phần tử của không gian $S(F)$ đều có thể biểu diễn qua các phần tử của không gian $S(Q)$. Đây là kết quả cần phải chứng minh. □

Hệ quả 3.1 (Biểu diễn cơ sở với phân thức). *Giả sử rằng $M(a, b, c), N(a, b, c)$ là hai đa thức nửa đối xứng ba biến, hơn nữa với mọi số thực dương x thì phân số*

$M(x,x,x)/N(x,x,x)$ là một hằng số t. Khi đó tồn tại hàm số nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng

$$\begin{aligned}F(a,b,c) &= \frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)} + \frac{M(b,c,a)}{N(b,c,a)} + \frac{M(c,a,b)}{N(c,a,b)} - 3t.\\ &= G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2.\end{aligned}$$

CHỨNG MINH. Xét đa thức sau đây

$$\begin{aligned}H(a,b,c) =&M(a,b,c)N(b,c,a)N(c,a,b) + M(b,c,a)N(c,a,b)N(a,b,c)\\ &+M(c,a,b)N(a,b,c)N(b,c,c) - 3tN(a,b,c)N(b,c,a)N(c,a,b).\end{aligned}$$

Chú ý rằng $H(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng chuẩn, nên theo định lí trên thì tồn tại biểu diễn cơ sở cho đa thức này và do hệ quả được chứng minh. ❑

Bổ đề 4 (Biểu diễn chính tắc). *Giả sử α, β, γ là hữu tỉ có tổng bằng $3k$, khi đó tồn tại biểu diễn cơ sở cho biểu thức*

$$f_k(a,b,c) = \sum_{sym} a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} - 6a^k b^k c^k,$$

Trong đó tổng lấy trên tất cả các hoán vị $(\alpha', \beta', \gamma)$ của (α, β, γ).

CHỨNG MINH. Rõ ràng đây chỉ là hệ quả trực tiếp từ định lí về biểu diễn cơ sở đối với hàm đa thức. Tuy nhiên, ta sẽ chứng minh hệ quả này mà không dùng đến kết quả của định lí. Ngoài ra, ta cũng chứng minh hệ quả với lớp các hàm đa thức mở rộng, theo nghĩa hệ số các biến không nhất thiết nguyên mà có thể là số hữu tỉ. Lưu ý đến các tính chất sau đây

Tính chất. *Với mọi k hữu tỉ thì các đa thức*

$$f_1 = (a^k - b^k)(a-b) \qquad f_2 = a^k + b^k + c^k - 3\sqrt[3]{a^k b^k c^k}$$

luôn có biểu diễn cơ sở S.O.S, tức là tồn tại các đa thức (mở rộng) nửa đối xứng $G(a,b,c)$ sao cho nếu f là một trong 2 đa thức trên thì

$$f = G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2.$$

Chứng minh 2 với đa thức trên trên hoàn toàn bằng quy nạp và tương đối đơn giản. Ngoài ra với lớp hàm đa thức (hay k nguyên) thì bổ đề này là khá hiển nhiên. Sử dụng chúng, bài toán của chúng ta được chứng minh như sau

$$\begin{aligned}f_k(a,b,c) = &- a^\alpha(b^\beta - c^\beta)(b^\gamma - c^\gamma) - b^\alpha(a^\beta - c^\beta)(a^\gamma - c^\gamma) - c^\alpha(a^\beta - b^\beta)(a^\gamma - b^\gamma) +\\ &+ a^\alpha(b^\varphi + c^\varphi) + b^\alpha(c^\varphi + a^\varphi) + c^\alpha(a^\varphi + b^\varphi) - 6a^k b^k c^k,\end{aligned}$$

Trong đó $\varphi = \beta + \gamma$. Biểu thức ở dòng trên luôn có biểu diễn cơ sở. Biểu thức dòng dưới có thể viết lại thành

$$-(a^\alpha - b^\alpha)(a^\varphi - b^\varphi) - (b^\alpha - c^\alpha)(b^\varphi - c^\varphi) - (c^\alpha - a^\alpha)(c^\varphi - a^\varphi)$$
$$+ a^{3k} + b^{3k} + c^{3k} - 6a^k b^k c^k.$$

Bài toán của chúng ta đã được chứng minh. Đây là cách chứng minh sơ cấp cho định lí về biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S hoàn toàn bằng sơ cấp, vì từ kết quả này ta cũng suy ra luôn kết quả định lí trên. Ngoài ra, đây cũng là cách tổng quát cho phân tích cơ sở. □

Còn bây giờ là một số đẳng thức thường được sử dụng trong phân tích

- $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2 = \dfrac{(a-b)^2}{ab}$
- $a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2$
- $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \dfrac{1}{2}(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$
- $a^2 + b^2 + c^2 - \dfrac{1}{3}(a + b + c)^2 = \dfrac{1}{3}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$
- $(a + b)(b + c)(c + a) - 8abc = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dfrac{1}{2}(a + b + c)\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right)$
- $\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) = \dfrac{(a-b)^2}{a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}}$
- $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} - \dfrac{3}{2} = \sum_{sym} \dfrac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}$

Trong các biểu thức 3 biến bạn học nên chú ý tới các đại lượng $a-b, b-c, c-a$. Việc nhóm các đại lượng này một cách hợp lí sẽ rút ra được hạng tử $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$.

Bạn hãy xem ví dụ sau đây

Ví dụ 3.2.6. *Phân tích cơ sở S.O.S cho biểu thức*

$$\frac{ab}{a^2 + b^2 + kc^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 + ka^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 + kb^2} - \frac{3}{k+2}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $s = k - 1$ và $M = a^2 + b^2 + c^2$. Chú ý rằng

$$2(a^2 + b^2 + kc^2) - 2(k+2)ab = (k+2)(a-b)^2 + k(c^2 - a^2 + c^2 - b^2).$$

Ta có được 2 đại lượng là $c^2 - a^2, c^2 - b^2$ trong số hạng thứ nhất. Các đại lượng này xuất hiện lại trong các số hạng khác nên

$$\frac{ab}{a^2+b^2+kc^2} + \frac{bc}{b^2+c^2+ka^2} + \frac{ca}{c^2+a^2+kb^2} - \frac{3}{k+2}$$
$$= -\frac{1}{2(s+3)}\sum_{sym}\frac{(k+2)(a-b)^2 + k(c^2-a^2+c^2-b^2)}{M+sc^2}$$
$$= -\frac{1}{2(s+3)}\sum_{sym}\frac{(k+2)(a-b)^2}{M+sc^2} - \sum_{sym}\frac{k(c^2-b^2)}{2(s+3)}\left(\frac{1}{M+sc^2} - \frac{1}{M+sb^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2(s+3)}\sum_{sym}\frac{(k+2)(a-b)^2}{M+sc^2} + \sum_{sym}\frac{ks(b^2-c^2)^2}{2(k+3)(M+sb^2)(M+sc^2)}$$

Vậy biểu thức được viết gọn lại thành

$$\sum_{sym}\left(-\frac{k+2}{M+sc^2} + \frac{ks(a+b)^2}{(M+sa^2)(M+sb^2)}\right)(a-b)^2.$$

Ta tìm được các hệ số tương ứng của $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ trong phân tích cơ sở S.O.S là

$$S_c = -(s+3)(M+sa^2)(M+sb^2) + s(s+1)(a+b)^2(M+sc^2)$$
$$S_b = -(s+3)(M+sa^2)(M+sc^2) + s(s+1)(a+c)^2(M+sb^2)$$
$$S_a = -(s+3)(M+sb^2)(M+sc^2) + s(s+1)(b+c)^2(M+sa^2). \quad \square$$

Để có kĩ thuật tốt, bạn hãy xem lại những bất đẳng thức đã biết và thử phân tích chúng. Lưu ý rằng hầu hết các bất đẳng thức đơn giản đều có thể phân tích rất dễ dàng và đó là một sự thực hành tốt với các bạn. Hơn nữa, công việc này cũng rất có ý nghĩa để áp dụng S.O.S vào các bất đẳng thức sau này thuận lợi hơn.

Ví dụ 3.2.7. *Phân tích cơ sở cho các đa thức sau đây*

(i) $(a+b+c)^3 - 27abc.$

(ii) $a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c).$

(iii) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a).$

Một câu hỏi thú vị đặt ra là liệu phương pháp phân tích như vậy có duy nhất hay không? Và câu trả lời, tất nhiên là không duy nhất. Lấy ví dụ, ta có đẳng thức đơn giản sau với mọi a, b, c thực

$$(a-b)^2(a-c)(b-c) + (b-c)^2(b-a)(c-a) + (c-a)^2(c-b)(a-b) = 0.$$

Như vậy nếu ở mỗi hệ số trong phân tích cơ sở ta thêm bớt tương ứng các đại lượng $(a-c)(b-c), \ldots$ thì được một biểu diễn mới khác biểu diễn ban đầu.

3.2.3 Những ứng dụng quan trọng của phương pháp S.O.S

Sau đây là một số bài toán điển hình dựa trên phương pháp này

Ví dụ 3.2.8. *Tìm hằng số dương k lớn nhất để ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq k+\frac{3}{2}.$$

đúng với mọi a, b, c không âm.

LỜI GIẢI. Ta sử dụng biến đổi

$$\sum_{sym}\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)},$$

Bất đẳng thức được viết thành

$$\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \geq k\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}(a-b)^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(b+c)}-k\right) \geq 0.$$

+, Cho $b=c$, khi đó k phải thoả mãn điều kiện sau với mọi a, b không âm

$$k \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(b+c)}=\frac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}.$$

Có thể dễ dàng tìm được với $a, b \geq 0$ thì

$$\min f(a,b)=\frac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh đây là giá trị tốt nhất của k.

+, Với $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

$$S_a=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(a+b)}-k\ ,\ S_b=\frac{a^2+b^2+c^2}{(b+a)(b+c)}-k\ ,\ S_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(c+b)}-k.$$

Khi đó dễ thấy $S_c \geq S_b \geq S_a$. Ngoài ra

$$S_b + S_a = \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+2c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} - 2k.$$

Đặt $t = \frac{a+b}{2}$, không mấy khó khăn ta chứng minh được

$$S_b + S_a \geq \frac{(2t^2+c^2)(2t+2c)}{2t(t+c)^2} - 2k = \frac{2t^2+c^2}{t(t+c)} - 2k \geq 0$$

(Theo sự xác định của số k , mà ta không cần tính cụ thể từ trước). Vậy giá trị tốt nhất của k là $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ và có thêm trường hợp $a = b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}c$ (hoặc các hoán vị) khi $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. □

Ví dụ 3.2.9. *Tìm hằng số thực k tốt nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{1+bc}{ka^2+bc} + \frac{1+ca}{kb^2+ca} + \frac{1+ab}{kc^2+ab} \geq \frac{12}{k+1}$$

với a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $ab + bc + ca = 1$.

LỜI GIẢI. Đáp số cho bài toán này là $k \geq 2 + \sqrt{3}$. □

Ví dụ 3.2.10. *Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{c^2+2ab} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2 + \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}.$$

LỜI GIẢI. Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có

$$\begin{aligned}
&2 - \frac{a(b+c)}{a^2+2bc} - \frac{b(c+a)}{c^2+2ab} - \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{sym} \frac{2a^2+4bc-3a(b+c)}{a^2+2bc} = \frac{1}{3}\sum_{sym} \frac{(a-2c)(a-b)+(a-2b)(a-c)}{a^2+2bc} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{sym}\left(\frac{a-2c}{a^2+2bc} - \frac{b-2c}{b^2+2ac}\right) = \frac{1}{3}\sum_{sym} \frac{(a-b)^2(4ac+4bc-4c^2-ab)}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} \\
&= \sum_{sym} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} + \frac{4}{3}\sum_{sym} \frac{(c-a)(c-b)(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} \\
&= \sum_{sym} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} - \frac{4(c-a)^2(c-b)^2(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum_{sym} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} \geq \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}$$

$\Leftrightarrow \left(ab(c^2+2ab) - 2(a-c)^2(b-c)^2\right) + bc(a^2+2bc)(b-c)^2 + ca(c^2+2ab)(c-a)^2 \geq 0.$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng do $ab \geq (a-c)(b-c)$. Ta có *đpcm*.

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c$ hoặc $abc = 0$. □

Phương pháp S.O.S không chỉ ứng dụng rất tốt đối với các bất đẳng thức đối xứng mà nó còn được sử dụng hiệu quả trong các dạng bất đẳng thức hoán vị. Sau đây là một ví dụ mở đầu có nhiều ý nghĩa.

Ví dụ 3.2.11. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lời Giải. Từ bất đẳng thức cơ bản $a^2/b + b \geq 2a$ ta suy ra đẳng thức sau

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b} - \sum_{sym} a = \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b}.$$

Ngoài ra dễ thấy rằng

$$\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} - (a+b+c) = \sum_{sym} \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2},$$

Từ đó ta tìm được các hệ số trong phân tích cơ sở là

$$S_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{b} - (a+b) = \frac{a^2+c^2}{b} - a, \quad S_b = \frac{c^2+b^2}{a} - b, \quad S_a = \frac{b^2+a^2}{c} - c.$$

Do tính hoán vị của các biến nên ta phải xét cả 2 trường hợp

+, $a \geq b \geq c$. Khi đó dễ thấy $S_a \geq 0, S_c \geq 0$.

Phần còn lại ta sẽ chứng minh $S_a + 2S_b \geq 0$ và $S_c + 2S_b \geq 0$. Cả 2 bất đẳng thức này rất dễ chứng minh, xin dành cho bạn đọc tự hoàn chỉnh.

+, $a \leq b \leq c$, khi đó $S_b \geq 0, S_c \geq 0$ và cũng không mấy khó khăn ta chứng minh được $S_b + S_a \geq 0$.

Do đó bất đẳng thức được chứng minh xong trong mọi trường hợp. Đây là một bài toán điển hình cho việc áp dụng *trực tiếp* trực tiếp các tiêu chuẩn của phương pháp

S.O.S đã được trình bày ở trên. □

Không chỉ dừng lại trong lớp các bài toán 3 biến, phương pháp vẫn được sử dụng trong các bài toán bất đẳng thức tổng quát với n biến

Ví dụ 3.2.12. *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương có tổng bằng n thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{2\sqrt{2}n}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \geq n + 2\sqrt{2}.$$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng biến đổi sau

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - \frac{n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i<j}\frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j},$$
$$1 - \frac{n}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = n\left(\frac{n}{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2} - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\right)$$
$$= \frac{\sum_{i<j}(a_i - a_j)^2}{n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}.$$

Đặt
$$S_{ij} = \frac{1}{a_i a_j} - \frac{2\sqrt{2}}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.$$

Ta phải chứng minh $\sum_{i<j} S_{ij}(a_i - a_j)^2 \geq 0.$

Nhóm từng nhóm 3 số hạng và ta sẽ chứng minh 1 bất đẳng thức mạnh hơn

$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$
$$S_a = \frac{1}{bc} - \frac{2\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$S_b = \frac{1}{ac} - \frac{2\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$S_c = \frac{1}{ab} - \frac{2\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Dễ thấy $S_a \geq S_b \geq S_c$,

$$S_b + S_c = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{4\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Đặt $t = \dfrac{b+c}{2}$, khi đó $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{2}{t}$ nên ta suy ra

$$S_b + S_c \geq \frac{2}{at} - \frac{4\sqrt{2}}{a^2 + 2t^2} \geq \frac{2}{at} - \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}at} = 0.$$

Vậy $S_b \geq 0$ và ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra chỉ khi tất cả các biến bằng nhau với $n \geq 4$. Khi $n = 3$ còn có thêm 1 trường hợp nữa là $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$ hoặc các hoán vị. □

Sau đây là một số bài toán hay vận dụng phương pháp này

Ví dụ 3.2.13. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}.$$

Ví dụ 3.2.14 (Bất đẳng thức dạng Schur). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2a^2+2b^2} + bc\sqrt{2b^2+2c^2} + ca\sqrt{2c^2+2a^2}.$$

Ví dụ 3.2.15. *Chứng minh rằng cho mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + \frac{54abc}{(a+b+c)^3} \geq 5.$$

Ví dụ 3.2.16. *Tìm hằng số thực dương k nhỏ nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} + k\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{4} + \frac{k}{3},$$

Với a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

Ví dụ 3.2.17. *Tìm hằng số thực dương k nhỏ nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + k\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq 1 + \frac{k}{3},$$

Với a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

Ví dụ 3.2.18. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có*

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4} + \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \geq 5.$$

Ví dụ 3.2.19. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có*

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca} + \frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Ví dụ 3.2.20. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm ta có*

$$\frac{7(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{11}{3}(a+b+c).$$

Ví dụ 3.2.21. *Tìm điều kiện cho các số dương k, l để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+l\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{3}{2}+k+\frac{l}{3}.$$

Ví dụ 3.2.22. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Ví dụ 3.2.23. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Nếu như các bạn đã thực sự hiểu rõ về S.O.S thì chắc chắn những bất đẳng thức như trên sẽ không thể làm khó được các bạn, và ngay lập tức bạn có thể khẳng định rằng chúng được giải bằng S.O.S. Nhưng nếu không quen thì những bất đẳng thức rất đẹp như trên quả là một thử thách không dễ gì vượt qua được.

Hiện nay, phương pháp S.O.S không còn quá xa lạ (dù mới chỉ xuất hiện trong khoảng 1 năm gần đây) và nó đã thực sự chứng tỏ hiệu quả vượt trội của mình với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến mà không có cách nào khác so sánh được. Để kết thúc cho phần này, xin giới thiệu thêm với các bạn một gợi mở về phương pháp S.O.S đối với một lớp các bài toán đặc biệt.

3.2.4 Suy luận từ một bài toán

Hãy mở đầu với bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 3.2.24. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ac}{(a+c)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geq\frac{3}{2}.$$

LỜI GIẢI. Tất nhiên trong bài toán này ta có thể dùng S.O.S không mấy khó khăn, nhưng lại là *quá mạnh* và còn nhiều cách dễ dàng hơn. Có một cách rất đơn giản, đó là sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev*. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{2a^2-b^2-c^2}{(b+c)^2}+\frac{2b^2-a^2-c^2}{(a+c)^2}+\frac{2c^2-a^2-b^2}{(a+b)^2}\geq 0.$$

Chú ý rằng nếu $a \geq b \geq c$ thì

$$2a^2 - b^2 - c^2 \geq 2b^2 - a^2 - c^2 \geq 2c^2 - a^2 - b^2,$$
$$\frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2},$$

Và do đó áp dụng trực tiếp bất đẳng thức *Chebyshev* ta sẽ có *đpcm.* □

Ví dụ 3.2.25. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương*

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+2ac}{(a+c)^2} + \frac{c^2+2ab}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

Lời Giải. Đối với bài toán này ta cũng chưa cần dùng đến S.O.S. Các bạn có thể tự tìm lời giải bằng S.O.S, nếu không muốn chờ xem ở bài tổng quát tiếp theo. Ta dùng một bất đẳng thức sau, cũng rất đáng chú ý

$$\frac{a^2+2bc}{b+c} + \frac{b^2+2ac}{a+c} + \frac{c^2+2ab}{a+b} \geq \frac{3}{2}(a+b+c).$$

Khai triển và rút gọn các thừa số chung, ta được một bất đẳng thức rất đơn giản

$$2(a^4+b^4+c^4)+2abc(a+b+c) \geq a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Sử dụng bất đẳng thức *Schur* và bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\sum_{sym} a^2(a-b)(a-c) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{sym} a^4 + abc\sum_{sym} a \geq \sum_{sym} a^3(b+c),$$
$$a^3(b+c) + b^3(a+c) + c^3(a+b) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả bài toán ban đầu

$$\left(\sum_{sym} \frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}\right)\left(\sum_{sym}(a^2+2bc)\right) \geq \left(\sum_{sym} \frac{a^2+2bc}{b+c}\right)^2 \geq \frac{9}{4}(a+b+c)^2.$$

Ngoài ra, hãy chú ý rằng $k=2$ là hằng số thực lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c không âm

$$\frac{a^2+kbc}{b+c} + \frac{b^2+kac}{a+c} + \frac{c^2+kab}{a+b} \geq \frac{1+k}{2}(a+b+c).$$

Và hơn nữa,

$$\frac{a^2+kbc}{b+c} + \frac{b^2+kac}{a+c} + \frac{c^2+kab}{a+b} \geq \min\left(\frac{1+k}{2}, \frac{4+k}{4}\right)(a+b+c). \quad \square$$

Ví dụ 3.2.26. *Tìm hằng số thực k lớn nhất cho bất đẳng thức sau với $a, b, c \geq 0$*

$$\frac{c^2+kab}{(a+b)^2}+\frac{b^2+kac}{(a+c)^2}+\frac{a^2+kbc}{(b+c)^2}\geq\frac{3(1+k)}{4}.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ sử dụng phương pháp S.O.S để giải bài toán này.

Cho $c = 0$ và $a = b$ rút ra $k \leq \frac{5}{2}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là kết quả tốt nhất của k. Rõ ràng để chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi $k \leq \frac{5}{2}$ ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $k = 5/2$

$$\frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2}+\frac{2b^2+5ac}{(a+c)^2}+\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2}\geq\frac{21}{4}.$$

Và với phương pháp S.O.S thì bất đẳng thức này tương đối đơn giản. Ta có

$$\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2}-\frac{7}{4}=\frac{8a^2+6bc-7b^2-7c^2}{4(b+c)^2}=\frac{4(2a^2-b^2-c^2)-3(b-c)^2}{4(b+c)^2}.$$

Ta phải chứng minh

$$4\sum_{sym}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{(b+c)^2}-\frac{1}{(a+c)^2}\right)\geq 3\sum_{sym}\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{sym}\frac{(a-b)^2(a+b)(a+b+2c)}{(b+c)^2(a+c)^2}\geq 3\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}\left(4(a+b)^3(a+b+2c)-3(a+c)^2(b+c)^2\right)(a-b)^2\geq 0.$$

Lấy tương ứng S_c, S_a, S_b là các hệ số của $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ trong khai triển cơ sở trên. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

Dễ thấy $S_c \geq S_b \geq S_a$ và như vậy phần còn lại của bài toán ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $S_a + S_b \geq 0$, hay

$$\begin{aligned}4(a+c)(b+c)\left((a+c)^2+(b+c)^2\right)+4(a+b)\left((a+c)^3+(b+c)^3\right)&\\ \geq 3(a+b)^2\left((b+c)^2+(a+c)^2\right).&\end{aligned}$$

Có thể dễ dàng nhận thấy rằng hệ số của c và c^2 ở vế phải nhỏ hơn ở vế trái. Do đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trên khi $c = 0$, hay

$$4ab(a^2+b^2)+4(a+b)(a^3+b^3)\geq 3(a+b)^2(a^2+b^2).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a^4+b^4+2ab(a^2+b^2)\geq 6a^2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(4ab+a^2+b^2)\geq 0.$$

Hiển nhiên đúng, đẳng thức xảy ra trong trường hợp $k = 5/2$ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. ❑

Bài toán tổng quát thứ nhất đã được chứng minh xong. Một cách tự nhiên, ta tìm ước lượng cho bất đẳng thức tương tự

Ví dụ 3.2.27. *Tìm hằng số thực k lớn nhất để bất đẳng thức sau*

$$\frac{a^2+kbc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+kac}{a^2+c^2}+\frac{c^2+kab}{a^2+b^2}\geq\frac{3(1+k)}{2},$$

Đúng với mọi a, b, c không âm.

LỜI GIẢI. Ta lấy $c = 0, a = b$ để suy ra $k \leq 1/2$. Ta sẽ chứng minh giá trị này thoả mãn, và do đó bất đẳng thức sẽ vẫn đúng với mọi $k \leq 1/2$.

$$\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{2b^2+ac}{a^2+c^2}+\frac{2c^2+ab}{a^2+b^2}\geq\frac{9}{2}.$$

Đưa về các tổng bình phương bằng khai triển

$$\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}-\frac{3}{2}=\frac{2(2a^2-b^2-c^2)-(b-c)^2}{2(b^2+c^2)},$$

Và do đó ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$2\sum_{sym}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{a^2+c^2}\right)\geq\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$$
$$\Leftrightarrow\sum_{sym}\left(2(a+b)^2(a^2+b^2)-(a^2+c^2)(b^2+c^2)\right)(a-b)^2\geq 0.$$

Lấy S_a, S_b, S_c là các hệ số tương ứng của $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ trong bất đẳng thức trên. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $S_c \geq S_b \geq S_a$. Ta phải chứng minh thêm $S_b + S_a \geq 0$, hay tương đương với

$$2(a+c)^2(a^2+c^2)+2(b+c)^2(b^2+c^2)\geq(a^2+b^2)(a^2+b^2+2c^2).$$

Cũng dễ dàng nhận thấy hệ số của c^2 ở vế phải nhỏ hơn vế trái, và do đó ta chỉ cần chứng minh khi $c = 0$, hay

$$2a^4+2b^4\geq(a^2+b^2)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)^2\geq 0.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và nếu $k = 1/2$ thì có thêm 1 trường hợp $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. ❑

Nếu bạn là người tò mò và thích khám phá, hãy tự mình nghiên cứu thêm một bài toán tương tự

Ví dụ 3.2.28. *Tìm hằng số thực k lớn nhất để bất đẳng thức*

$$\frac{a^2+kbc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+kac}{a^2-ac+c^2}+\frac{c^2+kab}{a^2-ab+b^2}\geq 3(1+k),$$

Đúng với mọi a, b, c không âm.

Và ta cũng có thể làm mạnh hơn bất đẳng thức ban đầu bằng bất đẳng thức

Ví dụ 3.2.29. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có*

$$\frac{4(a^2+bc)}{b^2+c^2}+\frac{4(b^2+ac)}{a^2+c^2}+\frac{4(c^2+ab)}{a^2+b^2}\geq 3+\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Sau đây là một kết quả *tổng quát* nhất từ các bài toán quả đã nói tới. Tác giả sẽ không nêu lời giải cụ thể ở đây, vì lời giải cho bài toán tổng quát cũng không khác với lời giải cho 2 bài toán trên nhiều lắm, và quan trọng hơn là cũng sử dụng phương pháp S.O.S theo cách tương tự.

Ví dụ 3.2.30. *Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm và p, q là các hằng số thoả mãn $p\geq -2$, $q\leq 2p+1$*

$$\frac{a^2+qbc}{b^2+pbc+c^2}+\frac{b^2+qac}{a^2+pac+c^2}+\frac{c^2+qab}{a^2+pab+b^2}\geq\frac{3(q+1)}{p+2}.$$

Cuối cùng, các bạn hãy sử dụng phương pháp S.O.S để giải các bài toán sau đây

Ví dụ 3.2.31. *Tìm hằng số k tốt nhất (lớn nhất) để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}+k\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\geq\frac{3}{8}+\frac{k}{3}.$$

Ví dụ 3.2.32. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm bất đẳng thức sau đây luôn đúng*

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Ví dụ 3.2.33. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có*

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Đây là các bài toán hay và khó giúp bạn tổng kết lại về phương pháp này.

Đôi điều tản mạn về bất đẳng thức Jack Garfulkel

Phan Thành Nam

April 26,2009

Biên tập :Vũ Thanh Tú

Đôi điều tản mạn về bất đẳng thức (BĐT) Jack Garfulkel

Phan Thành Nam

Lời tựa. Khi tôi còn là học sinh, các BĐT hình học của Jack Garfulkel từng gây ấn tượng rất mạnh với tôi như là những bất đẳng thức tuyệt diệu nhất: đẹp, khó và đầy bí ẩn. Vậy mà, chỉ sau vài năm, các bất đẳng thức này đã không còn gây "khó dễ" được với nhiều người nữa. Bây giờ nhìn lại điều đáng mừng này cũng thấy bất ngờ.

Tuy nhiên, với tôi đây vẫn là các bất đẳng thức thực sự đáng nhớ. Vẫn còn đó vẻ đẹp giản dị và thuần khiết dù độ khó đã giảm đi nhiều; vẫn còn đó những băn khoăn, trăn trở khi đứng trước những vấn đề hóc búa; vẫn còn đó niềm vui nhẹ nhàng mà sâu lắng của những tìm tòi khám phá tuy rằng nhỏ ....

Tôi xin chép ra đây đôi điều tản mạn về một vài bất đẳng thức của Jack Garfulkel, gồm một số suy nghĩ là khi tôi còn học phổ thông, và một số là khi tôi tham gia diễn đàn này.

Phần 1.Từ một lời giải "kì lạ"...

Xin bắt đầu bằng một bài toán rất quen thuộc của **Jack Garfulkel**.
Bài toán 1. Cho tam giác ngọn ABC. Chứng minh rằng:

$$\sin(\frac{A}{2})+\sin(\frac{B}{2})+\sin(\frac{C}{2})\geq\frac{4}{3}(1+\sin(\frac{A}{2}).\sin(\frac{B}{2}).\sin(\frac{C}{2}))$$

Ta sẽ kí hiệu
$x=\sin\left(\frac{A}{2}\right), y=\sin\left(\frac{B}{2}\right), z=\sin\left(\frac{C}{2}\right)$
Khi A, B, C là 3 góc một tam giác thì ta có x, y, z > 0 và $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ (*).

Khi đó, **Bài toán 1** có thể viết lại thành.

Bài toán 1a. Cho $x,y,z\in(0,1/\sqrt{2})$ thỏa $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

CMR: $3(x+y+z)\geq 4(1+xyz)$
Ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn:

Bài toán 1b. Cho $x,y,z\in[0,\sqrt{3}-1]$ thỏa $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.
CMR: $3(x+y+z)\geq 4(1+xyz)$
Chứng minh. Giả sử x=max(x,y,z), khi đó $x\in[1/2,\sqrt{3}-1]$. Ta có:

$(\sqrt{2-2x}-x)(\sqrt{2-2x}-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2+x+3\sqrt{2-2x} \geq 4$ (1)

Mặt khác, dễ thấy: $1-z^2 = x^2+y^2+2xyz \geq 2xy(1+z)$ nên $x+2yz \leq 1$.

Cụ thể hơn, xét hiệu
$0 \leq 1-x-2yz = (\sqrt{2}-\sqrt{1+x+2yz})(\sqrt{2}+\sqrt{1+x+2yz})$

Ta có: $2x(\sqrt{2}+\sqrt{1+x+2yz}) \geq \sqrt{2}+1 > 3\sqrt{1-x}$, và $(1-x)(1+x+2yz) = (y+z)^2$,

suy ra: $2x(1-x-2yz) \geq 3\sqrt{1-x}(\sqrt{2}-\sqrt{1+x+2yz})$

$\Rightarrow 2x-2x^2-3\sqrt{2-2x}+3(y+z) \geq 4xyz$ (2)
Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta có đpcm.

Cách thay các yếu tố lượng giác bởi các biến thực x, y, z kèm điều kiện

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ có thể tạm gọi là "đại số hóa lượng giác" (ngược với một cách làm thông thường là lượng giác hóa đại số). Chúng ta cũng có các lời giải đại số kiểu như vậy cho hai bài toán sau, cũng của **Jack Garfulkel** (thật ra thì Bài toán 2 yếu hơn - tức có thể xem như hệ quả- của Bài toán 1). Lời giải chi tiết xin dành cho các bạn.

Bài toán 2. Cho tam giác ngọn ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos(\frac{A}{2})+\cos(\frac{B}{2})+\cos(\frac{C}{2}) \geq \frac{4}{\sqrt{3}}(1+\cos(\frac{A}{2}).\cos(\frac{B}{2}).\cos\frac{C}{2}))$$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:
$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{C-A}{2}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B+\sin C)$

Như chúng ta sẽ thấy, lời giải có vẻ "kì lạ" của bài toán 1.b nói trên thật ra chẳng kì lạ chút nào. Lời giải này chẳng qua là viết lại dưới dạng đại số một lời giải dựa trên biến đổi lượng giác đã đăng trên THTT 12/2001, có điều lời giải lượng giác cần điều kiện $A,B,C \geq \frac{\pi}{4}$, trong khi lời giải đại số thì bất ngờ thoát được điều kiện đó. Còn viết một biến đổi lượng giác dưới dạng đại số thế nào thì ta sẽ đề cập sau đây

Phần 2.Tới một bài toán Olympic

Chúng ta có một ví dụ khác, được trình bày cụ thể hơn, cho mối liên hệ giữa cách làm đại số và lượng giác. Sau đây là một bài toán trong đề dự tuyển IMO 1995.

Bài toán 1. Tìm tất cả các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ 4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc \end{cases}$$
trong đó a, b, c là các số thực dương cho trước.

Nhận xét rằng nếu đặt
$$\alpha=\frac{a}{2\sqrt{yz}},\beta=\frac{b}{2\sqrt{zx}},\gamma=\frac{c}{2\sqrt{xy}}$$
thì hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} x+y+z=2\sqrt{xy}\alpha+2\sqrt{yz}\beta+2\sqrt{zx}\gamma(1) \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=1(2) \end{cases}$$

Hệ trên thuộc loại "không mẫu mực" vì có tới 3 ẩn trong khi chỉ có 2 phương trình, và thực chất nó là một bài toán cực trị. Cụ thể hơn, ta thấy nếu đặt
$\alpha=\cos A,\beta=\cos B,\gamma=\cos C$
với A, B, C là 3 góc một tam giác, thì "cốt lõi" bài toán trên chính là BDT quen thuộc:
$2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C\le a^2+b^2+c^2$ (*)
Tới đây, có lẽ các bạn đã thấy rõ lời giải bài toán 1.

Bây giờ, ta khái quát lại bài toán ở trên thành
Bài toán 2. Cho các số thực không âm a, b, c, x, y, z thỏa mãn $x+y+z\ge a+b+c$.
CMR: $ax^2+by^2+cz^2+xyz\ge 4abc$.

Đây là một bài toán hay. Tất nhiên chúng ta có thể dùng lượng giác hóa như phân tích ở trên để giải, nhưng từ đẳng thức (2) ta còn hi vọng sẽ có một lời giải khác cho nó chỉ bằng đại số.
Trước hết, chúng ta thử nhìn BDT (*) dưới quan điểm đại số.

Bài toán 3. Cho $\alpha,\beta,\gamma\in[-1,1]$ thỏa $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma\le 1$, và các số thực a,b,c.

CMR: $2bc\alpha+2ca\beta+2ab\gamma\le a^2+b^2+c^2$.
Chứng minh.
Xuất phát từ lời giải lượng giác
$$a^2+b^2+c^2-2bc\cos A-2ca\cos B-2ab\cos C$$
$$=(b\sin C-c\sin B)^2+(a-b\cos C-c\cos B)^2\ge 0$$
ta thay (α,β,γ) cho $(\cos A,\cos B,\cos C)$ để thu được biến đổi

$$a^2+b^2+c^2-2bc\alpha-2ca\beta-2ab\gamma=$$

$$[a^2-2a(c\beta+b\gamma)+(c\beta+b\gamma)^2]+[(1-\gamma^2)b^2+(1-\beta^2)c^2]-2bc(\alpha+\beta\gamma)$$
$$=(a-b\gamma-c\beta)^2+(\sqrt{1-\gamma^2}b+\sqrt{1-\beta^2}c)^2+2bc(\sqrt{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}-\alpha-\beta\gamma)\ge 0$$

Bài toán 3 chứng minh xong.
Bây giờ ta áp dụng các biến đổi trên vào bài toán 2.
Giả sử $ax^2+by^2+cz^2+xyz<4abc$,
khi đó a, b, c đều dương và
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma<1$
Với $\alpha=\dfrac{x}{2\sqrt{bc}}, \beta=\dfrac{y}{2\sqrt{ca}}, \gamma=\dfrac{z}{2\sqrt{ab}}$
Sử dụng các phép biến đổi trong chứng minh **Bài toán 3**, ta có

$$a+b+c-x-y-z>0$$
$$\Leftrightarrow a+b+c-2\sqrt{bc}\alpha-2\sqrt{ca}\beta-2\sqrt{ab}\gamma>0$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b}\gamma-\sqrt{c}\beta)^2+(\sqrt{1-\gamma^2}b+\sqrt{1-\beta^2}c)^2+2\sqrt{bc}(\sqrt{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}-\alpha-\beta\gamma)>0$$
$$\Leftrightarrow(2a-z-y)^2+(\sqrt{4ab-z^2}-\sqrt{4ac-y^2})^2+2(\sqrt{(4ac-y^2)(4ab-z^2)}-4ax-yz)>0$$

Từ đó, ta có một lời giải rất ngắn gọn cho **Bài toán 2** như sau.

Lời giải bài toán 2.

Tất nhiên ta chỉ cần xét khi $4ab>z^2$ và $4ca>y^2$. Khi đó $a>0$ và ta có

$$x+y+z\geq a+b+c$$
$$\Rightarrow 4ax\geq 4a^2+4ab+4ac-4ay-4az$$
$$\Rightarrow 4ax+2yz\geq(2a-y-z)^2+(4ab-z^2)+(4ac-y^2)\geq 2\sqrt{(4ab-z^2)(4ac-y^2)}$$
$$\Rightarrow(2ax+yz)^2\geq(4ab-z^2)(4ac-y^2)$$
$$\Rightarrow 4a(ax^2+by^2+cz^2+xyz)\geq 16a^2bc$$

Suy ra đpcm.

Đối với tôi, đây là một lời giải thật sự ấn tượng. Nó là kết quả của một "chu trình": chuyển từ đại số qua lượng giác, rồi chuyển ngược trở lại đại số. Tuy nhiên, đây không hẳn là con đường duy nhất để có lời giải này. Trước đây, đã có lần tôi đưa bài toán 2 lên diễn đàn toán học và nhận được một lời giải rất giống về mặt ý tưởng (chỉ dùng BDT Cauchy) của bạn **Trần Quốc Hoàn** (K09). Đó là một kỉ niệm thú vị.

Cuối cùng, xin nêu 1 bài toán để các bạn suy nghĩ.

Bài toán 4. Cho tứ diện vuông O.ABC. Giả sử α,β,γ là các góc nhị diện cạnh BC, CA, AB. CMR

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma\geq tg\alpha.tg\beta.tg\gamma+4cotg\alpha.cotg\beta.cotg\gamma\geq 2(cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma)$$

Phần 3.Vài vấn đề với đường trung tuyến

Sau đây là một trong những bất đẳng thức rất đẹp khác của **Jack Garfulkel**:

Bài toán 1. $m_a+l_b+h_c\leq\sqrt{3}p$
với m_a,l_b,h_c,p là các kí hiệu quen thuộc của độ dài trung tuyến, phân giác trong,

đường cao, và nửa chu vi của một tam giác.

Cách đây gần 10 năm thì đây vẫn là một bài toán khó. Một trong những lời giải đầu tiên cho nó là chứng minh BDT mạnh hơn
$m_a+m_b+l_c\le\sqrt{3}p$
với c là cạnh lớn nhất trong 3 cạnh tam giác. Chứng minh này dựa trên bổ đề là

$m_a+m_b\le\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+2c^2}$ (*)

Bổ đề trên được đề xuất và chứng minh dựa theo ý tưởng hình học (áp dụng BDT Ptoleme cho tứ giác lồi). Tuy nhiên, ta cũng có thể chứng minh trực tiếp dựa và biểu diễn tường minh của đường trung tuyến
$m_a=\sqrt{px+\frac{(y-z)^2}{4}}$
với a=y+z,b=z+x,c=x+y và p=x+y+z. Chúng ta sẽ trở lại Bổ đề này sau.

Trong một bài viết trên THTT, anh **Phạm Gia Vĩnh Anh** đã đưa ra và chứng minh một kết quả mạnh hơn là
Bài toán 2. $m_a+l_b+l_c\le\sqrt{3}p$
Hơn nữa, đây là một chứng minh ngắn gọn chỉ bằng BDT Cauchy (dựa trên biểu diễn của m_a và các đánh giá quen thuộc $l_b\le\sqrt{py},l_c\le\sqrt{pz}$).

Đối với bài toán 2, ta cũng có thể chứng minh ngắn gọn hơn nữa nhờ BDT Bunhiacopski. Lời giải sau đây dựa theo ý của bạn **Phùng Trọng Thực**.

Lời giải bài toán 2. Để đơn giản, ta cho p=1. Ta có
$$m_a+l_b+l_c\le\sqrt{x+\frac{(y-z)^2}{4}}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$
$$\le\sqrt{(1+2)(x+\frac{(y-z)^2}{4}+\frac{(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{2})}$$
$$=\sqrt{3(1+\frac{(y-z)^2}{4}-\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}{2})}\le\sqrt{3}.$$
Kết quả ở bài toán 2 đã là khá chặt, vì như chúng ta biết, bất đẳng thức sau đây không đúng $m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3}p$. Cũng trong bài viết của mình, anh **Vĩnh Anh** đã đưa ra BDT sau nhằm "bù đắp" cho sự không đúng của BDT trên.
$$m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3}p+\frac{1}{4}(|a-b|+|b-c|+|c-a|)$$

Tuy nhiên, hằng số k=1/4 không phải là tốt nhất. Thực ra ta có
Bài toán 3. Chứng minh rằng trong một tam giác thì
$$m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3}p+k(|a-b|+|b-c|+|c-a|)$$
với $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Với các cách tiếp cận trước đây thì thậm chí tìm ra hằng số tốt nhất đã là một bài toán rất khó. Tuy nhiên, giờ đây có lẽ lời giải bài toán trên là nằm trong khả năng của các bạn.

Một hướng khác để "bù đắp" cho BDT không đúng
$m_a+m_b+m_c\leq\sqrt{3}p$
là như sau. Ta viết lại BDT này thành
$\sqrt{px+\frac{(y-z)^2}{4}}+\sqrt{px+\frac{(y-z)^2}{4}}+\sqrt{px+\frac{(y-z)^2}{4}}\leq\sqrt{3}p$
Từ đó xuất hiện câu hỏi là có thể giảm hệ số k=1/4 trong công thức đường trung tuyến để BDT trên trở thành đúng. Một câu trả lời là k=1/12.
Bài toán 4. (VMEO I, bài 1) Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. CMR
$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{12}}\geq\sqrt{3}$

Bài toán này đặt ra dựa trên hướng tiếp cận ban đầu cho bài toán của **Jackgarfulkel**. Từ bổ đề (*) ta có thể khái quát thành
Bổ đề A. Cho các số thực a, b, u, v sao các căn thức dưới đây có nghĩa. Khi đó 2 điều sau là tương đương

(i) $\sqrt{a+u^2}+\sqrt{b+v^2}\geq\sqrt{2(a+b)+(u+v)^2}$

(ii) $4(u-v)(bu-av)\geq(a-b)^2$
(điều kết luận vẫn đúng nếu ta thay các dấu $\geq$ thành $\leq$).
Để chứng minh bổ đề ta chỉ việc liên tục bình phương và đơn giản 2 vế.

Chứng minh bài toán 4.
Áp dụng bổ đề A với $u=(b-c)/\sqrt{12}$, $v=(a-c)/\sqrt{12}$ ta thu được
$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}\leq\frac{5-3c}{\sqrt{12}}$
Cùng với 2 BDT tương tự ta có đpcm.

Mặt dù con số k=1/12 dẫn tới biến đổi đại số rất đẹp ở lời giải trên, nhưng nó không phải là hằng số tốt nhất. Cũng như đối với Bài toán 3, trước đây thậm chí tìm ra hằng số tốt nhất đã là một bài toán rất khó, nhưng bây giờ thì giải quyết nó không phải là điều quá khó. Cụ thể, kimluan đã tìm được kết quả sau bằng dồn biến.
Bài toán 5. Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng
$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2}\leq\sqrt{3}$
với $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Chú ý rằng trong bài toán 5 thì $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ là hằng số tốt nhất vì đẳng thức xảy ra tại a=b=c=1/3 và a=1,b=c=0 và các hoán vị. Một điều thú vị là đây cũng chính là hằng số tốt nhất trong bài toán 3.

Khi đổi dấu BDT trong **Bài toán 5** thì ta được bài toán sau đây (đẳng thức cũng đạt được tại 2 chỗ), mà lời giải – khá đơn giản – xin được dành lại cho các bạn.
Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. CMR
$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}\geq\sqrt{3}$

Phần 4. Một dạng BDT chứa căn

Bổ đề A ở bài trên cho ta một tiêu chuẩn rất dễ kiểm tra đối với BDT có vẻ "không tầm thường" sau
$\sqrt{a+u^2}+\sqrt{b+v^2}\geq\sqrt{2(a+b)+(u+v)^2}$.
và từ đó dẫn tới khá nhiều bài toán thú vị. Bây giờ xuất hiện câu hỏi là liệu có một kết quả nào, tương tự như Bổ đề A, để áp dụng cho nhiều hơn 2 biến không? Nói riêng, trong trường hợp 3 số, thì liệu có một tiêu chuẩn nào (tương đối dễ kiểm tra) áp đặt lên các số a, b, c, x, y, z sao cho ta có
$\sqrt{a+x^2}+\sqrt{b+y^2}+\sqrt{c+a^2}\geq\sqrt{3(a+b+c)+(x+y+z)^2}$

Ở đây $\geq$ có thể thay bằng $\leq$. Tuy nhiên, một tiêu chuẩn tổng quát vẫn chưa tìm ra, và các BDT dạng này vẫn là những bài toán khó, gần như mỗi bài lại cần một cách giải riêng. Chẳng hạn, ta thấy các BDT đã nói ở mục trước nằm trong dạng tổng quát này: với a, b, c không âm, a+b+c=1 thì

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2}$$
$$\leq\sqrt{3(a+b+c)+(\sqrt{k}(b-c)+\sqrt{k}(c-a)+\sqrt{k}(a-b))^2}=\sqrt{3}$$
với $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, và
$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}$$
$$\geq\sqrt{3(a+b+c)+((b-c)+(c-a)+(a-b))^2}=\sqrt{3}$$

Sau đây là một số ví dụ khác cho các BDT dạng này.
Bài toán 1. Cho 3 số không âm x, y, z có tổng bằng 1. CMR:
$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}\geq 2$

Nhận xét là BDT trên có dạng

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}\geq\sqrt{3(x+y+z)+(y+z+x)^2}=\sqrt{4}=2,$$
Đồng thời đẳng thức xảy ra tại x=y=z=1/3 và x=1,y=z=0.
Chứng minh bài toán 1.
Ta quan sát mối tương quan giữa các biểu thức
$a_1=x+y^2, b_1=y+z^2, b_2=z+y^2$
Ta có
$b_1-b_2=(y-z)(1-y-z)=x(y-z)$

và

$a_1 = x+y^2 = x(1-x)+(x+y)^2-2xy = x(y+z)+(x+y)^2-2xy = (x+y)^2-x(y-z)$

Vậy: $a_1+b_1 = c+b_2$, với $c=(x+y)^2$.

Ta có bổ đề đơn giản sau đây cho phép hoán vị các biểu thức dưới dấu căn

Bổ đề. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn a+b=c+d và $|a-b| \le |c-d|$. Thì $\sqrt{a}+\sqrt{b} \ge \sqrt{c}+\sqrt{d}$.

Trở lại bài toán, giả sử c=min(a,b,c). Ta sẽ kiểm tra rằng $|a_1-b_1| \le c-b_2$. Ta có:

$c-b_2 = (x+y)^2-(z+y^2) = x(x+2y)-z = x(1+y-z)-z = (x-z)+x(y-z)$

và

$a_1-b_1 = x+y^2-y-z^2 = x-y+(y-z)(1-x) = (x-z)-x(y-z)$

Vì x-z và x(y-z) đều không âm nên ta có đpcm.

Từ đó, áp dụng bổ đề ta có:

$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2} \ge (x+y)+\sqrt{z+y^2}$

Và suy ra

$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}$

$\ge x+y+\sqrt{z+y^2}+\sqrt{z+x^2}$

$\ge x+y+\sqrt{(\sqrt{z}+\sqrt{z})^2+(x+y)^2}$

$= x+y+\sqrt{4z+(1-z)^2} = x+y+(2-z) = 2$

Bài toán chứng minh xong!

Bài toán 2. (VMEO III, bài 8) Cho x, y, z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$\sqrt[3]{x-y+z^3}+\sqrt[3]{y-z+x^3}+\sqrt[3]{z-x+y^3} \le 1$

Chứng minh.

Nhận xét rằng dấu "=" xảy ra x=y=z và x=1,y=z=0 (cùng các hoán vị). Ta cũng sẽ giải bài này bằng cách hoán đổi các biểu thức dưới dấu căn. Ta có bổ đề sau.

Bổ đề. Cho các só thực A, B, C, D thỏa mãn: $A+B=C+D \ge 0$ và $|A-B| \ge |C-D|$. Khi đó:

$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B} \le \sqrt[3]{C}+\sqrt[3]{D}$

Chứng minh đơn giản và xin dành lại cho các bạn.

Trở lại bài toán, ta đặt

$A = y-z+x^3, B = z-x+y^3, C = x-y+z^3$

Nếu có, chẳng hạn, $B+C \le 0$, thì $\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C} \le 0$ và $A \le y-z+x \le y+z+x = 1$, nên ta có ngay đpcm.

Do đó, từ giờ trở đi ta chỉ cần xét khi $A+B \ge 0$, $B+C \ge 0$, $C+A \ge 0$. Vì BDT ban đầu có dạng hoán vị vòng quanh nên ta có thể giả sử $z = min\{x,y,z\}$. Khi đó ta cần xét 2 trường hợp $x \ge y \ge z$ và $y \ge x \ge z$.

*Trường hợp 1. Xét khi $x \ge y \ge z$. Ta có

$B+C = z^3+(y^3+z-y)$
và
$C-B = 2x-y-z+z^3-y^3 \geq y-z+z^3-y^3$
$z^3-(y^3+z-y) = (y-z)(1-y^2-yz-z^2) \geq 0$
nên áp dụng Bổ đề ta có:

$\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C} \leq z+\sqrt[3]{D}$(2), với $D = y^3+z-y$.
Lại có:
$A+D = x^3+y^3 \geq 0$
$A-D = x^3-y^3+2(y-z) \geq x^3-y^3 \geq 0$
nên áp dụng Bổ đề ta có:
$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{D} \leq x+y$(3).
Từ (2) và (3) ta có đpcm.
*Trường hợp 2. Xét khi $y \geq x \geq z$. Ta có
$A+B = y^3+(x^3+y-x)$
và
$A-B = x+y-2z+x^3-y^3 \geq y-x+x^3-y^3$

$= (x^3+y-x)-y^3 = (y-x)(1-x^2-xy-y^2) \geq 0$
nên áp dụng Bổ đề ta có:

$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B} \leq y+\sqrt[3]{E}$(4), với $E = x^3+y-x$.
Lại có
$E+C = x^3+z^3 \geq 0$
$E-C = x^3-z^3+2(y-x) \geq y^3-x^3 \geq 0$
nên áp dụng Bổ đề ta có:

$\sqrt[3]{C}+\sqrt[3]{E} \leq x+y$ (5).
Từ (4) và (5) ta có đpcm.
Bài toán chứng minh xong!
Cũng xuất phát từ dạng BDT ở trên, ta có bài toán sau.
Bài toán 3.
Cho $x,y,z \geq -1$, $x+y+z \geq 0$. Chứng minh rằng
$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2} \geq 3$

Nhận xét rằng BDT trên có thể viết ở dạng
$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2} \geq \sqrt{3(1+x+1+y+1+z)+(y+z+x)^2} \geq 3$

Trong lời giải đầu tiên cho bài toán trên, tôi sử dụng Bổ đề A để suy ra phải có 1 BDT kiểu sau đây (hoán vị (x,y,z) nếu cần)
$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{4}}+\sqrt{1+y+\frac{z^2}{4}} \geq \sqrt{2(2+x+y)+\frac{(y+z)^2}{4}}$,
rồi sau đó dùng BDT

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\ge\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

để thực hiện việc dồn căn.

Tuy nhiên, khi bài toán này được đưa lên diễn đàn toán học thì thầy **namdung** đã đề xuất

một Bổ đề khác cho phép chứng minh gọn hơn nhiều.

Chứng minh bài toán 3.

Trước hết ta có Bổ đề sau, chứng minh đơn giản bằng cách bình phương 2 vế.

Bổ đề. Cho các số thực a, b, u, v sao cho các căn thức dưới đây có nghĩa. Khi đó

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b}\Leftrightarrow ab\ge 0$$

Trở lại bài toán 3. Trong 3 số $x+y^2$, $y+z^2$, $z+x^2$ phải có 2 số cùng dấu (tức là tích

của chúng ≥ 0), ta có thể giả sử là $x+y^2$ và $y+z^2$. Khi đó, áp dụng Bổ đề, ta có

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}$$
$$\ge 1+\sqrt{(1+x+y+z^2)+y^2}+\sqrt{(1+z)+x^2}$$
$$\ge 1+\sqrt{(\sqrt{1+x+y+z^2}+\sqrt{1+z})^2+(y+x)^2}$$
$$\ge 1+\sqrt{(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z})^2+z^2}$$

Ta có

$$(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z})^2+z^2\ge 4$$
$$\Leftrightarrow 2+2z^2+2\sqrt{(1-z+z^2)(1+z)}\ge 4$$
$$\Leftrightarrow z^2+\sqrt{1+z^3}\ge 1$$

Nếu $z\ge 0$ thì $\sqrt{1+z^3}\ge 1$, còn nếu $z<0$ thì:

$$z^2+\sqrt{1+z^3}\ge z^2+(1+z^3)=1+z^2(1+z)\ge 1$$

Bài toán chứng minh xong.

Bài toán 3 đã được **kimluan** làm mạnh thành kết quả sau đây.

Bài toán 4. Cho $x,y,z\in[-1,1]$ và x+y+z=0. CMR

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2}\ge 3$$

Đẳng thức xảy ra tại x = y = z = 0 và x =0,y =1,z = -1. Đây là 1 BDT đẹp và ấn tượng nhưng chưa có một lời giải đơn giản nào cho nó.

Dạng BDT xuất phát từ Bổ đề A cũng có thể mở rộng cho nhiều hơn 3 số. Sau đây là một ví dụ cho trường hợp 4 số.

Bài toán 5. Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $max(xy,yz,zt,tz)\le 1$. CMR

$$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-tx+x^2}$$

$$\geq \sqrt{16+(x-y+z-t)^2}$$

Đây là một bài toán khó. Lưu ý rằng BDT trên có thể viết ở dạng
$$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-tx+x^2}$$
$$\geq \sqrt{4(1-xy+1-yz+1-zt+1-tz)+(y+z+t+x)^2}$$
$$=\sqrt{16+(x-y+z-t)^2}.$$

Chứng minh bài toán 5.
*Trước hết, để có cảm giác về bài toán, ta hãy xét một trường hợp riêng: cho x=z, y=t. Khi đó, với điều kiện $xy \leq 1$, ta cần chứng minh
$$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-xy+x^2} \geq \sqrt{4+(x-y)^2}$$
Để ý là $2(1-xy+1-xy)+(x+y)^2=4+(x-y)^2$, áp dụng Bổ đề A thì BDT trên tương đương với $4(1-xy)(y-x)^2 \geq 0$. Điều này đúng vì $xy \leq 1$.

*Trở lại bài toán tổng quát, ta sẽ tìm cách quy về trường hợp 2 số. Ta hi vọng sẽ có BDT dạng như
$$\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-tx+x^2} \geq \sqrt{1-xy+x^2}+\sqrt{1-zt+z^2}\ (*)$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{1-yz+z^2}-\sqrt{1-zt+z^2})+(\sqrt{1-tx+x^2}+\sqrt{1-xy+x^2}) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{z(t-y)}{\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+z^2}}+\frac{x(y-t)}{\sqrt{1-tx+x^2}+\sqrt{1-xy+x^2}} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (t-y)\left(\frac{z}{\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+z^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-tx+x^2}+\sqrt{1-xy+x^2}}\right) \geq 0$$

Bằng tính toán cụ thể, ta chứng minh được thừa số thứ 2 của biểu thức vế trái cùng dấu với z-x.
Do đó BDT (*) tương đương với $(t-y)(z-x) \geq 0$(**). Điều thú vị là bằng cách hoán vị ta có thể giả sử có điều này. Thật vậy, BDT ở đề bài là không đổi nếu ta làm việc với bộ 4 số (y,z, t, x), và với bộ 4 số này thì BDT (**) trở thành $(x-z)(t-y) \geq 0$(***). Vì (**) và (***) phải có một cái đúng, nên ta có thể gỉ sử là (**) đúng. Khi đó (*) đúng.

Sử dụng (*) và trường hợp 2 số, ta có
$$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-tx+x^2}$$
$$\geq \left(\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-xy+x^2}\right)+\left(\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-zt+z^2}\right)$$
$$\geq \sqrt{4+(x-y)^2}+\sqrt{4+(z-t)^2}$$
$$\geq \sqrt{(2+2)^2+(x-y+z-t)^2}=\sqrt{16+(x-y+z-t)^2}$$

Bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = t hoặc x = z,y = t,xy =1.

Dưới đây là hai bài toán khác, cũng ở dạng này, mà lời giải xin được dành lại cho các bạn.

Bài toán 6. Cho các số thực $x,y,z \in [-1,1]$ thỏa mãn x+y+z=0. CMR

$$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{6}}+\sqrt{1+y+\frac{z^2}{6}}+\sqrt{1+z+\frac{x^2}{6}} \le 3$$

Bài toán 7. Cho các số thực $x,y,z,t \in [-1,1]$ thỏa mãn $x+y+z+t \ge 0$. CMR

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+t^2}+\sqrt{1+t+x^2} \ge 4.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

Võ Quốc Bá Cẩn

Hiện nay có rất nhiều phương pháp mạnh và mới để chứng minh bất đẳng thức như là *EV* của *Vasile Cirtoaje*, *SOS* của *Phạm Kim Hùng* và *Trần Tuấn Anh*, ... Nhưng các phương pháp này phần lớn chỉ dùng để giải quyết các bài toán đối xứng, khi gặp các bất đẳng thức hoán vị thì chúng thường tỏ ra kém hiệu quả. Vậy chúng ta có cách nào để giải quyết các bất đẳng thức hoán vị không? Bài viết này, chúng tôi xin được chia sẻ cùng các bạn một kinh nghiệm nhỏ để chứng minh bất đẳng thức hoán vị 3 biến (và đôi khi ta cũng có thể áp dụng nó cho bất đẳng thức hoán vị 4 biến). Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các bạn!

Như đã nói ở trên, các phương pháp chứng minh bất đẳng thức đối xứng thì rất nhiều nên nếu ta có thể chuyển một bất đẳng thức hoán vị về dạng đối xứng thì việc chứng minh không còn gì khó khăn cả. Đó chính là kinh nghiệm nhỏ mà chúng tôi muốn giới thiệu cùng bạn đọc, một kỹ thuật giúp ta chuyển một bất đẳng thức hoán vị thành một bất đẳng thức đối xứng để giải, ta tạm gọi đó là "*phương pháp chuyển vị*".

Để hiểu rõ hơn ý tưởng của nó, chúng ta hãy cùng xét ví dụ sau

Example 0.1 *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$. Chứng minh rằng*

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \le 4.$$

(Vasile Cirtoaje, Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$a\cdot ab+b\cdot \underline{bc}+c\cdot \underline{ca}+abc \le 4.$$

Ta thấy rằng đây là một bất đẳng thức hoán vị với đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$ và $a=2, b=1, c=0$ (với giả thiết $c=\min\{a,b,c\}$). Điều này chứng tỏ rằng việc đánh giá nó là không dễ dàng chút nào, chỉ cần một chút "quá đà" thì cũng có thể đưa đến kết quả không mong muốn. Một cách tự nhiên, ta nghĩ ngay đến việc chuyển nó về dạng đối xứng để giải. Thông thường, mọi người thường nghĩ đến việc chuyển về đối xứng cho ba biến, nhưng việc này rất khó thực hiện (vì bất đẳng thức này có đến hai điểm đẳng thức), cho nên ta hãy nghĩ đến việc đưa về đối xứng cho hai biến (mà không phải ba). Muốn làm điều này, các bạn hãy cùng để ý đến hai biểu thức được gạch chân ở trên, chúng có điều gì kì lạ? À, nếu ta hoán đổi vị trí cho nhau thì ta có thể thu được một bất đẳng thức mới là

$$a \cdot ab + b \cdot \underline{ca} + c \cdot \underline{bc} + abc \le 4.$$

Và thật thú vị, đây lại là một bất đẳng thức đối xứng cho hai biến a và c. Vì vậy, nếu ta có một đánh giá kiểu như $a \cdot ab + b \cdot \underline{bc} + c \cdot \underline{ca} + abc \le a \cdot ab + b \cdot \underline{ca} + c \cdot \underline{bc} + abc$ thì đó là một điều tuyệt vời! May mắn thay, điều này tương đương với $c(a-b)(b-c) \ge 0$ và chúng ta hoàn toàn có thể đạt được điều này bằng cách giả sử b là số hạng nằm giữa a và c. Đến đây, ta tìm được lời giải cho bài toán như sau:
Không mất tính tổng quát, giả sử b là số hạng nằm giữa a và c. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} a \cdot ab + b \cdot bc + c \cdot ca + abc &\le a \cdot ab + b \cdot ca + c \cdot bc + abc \\ &= b(a+c)^2 \le \frac{1}{2}\left(\frac{2b+a+c+a+c}{3}\right)^3 = 4. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ và $a = 2, b = 1, c = 0$ (cùng các hoán vị tương ứng). ■
Đây là một ví dụ quen thuộc, và có lẽ nhiều bạn sẽ cho rằng nó quá quen thuộc, hiển nhiên. Và nếu bạn, nào tinh ý thì sẽ thấy rằng việc đánh giá $a \cdot ab + b \cdot bc + c \cdot ca + abc \le a \cdot ab + b \cdot ca + c \cdot bc + abc$ ở trên thực ra chính là việc sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại cho hai bộ số đơn điệu cùng chiều (a, b, c) và (ab, ca, bc) (với giả thiết b là số hạng nằm giữa). Tuy nhiên, chúng tôi đến với ý tưởng chuyển vị này hoàn toàn độc lập với bất đẳng thức sắp xếp lại. Chúng ta hãy cùng đi đến ví dụ sau để thấy rõ được điều đó

Example 0.2 *Cho các số không âm x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y+z^2} + \sqrt{z+x^2} \ge 2.$$

(Phan Thành Nam)

Rõ ràng với bài toán này, việc sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại là rất khó (có thể nói là không thể), nhưng việc sử dụng phép chuyển vị như trên thì ta vẫn có thể áp dụng được. Và một điều thú vị nữa là, với những cách phân tích khác nhau thì chúng ta lại có những phép chuyển vị khác nhau, giúp đưa bài toán đi đến kết quả. Chẳng hạn, ở ví dụ này, chúng ta có hai cách chuyển vị sau
Lời giải 1. Bất đẳng thức này có dạng đồng bậc (ở vế trái) là

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz} + \sqrt{y^2+z^2+yz+\underline{yx}} + \sqrt{z^2+x^2+zx+\underline{zy}} \ge 2.$$

Ta thấy rằng bất đẳng thức này chứa căn và hoán vị cho 3 biến x, y, z nên việc đánh giá nó sẽ gặp rất nhiều khó khăn, cho nên ý tưởng của ta ở đây chính là chuyển nó về dạng đối xứng, chẳng hạn cho y và z. Để thực hiện, ta hãy để ý 2 biểu thức yx và zy được gạch chân ở trên, nếu ta chuyển vị 2 biểu thức này thì sẽ thu được một bất đẳng thức mới

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz}+\sqrt{y^2+z^2+yz+\underline{yz}}+\sqrt{z^2+x^2+zx+\underline{xy}} \geq 2.$$

Và thật thú vị, nó là một bất đẳng thức đối xứng cho y và z. Với ý tưởng như vậy, chúng ta cần có

$$\sqrt{y^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+x^2+zx+zy} \geq \sqrt{y^2+z^2+yz+yz}+\sqrt{z^2+x^2+zx+xy}.$$

Bình phương 2 vế, và thu gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$y(x-y)(x-z)(x+y+z) \geq 0.$$

Điều này có thể đạt được nếu ta giả sử $x=\min\{x,y,z\}$ hoặc $x=\max\{x,y,z\}$. Với những phân tích này, ta đi đến lời giải của bài toán như sau:
Không mất tính tổng quát, giả sử $x=\min\{x,y,z\}$, khi đó theo trên, ta có ngay

$$\sqrt{y^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+x^2+zx+zy} \geq \sqrt{y^2+z^2+yz+yz}+\sqrt{z^2+x^2+zx+xy},$$

nên bất đẳng thức của ta được đưa về

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{x+z^2}+y+z \geq 2,$$

tương đương

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{x+z^2} \geq 2x+y+z.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Minkowski*, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y^2}+\sqrt{x+z^2} &\geq \sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)^2+(y+z)^2}=\sqrt{4x+(y+z)^2}\\ &= \sqrt{4x(x+y+z)+(y+z)^2}=2x+y+z.\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ hoặc $x=1, y=z=0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Lời giải 2. Nếu các bạn không thích phép chuyển vị như trên, chúng ta có thể thử chọn phép chuyển vị kiểu khác như sau: Hãy chú ý đến 2 biểu thức được gạch dưới trong bất đẳng thức

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz}+\sqrt{\underline{y^2}+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+\underline{x^2}+zx+zy} \geq 2.$$

Nếu ta thực hiện phép chuyển vị cho 2 biểu thức này thì sẽ thu được một bất đẳng thức mới đối xứng cho x và z là

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz}+\sqrt{z^2+\underline{y^2}+zx+zy}+\sqrt{\underline{x^2}+z^2+yz+yx}\geq 2.$$

Như vậy, ta cần có

$$\sqrt{y^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+x^2+zx+zy}\geq\sqrt{x^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+y^2+zx+zy},$$

hay là

$$x(x^2-y^2)(y-z)\geq 0.$$

Điều này có thể đạt được nếu ta giả sử y là số hạng nằm giữa x và z. Đến đây, ta thu được một lời giải mới như sau:
Giả sử y là số hạng nằm giữa x và z, khi đó dễ thấy

$$\sqrt{y^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+x^2+zx+zy}\geq\sqrt{x^2+z^2+yz+yx}+\sqrt{z^2+y^2+zx+zy},$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{x^2+y^2+xy+xz}+\sqrt{y^2+z^2+zx+zy}+\sqrt{x^2+z^2+yz+yx}\geq 2,$$

tương đương

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{z+y^2}+\sqrt{x+z-2xz}\geq 2,$$

hay là

$$x+z+2y^2+2\sqrt{(x+y^2)(z+y^2)}\geq\left(2-\sqrt{x+z-2xz}\right)^2.$$

Đặt $t=xz$ $(0\leq t\leq y(1-2y))$ thì bất đẳng thức trên được viết lại là

$$f(t)=2t+2y^2-4+2\sqrt{t+(1-y+y^2)y^2}+4\sqrt{1-y-2t}\geq 0.$$

Ta có

$$f''(t)=-\frac{1}{2\left[t+y^2(1-y+y^2)\right]^{3/2}}-\frac{4}{(1-y-2t)^{3/2}}<0,$$

nên $f(t)$ là hàm lõm, suy ra $f(t)\geq\min\{f(0),f\left(y(1-2y)\right)\}$ nên ta chỉ cần chứng minh được $f(0)\geq 0$ và $f(y(1-2y))\geq 0$. Điều này đồng nghĩa với việc chứng minh bất đẳng thức trên khi $xz=0$ và $(x-y)(z-y)=0$.

+ Nếu $xz = 0$, ta giả sử $z = 0$, khi đó $x = 1 - y$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{1 - y + y^2} + \sqrt{1 - y} + y \geq 2.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, bởi vì theo bất đẳng thức *Minkowski*, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - y + y^2} + \sqrt{1 - y} &= \sqrt{\left(\sqrt{1 - y}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(\sqrt{1 - y}\right)^2 + 0^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\sqrt{1 - y} + \sqrt{1 - y}\right)^2 + (y + 0)^2} = 2 - y.\end{aligned}$$

+ Nếu $(x - y)(z - y) = 0$, ta giả sử $y = z$, khi đó $x = 1 - 2y \geq 0$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{1 - 2y + y^2} + \sqrt{y + y^2} + \sqrt{1 - y - 2y(1 - 2y)} \geq 2,$$

tương đương

$$\sqrt{y + y^2} + \sqrt{1 - 3y + 4y^2} \geq 1 + y.$$

Nhưng bất đẳng thức này cũng hiển nhiên đúng, bởi vì theo bất đẳng thức *Minkowski*, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{y + y^2} + \sqrt{1 - 3y + 4y^2} &= \sqrt{(\sqrt{y})^2 + y^2} + \sqrt{(\sqrt{y})^2 + (1 - 2y)^2} \\ &\geq \sqrt{(\sqrt{y} + \sqrt{y})^2 + (y + 1 - 2y)^2} = 1 + y.\end{aligned}$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Với ý tưởng chuyển vị như vậy, chúng ta có thể giải được khá nhiều bài toán đẹp và khó. Sau đây là hai ví dụ khác

Example 0.3 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{x - y + z^3} + \sqrt[3]{y - z + x^3} + \sqrt[3]{z - x + y^3} \leq 1.$$

(Phan Thành Nam)

Lời giải. Ta thấy bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} \leq 1$, với

$$\begin{aligned}A &= x - y + z^3 = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2z(x^2 - y^2) + z^2(x - y) + z^3, \\ B &= y - z + x^3 = y^3 + y^2z - yz^2 - z^3 + 2x(y^2 - z^2) + x^2(y - z) + x^3, \\ C &= z - x + y^3 = z^3 + z^2x - zx^2 - x^3 + 2y(z^2 - x^2) + y^2(z - x) + y^3.\end{aligned}$$

Nếu có 2 số trong 3 số A, B, C có tổng không dương thì bất đẳng thức của ta hiển nhiên đúng. Thật vậy, giả sử $A + B \leq 0$ thì do $C = z - x + y^3 \leq z - x + y \leq 1$, nên

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} \leq \sqrt[3]{-B} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = \sqrt[3]{C} \leq 1.$$

Bây giờ ta sẽ xét trường hợp ngược lại, tức là lúc này ta có $A + B \geq 0, B + C \geq 0$ và $C + A \geq 0$. Khi đó, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$, và đặt

$$D = y^3 + y^2x - yx^2 - x^3 + 2z(y^2 - x^2) + z^2(y - x) + z^3, \text{ và } E = x^3 + y^3 - z^3.$$

Lúc này, ta có 2 tính chất sau: $D + E = B + C \geq 0$, và

$$DE - BC = (a - c)(b - c)(a^2 + 2ab + 2ac + bc)(2a^2 + b^2 + 2c^2 + 2bc + 3ca + 2ab) \geq 0.$$

Với những tính chất này, ta dễ dàng chứng minh được $\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} \leq \sqrt[3]{D} + \sqrt[3]{E}$, và ta có thể đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{D} + \sqrt[3]{E} \leq 1,$$

tương đương

$$\sqrt[3]{x - y + z^3} + \sqrt[3]{y - x + z^3} + \sqrt[3]{x^3 + y^3 - z^3} \leq 1.$$

Thực hiện tương tự như trên, ta cũng có

$$\sqrt[3]{x - y + z^3} + \sqrt[3]{y - x + z^3} \leq \sqrt[3]{z^3} + \sqrt[3]{z^3} = 2z,$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$x + y - z \geq \sqrt[3]{x^3 + y^3 - z^3}.$$

Đây là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì

$$(x + y - z)^3 - (x^3 + y^3 - z^3) = 3(x - z)(y - z)(x + y) \geq 0.$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 1, y = z = 0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Example 0.4 *Cho các số không âm a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng*

$$(3a^2 + bc + 3b^2)(3b^2 + ca + 3c^2)(3c^2 + ab + 3a^2) \leq 900.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử b là số hạng nằm giữa a và c. Khi đó, với chú ý ở đẳng thức sau

$$\begin{aligned}(3b^2+ca+3c^2)(3c^2+ab+3a^2)-(3b^2+ab+3c^2)(3c^2+ca+3a^2)=\\ =3a(b-c)(b-a)(a+b)\le 0,\end{aligned}$$

ta có thể đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$(3a^2+bc+3b^2)(3b^2+ab+3c^2)(3c^2+ca+3a^2)\le 900.$$

Đến đây, ta thấy

$$\begin{aligned}&(3a^2+bc+3b^2)(3b^2+ab+3c^2)=\\ =\;&9b^4+3(a+c)b^3+(9a^2+ac+9c^2)b^2+3(a^3+c^3)b+9a^2c^2\\ =\;&9b^4+3(a+c)b^3+9(a+c)^2b^2+3(a+c)^3b+9ac(ac-ab-bc)-17b^2ac\\ \le\;&9b^4+3(a+c)b^3+9(a+c)^2b^2+3(a+c)^3b\\ =\;&3b(a+3b+c)\left[b^2+(a+c)^2\right],\end{aligned}$$

và

$$3c^2+ca+3a^2\le 3(a+c)^2,$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$9x^2b(x+3b)(x^2+b^2)\le 900,$$

với $x=a+c$.
Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$9x^2b(x+3b)(x^2+b^2)\le \frac{9}{10}\left[\frac{5xb+x(x+3b)+2(x^2+b^2)}{3}\right]^3,$$

mà

$$5xb+x(x+3b)+2(x^2+b^2)=\frac{10}{3}(x+b)^2-\frac{1}{3}(x-2b)^2\le\frac{10}{3}(x+b)^2=30,$$

nên từ trên, ta được

$$9x^2b(x+3b)(x^2+b^2)\le\frac{9}{10}\cdot 10^3=900.$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0, b=1, c=2$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 1 *Bằng cách tương tự, ta có thể giải được bài toán sau:*
Với a, b, c là các số không âm có tổng bằng 3 và k là một số cho trước $\left(\sqrt{2} \geq k \geq \frac{1}{3}\right)$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P(a,b,c) = (a^2 + kbc + b^2)(b^2 + kca + c^2)(c^2 + kab + a^2).$$

■

Không chỉ có các bất đẳng thức hoán vị ba biến mới sử dụng được phép chuyển vị này mà một phần đông các bất đẳng thức hoán vị bốn biến cũng có thể áp dụng được nó. Đầu tiên, chúng ta sẽ sử dụng phép chuyển vị để đưa về một bất đẳng thức hoán vị cho ba biến, rồi dùng những đánh giá thích hợp để chứng minh bài toán. Mời các bạn cùng đi đến ví dụ sau để rõ hơn ý tưởng này (đây là một bài toán rất khó)

Example 0.5 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng*

$$a^3b + b^3c + c^3d + d^3a + 23abcd \leq 27.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 0.1 *Nếu a, b, c là các số không âm thì*

$$a^3b + b^3c + c^3a + \frac{473}{256}abc(a+b+c) \leq \frac{27}{256}(a+b+c)^4.$$

Chứng minh. Bạn đọc có thể tự chứng minh lấy bằng cách sử dụng phép chuyển vị cho 3 biến. □

Quay trở lại bài toán. Do tính hoán vị vòng quanh nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử d là số hạng nhỏ nhất trong các số a, b, c, d. Khi đó, ta có

$$c^3d + d^3a - (c^3a + d^4) = -(c^3 - d^3)(a - d) \leq 0,$$

nên để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$a^3b + b^3c + c^3a + d^4 + 23abcd \leq 27.$$

Đến đây, áp dụng bổ đề trên, ta có thể đưa về chứng minh

$$\frac{27}{256}(4-d)^4 - \frac{473}{256}abc(4-d) + d^4 + 23abcd \leq 27,$$

hay là

$$\frac{1}{256}(6361d - 1892)abc + \frac{27}{256}(4-d)^4 + d^4 - 27 \leq 0.$$

Nếu $6361d-1892\le 0$ thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên vì $\frac{27}{256}(4-d)^4+d^4\le 27$. Nếu $6361d-1892\ge 0$ thì ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{256}(6361d-1892)abc+\frac{27}{256}(4-d)^4+d^4-27\\
\le\ &\frac{1}{256}(6361d-1892)\cdot\frac{(4-d)^3}{27}+\frac{27}{256}(4-d)^4+d^4-27\\
=\ &\frac{1}{27}(5d^2+270d-473)(d-1)^2\le 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$ hoặc $a=3, b=1, c=d=0$ và các hoán vị tương ứng. ■

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{4abc}{a^2b+b^2c+c^2a+abc}\ge 2.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

2. Giả sử a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh các bất đẳng thức sau

   (a) $a^2b+b^2c+c^2a\le 2+abc$;

   (b) $a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\le 3$.

(Vasile Cirtoaje)

3. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c có tổng bằng 3, bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}\ge\frac{3}{2}.$$

(Phạm Kim Hùng)

4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c có tổng bằng 3, bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\sqrt{\frac{a}{b^2+3}}+\sqrt{\frac{b}{c^2+3}}+\sqrt{\frac{c}{a^2+3}}\le\frac{3}{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

5. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2a+b^3}+\sqrt{2b+c^3}+\sqrt{2c+a^3} \geq \sqrt{2}+1.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

6. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm tất cả các số thực không âm k sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$(ka+b)(kb+c)(kc+a) \geq (k+1)^3.$$

(Michael Rozenberg)

7. Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+d=3$. Chứng minh rằng

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b) \leq 4.$$

(Phạm Kim Hùng)

8. Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c+d=3$. Chứng minh rằng

$$ab(a+2b+3c)+bc(b+2c+3d)+cd(c+2d+3a)+da(d+2a+3b) \leq 6\sqrt{3}.$$

(Phạm Kim Hùng)

DỒN BIẾN "THỪA – TRỪ"

Võ Quốc Bá Cẩn - ĐH Y Dược Cần Thơ

Phương pháp dồn biến từ khi mới xuất hiện cho đến nay, nó đã thể hiện được vai trò và tính hiệu quả của mình trong việc giải toán bất đẳng thức. Tuy nhiên, phương pháp này có nhiều nhược điểm mà chúng ta, những ai đã từng sử dụng đều dễ dàng nhận thấy. Một trong những nhược điểm của nó là rất khó sử dụng với bất đẳng thức chứa căn và một số bất đẳng thức dạng phân thức (phân thức bậc cao). Bài viết nhỏ này, chúng tôi xin được chia sẻ cùng bạn đọc một phương pháp dồn biến giúp chúng ta giải quyết được khá nhiều bài toán ba biến (mảnh đất màu mỡ nhất của bất đẳng thức hiện nay) thuộc một trong hai dạng trên. Phương pháp này đã giúp chúng tôi giải được khá nhiều bài toán khó mà một vài trong số đó đã từng là những bài toán mở. Chúng tôi xin được gọi đó là phương pháp "dồn biến thừa – trừ".

Để bắt đầu, ta sẽ xét ví dụ sau, một bài toán tưởng chừng như không thể giải bằng dồn biến sơ cấp

Ví dụ 1 *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \ge 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(Xtar)

Lời giải. Để ý rằng bất đẳng thức đã cho có đẳng thức xảy ra tại $a = b, c = 0$ nên nếu dùng dồn biến để giải thì ý tưởng của ta là dồn biến về trung bình cộng. Khi đó, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ và đặt $P(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}$, ta phải chứng minh

$$P(a, b, c) \ge P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Đến đây, ta thấy rằng việc tách bình phương $(a - b)^2$ từ

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} - \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{c(a+b)}{2} + c^2}}$$

là rất phức tạp, nó phải trải qua nhiều lần trục căn. Vì vậy, dù có tách được thành công thì việc đánh giá của ta lúc sau cũng sẽ khó khăn rất nhiều (phải nói là rất khó). Đây cũng chính là lí do làm ta tưởng như phương pháp dồn biến sơ cấp không hiệu quả cho bài toán đẹp và khó này. Bây giờ là ý tưởng chính là chúng tôi muốn giới thiệu cùng bạn đọc: Chúng ta điều biết rằng $\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2}}$ $(*)$ và việc tách bình phương từ $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2}}-\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{c(a+b)}{2}+c^2}}$ là rất dễ dàng (chỉ cần một bước trục căn là xong), nên ta nghĩ rằng việc dùng bất đẳng thức $(*)$ chắc sẽ có giúp ích cho việc dồn biến của ta. Nhưng tiếc rằng, bất đẳng thức $(*)$ không đủ mạnh để thực hiện nhiệm vụ này, vì vậy ý tưởng của ta sẽ là thiết lập một đánh giá chặt hơn rất nhiều để sử dụng

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ac+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2}},$$

tương đương

$$2\left[\frac{1}{a^2+ac+c^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}-\frac{4}{a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2}\right] \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+ac+c^2}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}\right)^2.$$

Bất đẳng thức này có thể được thu gọn thành

$$\frac{2(a-b)^2[(a+b+c)^2-k(a^2+b^2+2c^2+ac+bc)]}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)[a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2]} \geq$$

$$\geq \frac{(a-b)^2(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2},$$

hay là

$$\frac{2[(a+b+c)^2-k(a^2+b^2+2c^2+ac+bc)]}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)[a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2]} \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2}.$$

Cho $a=b=c$, ta tìm được $k \leq \frac{9}{8}$. Vì k càng lớn thì đánh giá của ta sẽ càng chặt, sẽ càng có ích cho ta hơn nên ta có thể thử xét xem với $k=\frac{9}{8}$ thì bất đẳng thức trên có đúng hay không, nhưng vì bài toán chưa được chặt lắm nên ta cũng không cần thiết phải đánh giá "hết ga" như thế, ta sẽ thử với $k=1$ xem thế nào. Cho $k=1$ vào, bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)(2ab+ac+bc+2c^2)} \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2},$$

tương đương

$$\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{2ab+ac+bc+2c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2}.$$

Dễ dàng đánh giá được $\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{2ab+ac+bc+2c^2} \geq 1$ và $\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2} \geq a+b+c$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Như vậy, ta đã thiết lập được

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2ab+ac+bc+2c^2}}.$$

Và ta đi đến việc chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2ab+ac+bc+2c^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{3(a+b)^2}{4}}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}+ac+bc+2c^2}}$$

để hoàn thành bước dồn biến. Một công việc khá đơn giản với những bạn nào quen với đạo hàm. Thật vậy, đặt $t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ và xét hàm số

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-c)^2-t}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2t+c+c^2}},$$

ta dễ thấy

$$f'(t) = \frac{1}{2[(1-c)^2-t]^{3/2}}-\frac{2\sqrt{2}}{(2t+c+c^2)^{3/2}} < 0,$$

bởi vì ta có $2[(1-c)^2-t]-(2t+c+c^2) = 2(a^2+ab+b^2)-(2ab+ac+bc+2c^2) \geq 0$ và $\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{(2)^{3/2}} < 0$. Điều này chứng tỏ rằng $f(t)$ là hàm nghịch biến, và chúng ta thu được $f(t) \geq f\left(\frac{(a+b)^2}{4}\right)$. Bước dồn biến đã được hoàn tất, tức là ta có $P(a,b,c) \geq P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$. Việc còn lại của ta chỉ là chứng minh $P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right) \geq 4+\frac{2}{\sqrt{3}}$, một công việc khá nhẹ nhàng với phép chọn tham số trong bất đẳng thức $AM-GM$, xin được dành lại cho bạn đọc phần này. ∎

Ví dụ 2 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{5(a^2+b^2)+8}+\frac{1}{5(b^2+c^2)+8}+\frac{1}{5(c^2+a^2)+8} \leq \frac{1}{6}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Để ý rằng bất đẳng thức trên đạt được dấu đẳng thức khi $a = b = c = 1$ và $a = \frac{13}{5}, b = c = \frac{1}{5}$ nên ý tưởng của ta sẽ là dồn biến về trung bình cộng (dựa trên giả thiết của bài toán). Giả sử $a \ge b \ge c$, đặt $k = \frac{8}{5}$ và $P(a,b,c) = \frac{1}{a^2+b^2+k} + \frac{1}{b^2+c^2+k} + \frac{1}{c^2+a^2+k}$, ta phải chứng minh $P(a,b,c) \le P\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \le \frac{3}{k+2}$. Nhưng cũng như bài trước, ta thấy rằng việc tách bình phương $(b-c)^2$ từ hiệu $\frac{1}{a^2+b^2+k} + \frac{1}{a^2+c^2+k} - \frac{2}{a^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+k}$ cùng khá phức tạp và đưa đến bậc cao rất khó đánh giá. Vì vậy, để chứng minh nó, ta sẽ sử dụng ý tưởng sau: Tìm m nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{a^2+b^2+k} + \frac{1}{a^2+c^2+k} \le \frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này với $(a^2+b^2+k)+(a^2+c^2+k)$ và sử dụng đẳng thức quen thuộc $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) - 4 = \frac{(x-y)^2}{xy}$, ta có thể dễ dàng viết lại bất đẳng thức trên như sau

$$\frac{(b^2-c^2)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)} \le \frac{4m(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2},$$

tương đương

$$\frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)} \le \frac{4m}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2}.$$

Cho $a = b = c = 1$, ta tìm được $m \ge \frac{2}{k+2}$. Như vậy, ta sẽ thử chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)} \le \frac{8}{(k+2)\left[2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2\right]}.$$

Ta có

$$2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2 \le 2a^2+b^2+c^2+2k \le 2(a^2+b^2+k),$$

và

$$\begin{aligned} 4(a^2+c^2+k)-(k+2)(b+c)^2 &\ge 4(b^2+c^2)+k(b+c)^2-(k+2)(b+c)^2 \\ &= 4(b^2+c^2)-2(b+c)^2 = 2(b-c)^2 \ge 0, \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Do đó, ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+k} + \frac{1}{a^2+c^2+k} \le \frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2}.$$

Tiếp theo, để hoàn tất bước dồn biến, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{b^2+c^2+k}+\frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2}\le\frac{1}{\frac{(b+c)^2}{2}+k}+\frac{4}{2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+2k},$$

tương đương

$$\frac{(b-c)^2}{(b^2+c^2+k)[(b+c)^2+2k]}\ge\frac{2(2-k)(b-c)^2}{(k+2)\left[2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2\right]\left[2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+2k\right]},$$

hay là

$$\frac{\left[2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2\right]\left[2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+2k\right]}{(b^2+c^2+k)[(b+c)^2+2k]}\ge\frac{2(2-k)}{k+2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2-[(b+c)^2+2k] &= 2a^2-2bc-\frac{2}{k+2}(b-c)^2\\ &\ge 2b^2-2bc-(b-c)^2=b^2-c^2\ge 0,\end{aligned}$$

và

$$2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+2k-2(b^2+c^2+k)=2(a^2-b^2)+\left[\frac{(b+c)^2}{2}-2c^2\right]\ge 0,$$

nên

$$VT\ge 2=\frac{2(2-k)}{k+2}+\frac{4k}{k+2}\ge\frac{2(2-k)}{k+2}=VP.$$

Phép dồn biến được hoàn tất. Và việc còn lại của ta chỉ là chứng minh $P(3-2t,t,t)\le\frac{3}{k+2}$ với $t=\frac{b+c}{2}$ và $k=\frac{8}{5}$. Bằng cách khai triển và biến đổi tương đương, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{25(5t-1)^2(t-1)^2}{6(5t^2+4)(25t^2-60t+53)}\ge 0 \text{ (đúng).}$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Nhận xét 1 *Qua lời giải này, ta có thể thấy tập hợp tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức sau*

$$\frac{1}{a^2+b^2+k}+\frac{1}{b^2+c^2+k}+\frac{1}{c^2+a^2+k}\le\frac{3}{k+2}$$

đúng với $a,b,c>0, a+b+c=3$ là $k\ge\frac{8}{5}$.
Ngoài ra, trường hợp $k=2$ chính là bài toán thi chọn đội tuyển Iran năm 2009.

Sau đây là một số hai ví dụ khá đẹp khác

Ví dụ 3 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{ab}{a^2+b^2+3c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2+3a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2+3b^2}\le\frac{3}{5}.$$

(Phạm Kim Hùng, Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Khi đó, ta sẽ chứng minh

$$\frac{bc}{b^2+c^2+3a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2+3b^2}\le\frac{c(a+b)+\frac{18}{25}(a-b)^2}{2a^2+2b^2+c^2}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$c\left[\frac{b(2a^2+2b^2+c^2)}{b^2+c^2+3a^2}+\frac{a(2a^2+2b^2+c^2)}{c^2+a^2+3b^2}-a-b\right]\le\frac{18}{25}(a-b)^2.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{b(2a^2+2b^2+c^2)}{b^2+c^2+3a^2}+\frac{a(2a^2+2b^2+c^2)}{c^2+a^2+3b^2}-a-b &= \frac{a(a^2-b^2)}{c^2+a^2+3b^2}+\frac{b(b^2-a^2)}{b^2+c^2+3a^2}\\ &= \frac{(a-b)^2(a+b)(3a^2+3b^2+c^2+2ab)}{(3a^2+b^2+c^2)(a^2+3b^2+c^2)},\end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\frac{c(a-b)^2(a+b)(3a^2+3b^2+c^2+2ab)}{(3a^2+b^2+c^2)(a^2+3b^2+c^2)}\le\frac{18}{25}(a-b)^2,$$

tương đương

$$9c(a+b)\cdot 2(3a^2+3b^2+c^2+2ab)\le\frac{18^2}{25}(3a^2+b^2+c^2)(a^2+3b^2+c^2).$$

Áp dụng các bất đẳng thức *AM – GM* và *Cauchy Schwarz*, ta được

$$9c(a+b)\cdot 2(3a^2+3b^2+c^2+2ab)\le\left[\frac{9c(a+b)+2(3a^2+3b^2+c^2+2ab)}{2}\right]^2,$$

và

$$(3a^2+b^2+c^2)(a^2+3b^2+c^2)\ge(a^2+b^2+2ab+c^2)^2.$$

Lại có

$$\begin{aligned}36(a^2+b^2+2ab+c^2)-5[9c(a+b)+2(3a^2+3b^2+c^2+2ab)]\\ &= 6a^2+6b^2+26c^2-45c(a+b)+52ab\\ &= 26(c-a)(c-b)+6a^2+6b^2-19c(a+b)+26ab\\ &\geq 6a^2+6b^2-19c(a+b)+26ab \geq 38ab-19c(a+b) \geq 0,\end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.
Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{ab}{a^2+b^2+3c^2}+\frac{c(a+b)+\frac{18}{25}(a-b)^2}{2a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2+3c^2)}+\frac{c\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2a^2+2b^2+c^2},$$

tương đương

$$\frac{(a-b)^2}{2(a^2+b^2+3c^2)}+\frac{c(a-b)^2}{(2a^2+2b^2+c^2)\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b\right]} \geq \frac{18(a-b)^2}{25(2a^2+2b^2+c^2)}.$$

Do $\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b \leq 2\sqrt{2(a^2+b^2)}$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{2(2t^2+3c^2)}+\frac{c}{4t(4t^2+c^2)} \geq \frac{18}{25(4t^2+c^2)} \quad \left(t=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right),$$

tương đương

$$\frac{2(4t^2+c^2)}{2t^2+3c^2}+\frac{c}{t} \geq \frac{72}{25}.$$

Ta có

$$\frac{2(4t^2+c^2)}{2t^2+3c^2}+\frac{c}{t}-3=\frac{(t-c)(2t^2+4tc-3c^2)}{t(2t^2+3c^2)} \geq 0,$$

mà $\frac{72}{25}<3$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.
Cuối cùng, ta đi đến việc chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{t^2}{2t^2+3c^2}+\frac{2tc}{4t^2+c^2} \leq \frac{3}{5}.$$

Không mấy khó khăn, ta có thể phân tích

$$\frac{t^2}{2t^2+3c^2}+\frac{2tc}{4t^2+c^2}-\frac{3}{5}=-\frac{(t-c)^2(2t-3c)^2}{5(2t^2+3c^2)(4t^2+c^2)} \leq 0,$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng và phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b=\frac{3}{2}c$ cùng các hoán vị. ■

Ví dụ 4 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{4a^2-27}{b^2+c^2}+\frac{4b^2-27}{c^2+a^2}+\frac{4c^2-27}{a^2+b^2}+\frac{69}{2}\geq 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Với chú ý rằng $\frac{4a^2-27}{b^2+c^2}+4=\frac{4(a^2+b^2+c^2)-27}{b^2+c^2}$, ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$(4a^2+4b^2+4c^2-27)\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)+\frac{45}{2}\geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có $4a^2+4b^2+4c^2-27\geq 4a^2+2(b+c)^2-27$, nên bất đẳng thức trên được suy ra từ

$$[4a^2+2(b+c)^2-27]\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)+\frac{45}{2}\geq 0.$$

Nếu $4a^2+2(b+c)^2-27\geq 0$ thì bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Trong trường hợp ngược lại, áp dụng bất đẳng thức mà ta đã thiết lập trong **Ví dụ 2** ở trên, ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+k}+\frac{1}{b^2+c^2+k}+\frac{1}{c^2+a^2+k}\leq \frac{2}{a^2+\frac{(b+c)^2}{4}+k}+\frac{1}{\frac{(b+c)^2}{2}+k}$$

với mọi $k\geq 0$. Từ đó, đặt $t=\frac{b+c}{2}$ và cho $k=0$, ta thu được

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\leq \frac{2}{a^2+t^2}+\frac{1}{2t^2}.$$

Do $4a^2+8t^2-27\leq 0$ nên

$$(4a^2+8t^2-27)\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)\geq (4a^2+8t^2-27)\left(\frac{2}{a^2+t^2}+\frac{1}{2t^2}\right).$$

Vì thế, ta chỉ cần chứng minh được

$$[4a^2+8t^2-3(a+2t)^2]\left(\frac{2}{a^2+t^2}+\frac{1}{2t^2}\right)+\frac{45}{2}\geq 0.$$

Bằng một vài tính toán đơn giản, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với $\frac{(a-t)^2(a-5t)^2}{2t^2(a^2+t^2)}\geq 0$ là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=\frac{15}{7}, b=c=\frac{3}{7}$ và các hoán vị tương ứng. ■

Nhận xét 2 *Mời bạn đọc cùng chứng minh kết quả sau*
Tập hợp tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức

$$\frac{a^2+k}{b^2+c^2}+\frac{b^2+k}{c^2+a^2}+\frac{c^2+k}{a^2+b^2}\geq 3(k+1)$$

đúng với mọi a, b, c dương sao cho $a+b+c=3$ *là* $-\frac{27}{4}\leq k\leq\frac{9}{7}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\leq\frac{3}{2}.$$
(Phạm Kim Hùng)

2. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)}}\geq 4+\frac{8}{\sqrt{3}}.$$
(Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quang Hùng)

3. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng
$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2}\leq\sqrt{3}.$$
(Phan Thành Việt)

4. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng
$$\frac{1}{\sqrt{a+k(b-c)^2}}+\frac{1}{\sqrt{b+k(c-a)^2}}+\frac{1}{\sqrt{c+k(a-b)^2}}\geq 3\sqrt{3}.$$
(Võ Quốc Bá Cẩn)

5. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng khi đó
$$\frac{1}{(b+c)^2+6}+\frac{1}{(c+a)^2+6}+\frac{1}{(a+b)^2+6}\geq\frac{3}{10}.$$
(Dương Đức Lâm)

6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau
$$\sqrt{8a^2+1}+\sqrt{8b^2+1}+\sqrt{8c^2+1}\leq 3(a+b+c).$$
(Gabriel Dospinescu)

Bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến p,q,r

Võ Thành Văn

Như các bạn đã biết, bất đẳng thức Schur là một bất đẳng thức mạnh và có nhiều ứng dụng, tuy nhiên nó vẫn còn khá xa lạ với nhiều bạn học sinh THCS cũng như THPT. Qua bài viết này, tôi muốn cũng cấp thêm cho các bạn một kĩ thuật để sử dụng tốt BDT Schur, đó là kết hợp với phương pháp đổi biến p, q, r.
Trước hết, tôi xin nhắc lại về bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến p, q, r.

1 Bất đẳng thức Schur

Định lý 1 (Bất đẳng thức Schur) *Với mọi số thực không âm a, b, c, k, ta luôn có*

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b)\geq 0.$$

Hai trường hợp quen thuộc được sử dụng nhiều là $k=1$ và $k=2$

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0 \tag{i}$$

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0 \tag{ii}$$

2 Phương pháp đổi biến p, q, r

Đối với một số bài bất đẳng thức thuần nhất đối xứng có các biến không âm thì ta có thể đổi biến lại như sau
Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$. Và ta thu được một số đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) &= pq-3r\\
(a+b)(b+c)(c+a) &= pq-r\\
ab(a^2+b^2)+bc^{(}b^2+c^2)+ca(c^2+a^2) &= p^2q-2q^2-pr\\
(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b) &= p^2+q\\
a^2+b^2+c^2 &= p^2-2q\\
a^3+b^3+c^3 &= p^3-3pq+3r\\
a^4+b^4+c^4 &= p^4-4p^2q+2q^2+4pr\\
a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= q^2-2pr\\
a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 &= q^3-3pqr+3r^2\\
a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 &= q^4-4pq^2r+2p^2r^2+4qr^2
\end{aligned}$$

Đặt $L=p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r$, khi đó

$$\begin{aligned}
a^2b+b^2c+c^2a &= \frac{pq-3r\pm\sqrt{L}}{2}\\
(a-b)(b-c)(c-a) &= \pm\sqrt{L}
\end{aligned}$$

Có thể thấy ngay lợi ích của phương pháp này là mối ràng buộc giữa các biến p, q, r mà các biến a, b, c ban đầu không có như

$$\begin{aligned} p^2 &\geq 3q \\ p^3 &\geq 27r \\ q^2 &\geq 3pr \\ pq &\geq 9r \\ 2p^3+9r &\geq 7pq \\ p^2q+3pr &\geq 4q^2 \\ p^4+4q^2+6pr &\geq 5p^2q \end{aligned}$$

Những kết quả trên đây chắc chắn là chưa đủ, các bạn có thể phát triển thêm nhiều đẳng thức, bất đẳng thức liên hệ giữa 3 biến p, q, r. Và điều quan trọng mà tôi muốn nói đến là từ bất đẳng thức (i) và (ii), ta có

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} \text{ (từ (i))}$$

$$r \geq \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p} \text{ (từ (ii))}$$

Tuy nhiên trong một số trường hợp thì có thể các đại lượng $4q-p^2$có thể nhận giá trị âm lẫn giá trị dương nên ta thường sử dụng

$$r \geq \max\left\{0, \frac{p(4q-p^2)}{4}\right\}$$

$$r \geq \max\left\{0, \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}\right\}$$

Có lẽ đến đây các bạn đã hiểu được phần nào về bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến p, q, r. Sau đây là một số ví dụ minh họa, nhưng trước hết, các bạn hãy tập làm thử rồi xem đáp án sau

3 Các ví dụ minh họa

3.1 Bất đẳng thức Schur

Ví dụ 1 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}}+\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}} \geq 1.$$

(Võ Thành Văn)

LỜI GIẢI. Đặt

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}}+\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}}$$

$$\begin{aligned} Q &= 8ab(4a+4b+c)+8bc(4b+4c+a)+8ca(4c+4a+b) \\ &= 32(a+b+c)(ab+bc+ca)-72abc \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$P^2 \cdot Q \geq 8(a+b+c)^3$$

Ta cần chứng minh

$$8(a+b+c)^3 \geq Q$$
$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3 \geq 32(a+b+c)(ab+bc+ca) - 72abc$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc \text{ (đúng theo bất đẳng thức Schur).}$$

Vậy ta có đpcm. □

Ví dụ 2 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

(APMO 2004)

LỜI GIẢI. Khai triển bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + 4(a^2+b^2+c^2) + 8 \geq 9(ab+bc+ca)$$

Ta có

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$
$$(a^2b^2+1)+(b^2c^2+1)+(c^2a^2+1) \geq 2(ab+bc+ca)$$

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2+1+1 &\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{9abc}{a+b+c} \\ &\geq 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2 \text{ (theo bất đẳng thức Schur)} \end{aligned}$$

Áp dụng các bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned} &(a^2b^2c^2+2) + 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3) + 4(a^2+b^2+c^2) \\ &\geq 2(ab+bc+ca) + 4(ab+bc+ca) + 3(a^2+b^2+c^2) \\ &\geq 9(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 3 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$2(a^2+b^2+c^2) + abc + 8 \geq 5(a+b+c).$$

(Trần Nam Dũng)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 6VT &= 12(a^2+b^2+c^2) + 3(2abc+1) + 45 - 5\cdot 2\cdot 3(a+b+c) \\ &\geq 12(a^2+b^2+c^2) + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 45 - 5\left[(a+b+c)^2+9\right] \\ &= 7(a^2+b^2+c^2) + \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} - 10(ab+bc+ca) \\ &\geq 7(a^2+b^2+c^2) + \frac{27abc}{a+b+c} - 10(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Schur,

$$\frac{9}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&7(a^2+b^2+c^2)+\frac{27}{a+b+c}-10(ab+bc+ca)\\
\geq\ & 7(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)-3(a^2+b^2+c^2)-10(ab+bc+ca)\\
=\ & 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 4 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3}\geq\frac{18}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}.$$

(Michael Rozenberg)

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)}{b^3+c^3}\geq\frac{18(a+b+c)}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^3+c^3}+\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+c^2-bc}\geq\frac{18(a+b+c)}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^3+c^3}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum\limits_{cyc}a^2(b^3+c^3)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+c^2-bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}a(b^2+c^2-bc)}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum\limits_{cyc}a^2(b^3+c^3)}+\frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}a(b^2+c^2-bc)}\geq\frac{18(a+b+c)}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}$$

Giả sử $a+b+c=1$ và đặt $ab+bc+ca=q, abc=r\Rightarrow r\geq\max\left\{0,\frac{(4q-1)(1-q)}{6}\right\}$. Ta cần chứng minh

$$\frac{(1-2q)^2}{q^2-(q+2)r}+\frac{1}{q-6r}\geq\frac{18}{5-11q}$$

Bất đẳng thức cuối dễ dàng chứng minh bằng cách xét 2 trường hợp $1\geq 4q$ và $4q\geq 1$.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 5 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1.$$

(Moldova TST 2005)

LỜI GIẢI. Quy đồng mẫu số rồi khai triển, ta cần chứng minh

$$49 - 8(ab+bc+ca) + (a+b+c)abc \le 64 - 16(ab+bc+ca) + 4(a+b+c)abc - a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 16 + 3(a+b+c)abc \ge a^2b^2c^2 + 8(ab+bc+ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur và giả thiết $a^4+b^4+c^4=3$, ta có

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)(a+b+c) \ge [ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]\,(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3abc(a+b+c) \ge (ab+bc)^2 + (bc+ca)^2 + (ca+ab)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(ab+bc)^2 + (bc+ca)^2 + (ca+ab)^2 + 12 \ge 8(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow 15 + 3abc(a+b+c) \ge 8(ab+bc+ca)$$

Mặt khác ta lại có

$$1 \ge a^2b^2c^2.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 6 *Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+7abc \ge 10.$$

(Vasile Cirtoaje)

Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$r \ge \max\left\{0, \frac{p(4q-p^2)}{9}\right\} = \max\left\{0, \frac{p(12-p^2)}{9}\right\}$$

Ta cần chứng minh

$$p^3 - 9p + 10r \ge 10$$

Nếu $p \ge 2\sqrt{3}$ thì ta có

$$p^3 - 9p + 10r - 10 \ge p^3 - 9p - 10 \ge 12p - 9p - 10 = 3p - 10 > 0$$

Nếu $p \le 2\sqrt{3} < 4$ thì

$$p^3 - 9p + 10r - 10 \ge p^3 - 9p + \frac{10}{9}p(12-p^2) - 10 = \frac{1}{9}(p-3)[(16-p^2)+3(4-p)+2] \ge 0.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 7 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$3 + \frac{12}{abc} \ge 5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

(Võ Thành Văn)

LỜI GIẢI. Đổi biến theo p, q, r, bât đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau

$$3r + 12 \geq 5q$$

Mặt khác,theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$3r \geq \frac{3p(4q - p^2)}{9} = 4q - 9$$

Ta cần chứng minh

$$4q - 9 + 12 \geq 5q$$

$$\Leftrightarrow q \leq 3 \text{ (đúng).}$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 8 *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

(Phạm Kim Hùng)

Quy đồng, rút gọn và đổi biến theo p, q, r, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$8p + 3r \geq 12 + 5q$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$3r \geq \frac{p(4q - p^2)}{3} = \frac{p(2q - 3)}{3}$$

Từ giả thiết

$$p^2 - 2q = 3$$

$$\Rightarrow q = \frac{p^2 - 3}{2}$$

Thay 2 điều trên vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$8p + \frac{p(p^2 - 6)}{3} \geq 12 + \frac{5(p^2 - 3)}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2p - 3)(p - 3)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 9 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leq \frac{3}{8}.$$

(Crux mathematicorum)

LỜI GIẢI. Bài này đã được anh Hùng sử dụng cho phần bất đẳng thức Chebyshev trong cuốn "Sáng tạo bất đẳng thức". Bây giờ các bạn sẽ được thấy một lời giải khác với bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến p, q, r rất tự nhiên.
Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh và chuyển về dạng p, q, r, ta có

$$8(243 - 18p + 3r) \leq 3(729 - 81q + 27r - r^2)$$

$$\Leftrightarrow 243 - 99q + 57r - 3r^2 \geq 0$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$3 = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6 \geq 3(abc)^2 = r^2$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{3} = \frac{4q-9}{3}$$
$$\Rightarrow 57r \geq 19(4q-9)$$

Nên ta cần chứng minh

$$72 - 23q - 3r^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 3(1-r^2) + 23(3-q) \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

3.2 Phương pháp đổi biến p, q, r

Ví dụ 10 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2b}{4-bc} + \frac{b^2c}{4-ca} + \frac{c^2a}{4-ab} \leq 1.$$

(Phạm Kim Hùng)

LỜI GIẢI. Quy đồng mẫu số rồi khai triển, ta cần chứng minh

$$4 - \sum_{cyc} a^2b \geq \sum_{cyc} \frac{a^2b^2c}{4-bc}$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4 - \sum_{cyc} a^2b \geq abc$, ta cần chứng minh

$$abc \geq \sum_{cyc} \frac{a^2b^2c}{4-bc}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sum_{cyc} \frac{ab}{4-bc}$$

$$\Leftrightarrow 64 - 32\sum_{cyc} ab + 8\sum_{cyc} a^2bc + 4\sum_{cyc} a^2b^2 \geq abc\left(\sum_{cyc} a^2b + abc\right)$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức trên,ta cần chứng minh

$$64 - 32\sum_{cyc} ab + 8\sum_{cyc} a^2bc + 4\sum_{cyc} a^2b^2 \geq 4abc$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8q + q^2 - r \geq 0$$

với $q = ab + bc + ca, r = abc$.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $q^2 \geq 9r$ nên cần chứng minh

$$16 - 8q + q^2 - \frac{q^2}{9} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (q-3)(q-6) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 2, b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 11 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3a}{a^2+2bc}+\frac{3b}{b^2+2ca}+\frac{3c}{c^2+2ab}.$$

(Dương Đức Lâm)

Đặt $a := \frac{1}{a}, b := \frac{1}{b}, c := \frac{1}{c}$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} a \geq 3abc \sum_{cyc} \frac{1}{2a^2+bc}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(a^2-bc)}{2a^2+bc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2+bc} \geq \sum_{cyc} a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2+bc} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2\right)^2}{2\sum\limits_{cyc} a^3+3abc}$$

Đến đây, ta cần chứng minh

$$3\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\right)\left(2\sum_{cyc} a^3+3abc\right)$$

Giả sử $a+b+c=1$, chuyển về dạng p, q, r, bất đẳng thức trở thành

$$3(1-2q)^2 \geq 2-6q+9r$$

Sử dụng bất đẳng thức $q^2 \geq 3r$, ta cần chứng minh

$$3(1-2q)^2 \geq 2-6q+3q^2$$

$$\Leftrightarrow 3-12q+12q^2 \geq 2-6q+3q^2$$

$$\Leftrightarrow (1-3q)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 12 *Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b) \leq \frac{1}{12}(a+b+c)^5.$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Chuẩn hóa cho $p=1$, bất đẳng thức trở thành

$$(1-3q)q+(5q-1)r \leq \frac{1}{12}$$

Đến đây ta sử dụng một thủ thuật khi dùng bất đẳng thức Schur, đó là chia trường hợp để giải quyết

Nếu $q \le \frac{1}{5}$ thì ta có

$$(1-3q)q + (5q-1)r \le (1-3q)q = \frac{1}{3}(1-3q)\cdot 3q \le \frac{1}{3}\left(\frac{1-3q+3q}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

Nếu $q > \frac{1}{5}$, ta có

$$(1-3q)q + (5q-1)r \le (1-3q)q + (5q-1)\cdot\frac{q}{9} = \frac{1}{36}(-88q^2+32q-3) + \frac{1}{12} < \frac{1}{12}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=0, b=\frac{3+\sqrt{3}}{6}, c=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ và các hoán vị □
Với kĩ thuật xét trường hợp để giải, chúng ta có thể dễ dàng giải quyết các bài toán sau

Bài toán 1 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \le \frac{1}{32}.$$

HƯỚNG DẪN. Nhân vào rồi rút gọn, chuyển bất đẳng thức về dạng p, q, r, ta cần chứng minh

$$q^2 - 2q^3 - r(2+r-4q) \le \frac{1}{32}$$

Đến đây chúng ta xét 2 trường hợp $q \le \frac{1}{4}$ và $q > \frac{1}{4}$. □

Bài toán 2 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^2+3} + \frac{b}{b^2+3} + \frac{c}{c^2+3} \le \frac{3}{4}.$$

(Dương Đức Lâm)

HƯỚNG DẪN. Đưa bất đẳng thức về một hàm theo p

$$f(p) = 27p^2 - (54+12q)p + 9q^2 - 58q + 120 \ge 0$$

Đến đây chúng ta chia thành 2 trường hợp $18q \ge 58 + 12p$ và $18q \le 58 + 12p$ □

Ví dụ 13 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=8$. Chứng minh rằng*

$$4(a+b+c-4) \le abc.$$

(Nguyễn Phi Hùng)

LỜI GIẢI. Theo giả thiết, ta có $p^2 - 2q = 8$. Mặt khác, theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có

$$r \ge \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p} = \frac{(p^2-16)(p^2+8)}{12p}$$

Vì vậy, ta cần chứng minh

$$\frac{(p^2-16)(p^2+8)}{12p} \ge 4(p-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p-4)^2(p^2+p-8)}{12p} \ge 0 \text{ (đúng)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 14 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{a^2+abc}}{b+ca}+\frac{\sqrt{b^2+abc}}{c+ab}+\frac{\sqrt{c^2+abc}}{a+bc}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}.$$

LỜI GIẢI. Đổi biến thành p, q, r, ta có bổ đề

$$r\le\frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}$$

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left[\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a^2+abc}}{(b+c)(b+a)}\right]^2 &\le \left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(b+c)}\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a+c}{b+c}\right)\\ &= \frac{\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{cyc}\frac{a+c}{b+c}\right)\end{aligned}$$

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a+c}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}-\sum_{cyc}\frac{b}{b+c}\le\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}-\frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab}$$

Nên ta cần chứng minh

$$\frac{\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left[\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}-\frac{1}{\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab}\right]\le\frac{1}{4abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-q}{q-r}\left(\frac{1+q}{q-r}-\frac{1}{1-q}\right)\le\frac{1}{4r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(1-q^2)}{q-r}-4\le\frac{q-r}{r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(1-q^2)}{q-r}-\frac{q}{r}\le 3$$

Sử dụng bổ đề, ta có

$$VT\le\frac{4(1-q^2)}{q-\frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}}-\frac{q}{\frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}}=3-\frac{q(1-3q)(5-7q)}{(1-q)(4-7q+q^2)}\le 3.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét 1 *Với bài toán này, chúng tôi có 2 câu hỏi thú vị xin dành cho các bạn*

1. *Chứng minh bổ đề mà chúng tôi đã nêu ở trên.*
2. *Hãy chỉ ra con đường để tìm bổ đề này.*

□

Ví dụ 15 *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{4}{81(ab+bc+ca)}+abc\geq\frac{5}{27}.$$

(Võ Thành Văn)

LỜI GIẢI. Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$r\geq\frac{p(4q-p^2)}{9}=\frac{4q-1}{9}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4}{81q}+r\geq\frac{5}{27}$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur, ta cần chứng minh

$$\frac{4}{81q}+\frac{4q-1}{9}\geq\frac{5}{27}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{81q}+\frac{4q}{9}\geq\frac{8}{27}$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. □

Ví dụ 16 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab+1}{a+b}+\frac{bc+1}{b+c}+\frac{ca+1}{c+a}\geq 3.$$

(Nguyễn Mạnh Dũng)

LỜI GIẢI. Ta có

$$\frac{ab+1}{a+b}+\frac{bc+1}{b+c}+\frac{ca+1}{c+a}\geq 3$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(ab+1)(c+a)(c+b)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(ab+1)(c^2+1)\geq 3[(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc]$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca+abc(a+b+c)+3+3abc\geq 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^2+abc(a+b+c+3)+2\geq 3(a+b+c)$$

Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca=1, r=abc$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$p^2+r(p+3)-3p+2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(p-1)(p-2)+r(p+3)\geq 0$$

Nếu $p\geq 2$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Nếu $2\geq p\geq\sqrt{3}$, áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$p^3+9r\geq 4pq$$

$$\Leftrightarrow r \geq \frac{4p - p^3}{9}$$

Ta cần chứng minh

$$p^2 - 3p + 2 + (p+3) \cdot \frac{4p - p^3}{9} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow p^4 + 3p^3 - 13p^2 + 15p - 18 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (p-2)(p^3 + 5p^2 - 3p + 9) \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì $p \leq 2$ và

$$p^3 + 5p^2 - 3p + 9 = p^3 + 4p^2 + \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$$

Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị □

Ví dụ 17 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a+b+c).$$

(Vietnam MO 2006, B)

Lời giải. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, ta có $xyz = 1$, đồng thời đổi biến thành p, q, r, ta có bất đẳng thức trở thành □

$$p^2 - 2q + 3 \geq 2q$$
$$\Leftrightarrow 4q - p^2 \leq 3$$

Mà bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức Schur nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 18 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$, ta luôn có*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 2\sqrt{k} + 1.$$

(Phạm Sinh Tân)

Lời giải. Đổi biến bất đẳng thức theo p, q, r và chuẩn hóa cho $p = 1$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1 - 2q + 3r}{q - r} + k\frac{q}{1 - 3q + 3r} \geq 2\sqrt{k} + 1$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2q + 3r}{q - r} + k\frac{q}{1 - 3q + 3r} &= \frac{1 - 3q + 3r}{q - r} + k\frac{q}{1 - 3q + 3r} + 1 \\ &\geq \frac{1 - 3q + 3r}{q} + k\frac{q}{1 - 3q + 3r} + 1 \geq 2\sqrt{k} + 1. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{k + 2\sqrt{k} - 3} + \sqrt{k} + 1}{2}x, x, 0\right)$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Một số bài tập tương tự

Bài toán 3 *Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$, ta luôn có*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \geq 2\sqrt{k}+1.$$

(Phạm Sinh Tân)

Bài toán 4 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 6.$$

(Phạm Sinh Tân)

Ví dụ 19 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

(Dương Đức Lâm)

LỜI GIẢI. Đặt $x=\frac{2a}{b+c}, y=\frac{2b}{c+a}, z=\frac{2c}{a+b}$, ta có

$$xy+yz+zx+xyz=4$$

Bất đẳng thức trở thành

$$x^2+y^2+z^2+5xyz \geq 8$$

Đưa bất đẳng thức về dạng p, q, r, từ giả thiết, ta có $q+r=4$ và bất đẳng thức trở thành

$$p^2-2q+5r \geq 8$$

$$\Leftrightarrow p^2-7q+12 \geq 0$$

Nếu $4 \geq p$, sử dụngbất đẳng thức Schur, ta có

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9}$$

$$\Rightarrow 4 \geq q+\frac{p(4q-p^2)}{9}$$

$$\Leftrightarrow q \leq \frac{p^3+36}{4p+9}$$

$$\Rightarrow p^2-7q+12 \geq p^2-\frac{7(p^3+36)}{4p+9}+12$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$p^2-\frac{7(p^3+36)}{4p+9}+12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p-3)(p^2-16) \leq 0$$

Điều này đúng vì $4 \geq p \geq \sqrt{3q} \geq 3$.
Nếu $p \geq 4$, ta có $p^2 \geq 16 \geq 4q$ nên

$$p^2-2q+5r \geq p^2-2q \geq \frac{p^2}{2} \geq 8$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ hoặc $x=y=2, z=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 20 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{6-ab}+\frac{1}{6-bc}+\frac{1}{6-ca} \leq \frac{3}{5}.$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Chuyển đổi bất đẳng thức về như sau

$$108-48q+13pr-3r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(9-4q+3r)+r(1-r) \geq 0$$

Ta thấy bất đẳng thức trên đúng do

$$r=abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1$$

và theo bất đẳng thức Schur thì

$$3r \geq \frac{3p(4q-p^2)}{9}=4q-9$$
$$\Rightarrow 3r+9-4q \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=0, b=c=\frac{3}{2}$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 21 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c.$$

(Darij Grinberg)

LỜI GIẢI. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta cần chứng minh

$$\left[\sum_{cyc} a^2(b+c)^2\right]^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\right)\left[\sum_{cyc} a^2(b+c)(b^2+c^2)\right]$$

Đổi biến theo p, q, r, khi đó bất đẳng thức viết thành

$$r(2p^3+9r-7pq) \geq 0$$

Áp dụng BDT Schur, ta có $p^3+9r \geq 4pq$ và bất đẳng thức quen thuộc $p^2-3q \geq 0$, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$. □

Ví dụ 22 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$5(a^2+b^2+c^2) \leq 6(a^3+b^3+c^3)+1.$$

LỜI GIẢI. Đổi biến về p, q, r, ta cần chứng minh

$$5-10q \leq 6(1-3q+3r)+1$$

$$\Leftrightarrow 18r-8q+2 \geq 0$$

Mặc khác, bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức Schur nên ta có đpcm. □
Và một ví dụ điển hình cho phương pháp này là bất đẳng thức Iran 1996

Ví dụ 23 *Cho các số không âm x, y, z, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

(Iran MO 1996, Ji Chen)

LỜI GIẢI. Sử dụng phương pháp đổi biến p, q, r, ta chuyển bất đẳng thức về dạng như sau

$$q\left[\frac{(p^2+q)^2-4p(pq-r)}{(pq-r)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

Biến đổi tương đương, rút gọn, ta cần chứng minh

$$4p^4q-17p^2q^2+4q^3+34pqr-9r^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow pq(p^3-4pqr+9r)+q(p^4-5p^2q+4q^2+6pr)+r(pq-9r)\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc $x=y, z=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Qua các ví dụ trên, có lẽ các bạn cũng đã được hình dung ít nhiều về bất đẳng thức Schur và những ứng dụng của nó trong phương pháp đổi biến p, q, r. Để kết thúc bài viết này, mời các bạn cùng giải một số bài tập sau

Bài toán 5 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng*

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4\leq 3.$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài toán 6 *Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca).$$

(Darij Grinberg)

Bài toán 7 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$12+9abc\geq 7(ab+bc+ca).$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài toán 8 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\leq 3.$$

(Vũ Đình Quý)

Bài toán 9 *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh rằng*

$$2(a+b+c)-abc\leq 10.$$

(Vietnam MO 2002, Trần Nam Dũng)

Bài toán 10 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$1+\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{6}{ab+bc+ca}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài toán 11 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 12 \geq 3(a + b + c) + 3(ab + bc + ca)$$

(Balkan MO)

Bài toán 12 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 3$, ta*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{k}{a+b+c} \geq \frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Bài toán 13 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + 6abc = 9$. Chứng minh rằng*

$$a + b + c + 3abc \geq 6.$$

(Lê Trung Kiên, Võ Quốc Bá Cẩn)

Bài toán 14 *Cho các số không âm x, y, z, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Tìm hằng số a nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng*

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^a \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a}{2}} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}.$$

(Ivan Borsenco, Irurie Boreico)

Bài toán 15 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Bài toán 16 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + 2abc \geq \frac{247}{54}.$$

Bài toán 17 *Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng*

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq 7abc.$$

Bài toán 18 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{5-ab}{1+c} + \frac{5-bc}{1+a} + \frac{5-ca}{1+b} \geq ab + bc + ca.$$

(Vasile Cirtoaje)

CHÚC CÁC BẠN THÀNH CÔNG!!!

Dồn biến cổ điển và bất đẳng thức Jack Garfunkel

Võ Quốc Bá Cẩn
Đại học Y Dược Cần Thơ

Ngày 9 tháng 5 năm 2008

Tóm tắt nội dung

Trong bài này, chúng ta sẽ giới thiệu một cách chứng minh bằng phép dồn biến cổ điển cho bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Bất đẳng thức này được tác giả Jack Garfunkel đề nghị trên tạp chí Crux Magazine năm 1991 (bài toán 1490). Đây là một bài toán hay và khó mặc dù hiện nay đã nhận được nhiều lời giải cho nó nhưng một lời giải bằng phép dồn biến thuần túy thì đến nay vẫn chưa nhận được.

Trước hết chúng ta cần có kết quả sau làm bổ đề phụ trợ cho chứng minh bất đẳng thức Jack Garfunkel

Bài toán 1 *Cho các số không âm a, b, c, tất cả không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\le\frac{1}{3}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $a+b+c=3$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{3-c}+\frac{b}{3-a}+\frac{c}{3-b}\le 1$$

$$\Leftrightarrow a(3-a)(3-b)+b(3-b)(3-c)+c(3-c)(3-a)\le(3-a)(3-b)(3-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc\le 4$$

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số hạng nằm giữa a và c, thế thì ta có

$$c(b-a)(b-c)\le 0$$

$$\Rightarrow b^2c + c^2a \le abc + bc^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a + abc &\le b(a+c)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2b\cdot(a+c)\cdot(a+c)\\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{2b+a+c+a+c}{27}\right)^3 = 4.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $(a, b, c) \sim (2, 1, 0)$.

Nhận xét 1 *Đây là một bổ đề khá chặt và có thể được dùng để giải nhiều bài toán khác, các bạn hãy ghi nhớ nó nhé! Ngoài ra, chúng ta có thể làm mạnh bổ đề như sau*

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc + \frac{1}{2}abc(3 - ab - bc - ca) \le 4$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

■

Bây giờ chúng ta sẽ đi đến giải quyết bài toán chính

Bài toán 2 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

(Jack Garfunkel)

Lời giải. Ta xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $c \ge b \ge a$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}}\right)^2 \le (a+b+c)\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)$$

Lại có do $c \ge b \ge a$ nên

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right)\\ &= \frac{3}{2} - \frac{(c-a)(c-b)(b-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{3}{2} < \frac{25}{16}\end{aligned}$$

Nên hiển nhiên

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Trường hợp 2. $a \ge b \ge c$.

Trường hợp 2.1. $\frac{11}{5}b \geq a$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 &\leq \left[\sum_{cyc}\frac{a(4a+4b+c)}{a+b}\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)\\
&= \left[3\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)}{a+b}\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)\\
&= \left(\sum_{cyc}a\right)\left(3+\sum_{cyc}\frac{a}{a+b}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)
\end{aligned}$$

Theo kết quả bài toán trước, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c} \leq \frac{1}{3}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a+b} \leq \frac{27}{16}$$

$$\Leftrightarrow (11a^2+6ab-5b^2)c+(ab+c^2)(11b-5a) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Trường hợp 2.2. $a \geq \frac{11}{5}b$, đặt $f(a,b,c) = \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}}$. Vì bài toán này có đẳng thức xảy ra tại $a=3, b=1, c=0$ nên ý tưởng của chúng ta sẽ là dồn 1 biến về 0, tức là chứng minh

$$f(a,b,c) \leq f(a_1,b_1,0)$$

với $a_1+b_1 = a+b+c$.

Việc làm này nói có vẻ rất đơn giản nhưng khi thực hiện, bạn sẽ thấy rất khó vì các biểu thức trong căn rất khó cho ta để đánh giá chúng, và nếu chúng ta cứ "cố chấp" một giá trị a_1, b_1 hoài khi dồn biến thì cũng rất khó mà ta phải linh động hơn, tùy theo những trường hợp cụ thể mà chọn a_1, b_1 thích hợp ứng với những trường hợp ấy. Chúng ta sẽ xét những trường hợp nhỏ như sau

Trường hợp 2.2.1. $a \geq 3b$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} \leq \frac{a+\frac{c}{2}}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c) \leq \left(a^2+ac+\frac{c^2}{4}\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}c^4(a+b) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\sqrt{b+\frac{c}{2}}$$

Do $a\ge 3b$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{3b+c}}\le\sqrt{b+\frac{c}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{3b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}}\le b+\frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{3b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}}\le \frac{c}{2}+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{3b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}}\le \frac{b}{b+c}+\frac{1}{2}$$

Do $b\ge c$ nên $3b+c\ge 2(b+c)$, suy ra

$$\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}}\le\frac{\sqrt{2}b}{b+c}\le\frac{3b}{2(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{1}{2}+\frac{b}{b+c}-\frac{c}{3b+c}-\frac{3b}{2(b+c)}=\frac{c(b-c)}{2(b+c)(3b+c)}\ge 0$$

Từ đây, ta đi đến

$$f(a,b,c)\le f\left(a+\frac{c}{2},b+\frac{c}{2},0\right)$$

Trường hợp 2.2.2. $3b\ge a\ge \frac{5}{2}b$, khi đó, ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}\le\frac{a+\frac{3}{8}c}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c)\le\left(a^2+\frac{3}{4}ac+\frac{9}{64}c^2\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{64}c^2(a+b)+\frac{1}{4}ca(3b-a)\ge 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\sqrt{b+\frac{5}{8}c}$$

Tương tự như trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+\frac{5}{2}b}}\le\sqrt{b+\frac{5}{8}c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}}\le b+\frac{5}{8}c$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}}\le \frac{5}{8}c+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}}\le \frac{b}{b+c}+\frac{5}{8}$$

Do $b\ge c$ nên

$$\frac{5}{2}b+c\ge\frac{7}{4}(b+c)=\frac{28}{16}(b+c)\ge\frac{25}{16}(b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}}\le\frac{8b}{5(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{5}{8}+\frac{b}{b+c}-\frac{8b}{5(b+c)}-\frac{c}{\frac{5}{2}b+c}=\frac{(b+10c)(5b-3c)}{40(b+c)(5b+2c)}\ge 0$$

Vậy nên

$$f(a,b,c)\le f\left(a+\frac{3}{8}c,b+\frac{5}{8}c,0\right)$$

Trường hợp 2.2.3. $\frac{5}{2}b\ge a\ge\frac{11}{5}b$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}\le\frac{a+\frac{5}{14}c}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c)\le\left(a^2+\frac{5}{7}ac+\frac{25}{196}c^2\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{196}c^2(a+b)+\frac{1}{7}ca(5b-2a)\ge 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\sqrt{b+\frac{9}{14}c}$$

Tương tự như trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+\frac{11}{5}b}}\le\sqrt{b+\frac{9}{14}c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}}\le b+\frac{9}{14}c$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}}\le \frac{9}{14}c+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}}\le \frac{b}{b+c}+\frac{9}{14}$$

Do $b\ge c$ nên

$$\frac{11}{5}b+c\ge\frac{8}{5}(b+c)\ge\frac{25}{16}(b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}}\le\frac{8b}{5(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{9}{14}+\frac{b}{b+c}-\frac{8b}{5(b+c)}-\frac{c}{\frac{11}{5}b+c}=\frac{33b^2+160bc-125c^2}{70(b+c)(5b+2c)}\ge 0$$

Vậy nên

$$f(a,b,c)\le f\left(a+\frac{5}{14}c,b+\frac{9}{14}c,0\right)$$

Như vậy, ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp có 1 biến bằng 0 là đủ. Không mất tính tổng quát, giả sử $c=0$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b}$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{b(a+b)}\le\frac{5}{4}(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{b(a+b)}\le a+5b$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a+b}-2\sqrt{b}\right)^2\ge 0 \text{ (đúng).}$$

Bài toán được giải quyết xong.

Nhận xét 2 *Trong lời giải trên, mặc dù không sử dụng máy tính phụ trợ nhưng tại sao ta lại chia được trường hợp có số lẻ $\frac{5}{2}$? Câu trả lời xin được dành cho các bạn.*
Đây là một lời giải dài và khá phức tạp nhưng nó gợi mở cho chúng ta nhiều điều trong việc sử dụng phép dồn biến. Từ xưa đến nay, chúng ta thường "cổ hữu" chỉ khư khư một số kiểu dồn biến, chẳng hạn như

$$f(a,b,c) \le f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$$

$$f(a,b,c) \le f(a+c,b,0)$$

$$f(a,b,c) \le f\left(a+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, 0\right)$$

Nhưng những điều này không phải lúc nào cũng luôn có mà chỉ có trong một số rất ít trường hợp. Vì thế, chúng ta cần linh động hơn nữa trong phép dồn biến, chẳng hạn trong bài này

$$f(a,b,c) \le f(a_1,b_1,0)$$

với $a_1+b_1=a+b+c$.
Đây là một ý tưởng độc đáo và khá thú vị.

■

Phần cuối cùng của bài viết, chúng tôi xin được giới thiệu cùng các bạn một số chứng minh khác mà chúng tôi được biết cho bài toán đẹp này.
LỜI GIẢI 2. [1]Đặt $b+c=x^2, c+a=y^2, a+b=z^2$ với $x,y,z>0$, từ đây ta được

$$a=\frac{y^2+z^2-x^2}{2}\ge 0, \quad b=\frac{z^2+x^2-y^2}{2}\ge 0, \quad c=\frac{x^2+y^2-z^2}{2}\ge 0$$

Bất đẳng thức đã cho được viết lại thành

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{z}+\frac{z^2+x^2-y^2}{x}+\frac{x^2+y^2-z^2}{y}\le \frac{5}{4}\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+\frac{(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}\le \frac{5}{4}\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$$

Từ đây, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x\ge z\ge y$[2], khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}\ge x+\sqrt{y^2+z^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$x+y+z+\frac{(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}\le \frac{5}{4}\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$$

[1]By G.P. Henderson
[2]why?

$$\Leftrightarrow f(x) \le 0$$

với

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f(t) &= 4(z-y)t^3 - t^2yz + \left(4y^3 + 4y^2z + 4yz^2 - 4z^3 - 5yz\sqrt{y^2+z^2}\right)t \\ &+4yz(z^2-y^2) \le 0\end{aligned}$$

Nếu $y = z$ thì ta có

$$f(x) = -xy^2\left[(x-y) + \left(5\sqrt{2}-7\right)y\right] < 0$$

Nếu $z > y$, ta có

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty, \quad f(0) = 4yz(z^2-y^2) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$$

Lại có

$$f(z) = -yz^2\left[5\sqrt{y^2+z^2} - 4y - 3z\right] = -\frac{yz^2(3y-4z)^2}{5\sqrt{y^2+z^2}+4y+3z} < 0$$

$$f\left(\sqrt{y^2+z^2}\right) = 2yz\left(4y\sqrt{y^2+z^2} - 5y^2 - z^2\right) = -2yz\left(\sqrt{y^2+z^2} - 2y\right)^2 \le 0$$

Ta suy ra được $f(t)$ có 3 nghiệm thực, cụ thể, 1 nghiệm âm, 1 nghiệm thuộc $(0, z)$ và một nghiệm thuộc $\left[\sqrt{y^2+z^2}, \infty\right)$. Mặt khác, $f(t)$ là một hàm đa thức bậc 3 với hệ số thực nên nó có tối đa 3 nghiệm.Từ đây, ta suy ra được $f(t)$ có đúng 3 nghiệm: $t_0 < 0, t_1 \in (0, z), t_2 \in \left[\sqrt{y^2+z^2}, \infty\right)$. Từ đây, bằng cách lập bảng xét dấu, ta thấy

$$f(t) \le 0 \quad \forall t_1 \le t \le t_2$$

Mà ta có

$$t_1 < z \le x \le \sqrt{y^2+z^2} \le t_2$$

nên hiển nhiên ta có

$$f(x) \le 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Nhận xét 3 *Đây là một chứng minh hay và đặc sắc dựa trên tính chất về dấu của hàm đa thức bậc 3 nhưng để nghĩ đến được điều này quả thật không phải dễ...*

∎

LỜI GIẢI 3. [3]Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc}a(5a+b+9c)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right]\\ &= 5\left(\sum_{cyc}a\right)^2\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right]\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc}a\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right]\le\frac{5}{16}$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$\frac{5}{16}-\left(\sum_{cyc}a\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right]=\frac{A+B}{C}$$

trong đó

$$\begin{aligned}A &= \sum_{cyc}ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2\ge 0\\ B &= 243\sum_{cyc}a^3b^2c+835\sum_{cyc}a^2b^3c+232\sum_{cyc}a^4bc+1230a^2b^2c^2\ge 0\\ C &= 16(a+b)(b+c)(c+a)(5a+b+9c)(5b+c+9a)(5c+a+9b)>0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{3}=\frac{b}{1}=\frac{c}{0}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Chúng ta còn có 3 lời giải khác cho bài toán này, 1 bằng dồn biến toàn miền, 1 bằng dồn biến-khảo sát hàm số, 1 bằng kỹ thuật *pqr* nhưng trên quan niệm cá nhân, chúng tôi cho rằng những lời giải ấy đều không mang nét đặc sắc riêng nên chúng tôi sẽ không giới thiệu chúng ở đây.

Chúng tôi xin được kết thúc bài viết ở đây. Xin cảm ơn các bạn đã theo dõi bài viết này!

Regards

Võ Quốc Bá Cẩn

[3]By Võ Quốc Bá Cẩn, due to CYH techniques