43rd
Canadian Mathematical Olympiad
Wednesday, March 23, 2011

43ème
Olympiade mathématique du Canada
Mercredi le 23 mars, 2011

---

(1) Consider 70-digit numbers n, with the property that each of the digits 1, 2, 3, ..., 7 appears in the decimal expansion of n ten times (and 8, 9 and 0 do not appear). Show that no number of this form can divide another number of this form.

Considérer les nombres n à 70 chiffres avec la propriété que chacun des chiffres 1, 2, 3, ..., 7 apparaît dix fois dans l'expansion décimale de n (et que 8, 9 et 0 n'y apparaissent pas). Montrer qu'aucun nombre de cette forme ne peut être divisé par un autre nombre de la même forme.

(2) Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose opposite sides are not parallel, X the intersection of AB and CD, and Y the intersection of AD and BC. Let the angle bisector of $\angle AXD$ intersect AD, BC at E, F respectively and let the angle bisector of $\angle AYB$ intersect AB, CD at G, H respectively. Prove that $EGFH$ is a parallelogram.

Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les côtés opposés ne sont pas parallèles, X l'intersection de AB et de CD, et Y l'intersection de AD et de BC. Supposons que la bissectrice de $\angle AXD$ intersecte AD, BC en E, F respectivement et que la bissectrice de $\angle AYB$ intersecte AB, CD en G, H respectivement. Montrer que $EGFH$ est un parallélogramme.

(3) Amy has divided a square up into finitely many white and red rectangles, each with sides parallel to the sides of the square. Within each white rectangle, she writes down its width divided by its height. Within each red rectangle, she writes down its height divided by its width. Finally, she calculates x, the sum of these numbers. If the total area of the white rectangles equals the total area of the red rectangles, what is the smallest possible value of x?

Amy a divisé un carré en un nombre fini de plusieurs rectangles blancs et rouges, chacun ayant les côtés parallèles aux côtés du carré. À l'intérieur de chaque rectangle blanc, elle écrit sa largeur divisée par sa hauteur. À l'intérieur de chaque rectangle rouge, elle écrit sa hauteur divisée par sa largeur. Finalement, elle calcule x, la somme de tous ces nombres. Si l'aire totale des rectangles blancs égale l'aire totale des rectangles rouges, quelle est la plus petite valeur de x possible?

(4) Show that there exists a positive integer N such that for all integers $a > N$, there exists a contiguous substring of the decimal expansion of a which is divisible by 2011. (For instance, if $a = 153204$, then 15, 532, and 0 are all contiguous substrings of a. Note that 0 is divisible by 2011.)

Démontrer qu'il existe un entier positif N tel que pour tout entier $a > N$, il existe une sous-chaîne contiguë de l'expansion décimale de a qui est divisible par 2011. (Par exemple, si a =153204, alors 15, 532, et 0 sont toutes des sous-chaînes contiguës de a. Notez bien que 0 est divisible par 2011.)

(5) Let d be a positive integer. Show that for every integer S there exists an integer $n > 0$ and a sequence $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$, where for any k, $\epsilon_k = 1$ or $\epsilon_k = -1$, such that

$$S = \epsilon_1 (1 + d)^2 + \epsilon_2 (1 + 2d)^2 + \epsilon_3 (1 + 3d)^2 + \cdots + \epsilon_n (1 + nd)^2 .$$

Soit d un entier positif. Démontrer que, pour tout entier S, il existe un entier $n > 0$ et une suite $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$, où pour tout k, $\epsilon_k = 1$ ou $\epsilon_k = -1$, tel que

$$S = \epsilon_1 (1 + d)^2 + \epsilon_2 (1 + 2d)^2 + \epsilon_3 (1 + 3d)^2 + \cdots + \epsilon_n (1 + nd)^2 .$$