

Câu I. Cho phương trình bậc hai $x^2 - (m+3)x + m^2 = 0$, trong đó m là tham số sao cho phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

- Khi $m=1$, chứng minh rằng ta có hệ thức $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{6}}}$.
- Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5}$.
- Xét đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Tìm tất cả các cặp số (a, b) sao cho ta có hệ thức $P(x_1) = P(x_2)$ với mọi giá trị của tham số m .

Câu II.

- Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+b^2}}{1+ab}$.
- Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2} \leq \sqrt{9-(x+y+z)^2}$.

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC có $AB=b, AC=c$. M là một điểm thay đổi trên cạnh AB . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC cắt cạnh AC tại N .

- Chứng minh tam giác AMN đồng dạng với tam giác ACB . Tính tỷ số $\frac{MA}{MB}$ để diện tích tam giác AMN bằng một nửa diện tích tam giác ACB .
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN . Chứng minh I luôn thuộc một đường thẳng cố định.
- Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC . Chứng minh rằng độ dài IJ không đổi.

Câu IV. Cho a, b, c là các số nguyên sao cho $2a+b, 2b+c, 2c+a$ đều là các số chính phương (*).

- Biết rằng có ít nhất một trong ba số chính phương trên chia hết cho 3. Chứng minh rằng tích $(a-b)(b-c)(c-a)$ chia hết cho 27.
- Tồn tại hay không các số nguyên a, b, c thỏa mãn điều kiện (*) sao cho $(a-b)(b-c)(c-a)$ không chia hết cho 27?

Câu V. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3, BC=4$.

- Chứng minh rằng từ 7 điểm bất kỳ nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\sqrt{5}$.
- Chứng minh rằng khẳng định ở câu a) vẫn còn đúng với 6 điểm bất kỳ nằm trong hình chữ nhật $ABCD$.

.....Hết.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....

số báo danh:.....