PHẦN I: LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG I: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC (PTLG)

BÀI 1: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN (PTCB):

Trong lượng giác có 3 phương trình cơ bản.Dù cơ bản (chính vì cơ bản nên nó mới có tên như vậy) nhưng cũng phải nêu ra đây bởi vì các PTLG khác nếu giải được cũng phải đưa về một trong 3 PTCB sau đây:

1. $\sin x = \alpha$ với $|\alpha| \le 1$, có nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\alpha + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

2. $\cos x = \alpha$ với $|\alpha| \le 1$, có nghiệm là:

$$x = \pm \arccos\alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

3. $tgx = \alpha$ có nghiệm là:

$$x = \operatorname{arc}tg\alpha + k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

(hay là $\cot gx = \alpha$ có nghiệm là:

$$x = \operatorname{arc}\cot g\alpha + k\pi\ ) \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Chú ý: Trong các PTCB trên ta đã có sử dụng đến các hàm số lượng giác ngược:

1. Hàm $y = \arcsin x$:

Miền xác định: $D = [-1, 1]$

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin y = x \end{cases}$$

2. Hàm $y = \arccos x$:

Miền xác định: $D = [-1, 1]$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0; \pi] \\ \cos y = x \end{cases}$$

3. Hàm $y = \operatorname{arc}tgx$:

Miền xác định: $D = \mathrm{R}$

$$y = \operatorname{arc}tgx \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ tgy = x \end{cases}$$

4. Hàm $y = \operatorname{arc}\cot gx$:

Miền xác định: $D = R$

$$y = \operatorname{arc}\cot gx \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0; \pi) \\ \cot gy = x \end{cases}$$

Ta xét một số bài toán sau:

Bài toán 1: Giải phương trình sau:

$$\cos\left(3\pi\sin x\right)=\cos\left(\pi\sin x\right)$$

Giải

$$\cos\left(3\pi\sin x\right)=\cos\left(\pi\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\pi\sin x=\pi\sin x+k2\pi\\3\pi\sin x=-\pi\sin x+k2\pi\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\pi\sin x=k2\pi\\4\pi\sin x=k2\pi\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=k\\\sin x=\dfrac{k}{2}\end{array}\right.$$

$$\text{Do}\quad\begin{cases}k\in\mathbf{Z}\\\left|\sin x\right|\le 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|k\right|\le 1\\\left|\dfrac{k}{2}\right|\le 1\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left|\dfrac{k}{2}\right|\le 1\quad\Leftrightarrow k\in\left\{0;\pm1;\pm2\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\\sin x=\pm\dfrac{1}{2}\\\sin x=\pm 1\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\\sin x=\dfrac{1}{2}\\\sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{l\pi}{2}\\x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{l\pi}{2}\\x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\quad(l,k\in\mathbf{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{l\pi}{2}\\x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\quad(l,k\in\mathbf{Z})$$

Nhận xét: Đây là một PTLG mà việc giải nó rất đơn giản, mấu chốt của bài này là vị trí quan trọng của 'k'. Đôi lúc vai trò của 'k' trong việc giải PTLG rất quan trọng.Việc xét điều kiện 'k' có thể đưa đến một số PTLG khá hay liên quan đến việc giải một số bài toán đại số, số học nhỏ mà ta sẽ gặp ở một số bài toán sau:

Bài toán 2:

(ĐH Tổng hợp Lômônôxôp khoa Tính Toán và Điều Khiển 1979-ĐHSPII 2000)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình sau:

$$\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right]=1$$

Giải

Giả sử x là số nguyên thoả mãn phương trình, khi đó ta có:

$$\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=k2\pi \ \ (k\in\mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-16k\geq 0\\ 9x^2+160x+800=\left(3x-16k\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-16k\geq 0\\ x=\dfrac{8k^2-25}{3k+5}\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases}3x-16k\geq 0\\ 9x=24k-40-\dfrac{25}{3k+5}\end{cases} (1)$$

$$\Rightarrow \frac{25}{3k+5}\in\mathbf{Z}\text{, suy ra : } k\in\{0;\text{-}2;\text{-}10\} \quad (2)$$

Từ (2) , bằng cách thử trực tiếp vào (1) ta được:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=-2\\ x=-7\end{cases}\\ \begin{cases}k=-10\\ x=-31\end{cases}\end{array}\right.$$

<u>Nhận xét</u>: Đây là một PTLG cơ bản, việc giải nó thật ra là giải một phương trình nghiệm nguyên hai ẩn mà ta sẽ đề cập đến một cách cụ thể ở phần sau.Bài toán này chỉ nhằm mục đích minh hoạ cho vai trò của ‘k’.

Bài toán 3 : Tìm số a>0 nhỏ nhất thoã mãn:

$$\cos\left[\pi\left(a^2+2a-\frac{1}{2}\right)\right]-\sin\left(\pi a^2\right)=0$$

<u>Giải</u>

$$\cos\left[\pi\left(a^2+2a-\frac{1}{2}\right)\right]-\sin\left(\pi a^2\right)=0 \ \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{2}-\pi\left(a^2+2a\right)\right]=\sin\left(\pi a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left[\pi\left(a^2+2a\right)\right]=\sin\left(\pi a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\pi\left(a^2+2a\right)=\pi a^2+k2\pi\\ \pi\left(a^2+2a\right)=\pi-\pi a^2+k2\pi\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=k\in\mathbf{Z}\\ 2a^2+2a-\left(2k+1\right)=0\end{array}\right. (*)$$

$$\text{Do } \begin{cases}(*)\\ a>0\\ k\in\mathbf{Z}\end{cases} \text{ suy ra } Min a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

<u>Nhận xét</u>: Bài toán này 2 mấu chốt quan trọng:

-Thứ nhất: ta đã sử dụng công thức cơ bản nhưng lợi hại nhất là đối với các bài toán có dạng $\sin a+\cos b$:

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

-Thứ hai: tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của biến a.

Bài toán 4: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$$\sin\left(\pi x^2\right)=\sin\left[\pi\left(x+1\right)^2\right]$$

<u>Giải.</u>

$$\sin\left(\pi x^2\right)=\sin\left[\pi\left(x+1\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\pi x^2=\pi\left(x+1\right)^2+k2\pi\\ \pi x^2=\pi-\pi\left(x+1\right)^2+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbf{Z})\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{2k+1}{2}\\ x^2+x-k=0\end{array}\right.\ (k\in\mathbf{Z})$$

$(+)$ Xét $x=-\dfrac{2k+1}{2}>0$, $k\in\mathbf{Z}$ suy ra: , ta được $x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

$(+)$ Xét phương trình $x^2+x-k=0$ $(*)$ có:

$$\Delta=1+4k\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\geq-\dfrac{1}{4}\\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow k\geq 0$$

Thử trực tiếp ta thấy khi $k=1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm nhỏ nhất là:

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>\frac{1}{2}\text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình đã cho là: $x=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 5: Tính tổng các nghiệm $x\in[0,100]$ của phương trình sau:

$$\frac{\cos^3x-\cos^2x+1}{\cos^2x}=\cos 2x+tg^2x$$

<u>Giải.</u>

Điều kiện: $\cos^2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$

Với điều kiện trên phương trình:

$$\Leftrightarrow\cos x-1+\frac{1}{\cos^2x}=\cos 2x+tg^2x$$

$$\Leftrightarrow\cos x=\cos 2x\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbf{Z}\quad\Leftrightarrow x=\frac{k2\pi}{3}\ (*)$$

Do $0 \le x \le 100$ nên $0 \le k \le \left[\dfrac{100}{\dfrac{2\pi}{3}}\right] = \left[\dfrac{50}{\dfrac{\pi}{3}}\right] = 47$

$$\Rightarrow S = \frac{48.\left(0 + \dfrac{47.2\pi}{3}\right)}{2} = 752\pi$$

<u>Nhận xét</u>: Bài toán này ngoài việc cho ta thấy vai trò của 'k' còn chỉ rõ một vấn đề: tầm quan trọng của việc kết hợp nghiệm. Thử hình dung, nếu ta không kết hợp nghiệm lại dưới dạng công thức (*) đon giản hơn thì ta phải tiến hành xét 2 bất phương trình sau:

$$0 \le k2\pi \le 100; \qquad 0 \le \frac{k2\pi}{3} \le 100$$

Như vậy ta phải tốn thời gian hơn, quá trình giải bài toán sẽ bị kéo dài một cách không cần thiết.

II. KẾT HỢP CÔNG THỨC NGHIỆM:

Kết hợp công thức nghiệm trong các PTLG chẳng những giúp cho ta có thể loại được nghiệm ngoại lai mà còn có thể có được một công thức nghiệm đơn giản hơn, từ đó việc giải quyết bài toán trở nên đơn giản hơn (giống như bài toán mà ta vừa xét ở trên). Đôi lúc việc kết hợp công thức nghiệm cũng tương tự như việc giải một hệ phương trình lượng giác cơ bản bằng phương pháp thế. Ở đây ta không đề cập đến phương pháp này mà ta chỉ nói đến hai phương pháp chủ yếu sau:

A. ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC:

1.Các khái niệm cơ bản:

a) Đường tròn lượng giác: là đường tròn có bán kính đơn vị $R = 1$ và trên đó ta đã chọn một chiều dương $(+)$ (thông thường chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ)

b) Cung lượng giác: $\overset{\frown}{AB}$ (với A, B là 2 điểm trên đường tròn lượng giác) là cung vạch bởi điểm M di chuyển trên đường tròn lượng giác theo một chiều nhất định từ A đến B.

c) Góc lượng giác: khác với góc bình thường góc lượng giác có một chiều nhất định

2. Phương pháp biểu diễn góc và cung lượng giác:

a) Biểu diễn các điểm ngọn của cung lượng giác biết số đo có dạng $\alpha + k\pi$:

Ta đưa số đo về dạng $\alpha + k\dfrac{2\pi}{m}$.

Bài toán có m ngọn cung phân biệt tương ứng với k từ 0 đến (m-1).

Bài toán 1: Trên đường tròn lượng giác, ta lấy điểm A làm gốc.

Định những điểm M biết sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

<u>Giải.</u>

Ta có sđ $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{4}$.Suy ra có 4 điểm ngọn cung phân biệt ứng với:

$$(+)\,k=0:\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{4}$$

$$(+)\,k=1:\overset{\frown}{AM}=\frac{3\pi}{4}$$

$$(+)\,k=2:\overset{\frown}{AM}=\frac{5\pi}{4}$$

$$(+)\,k=3:\overset{\frown}{AM}=\frac{7\pi}{4}$$

Để ý ta thấy rằng trên đường tròng lượng giác các điểm ngọn cung là đỉnh của hình vuông $M_0M_1M_2M_3$.

Nhận xét: Trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn cung là đỉnh của một đa giác đều m cạnh.

b) Biểu diễn góc (cung) dưới dạng công thức tổng quát:

Ta biểu diễn từng góc (cung) trên đường tròn lượng giác. Từ đó suy ra công thức tổng quát.

Bài toán 2: Biểu diễn góc lượng giác có số đo sau dưới dạng một công thức tổng quát:

$$\begin{cases} x=k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{cases}$$

Giải.

Ta biểu diễn các điểm ngọn cung của $x=k\pi=k\dfrac{2\pi}{2}$

$$k=0:x=0$$
$$k=1:x=\pi$$

Ta biểu diển các điểm ngọn cung của $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

$$k=0:x=\pm\frac{\pi}{3}$$
$$k=1:x=\pm\frac{4\pi}{3}$$

Trên đường tròn lượng giác, ta nhận thấy có 6 điểm ngọn cung phân biệt, Do đó công thức tổng quát là: $x=\dfrac{k2\pi}{6}=\dfrac{k\pi}{3}$

Nhận xét: Qua bài toán này ta thấy rõ vai trò của việc kết hợp các góc lượng giác dưới dạng một công thức tổng quát đơn giản hơn. Hơn nữa, đây còn là bài toán về việc giải hệ phương trình lượng giác cơ bản bằng phương pháp biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

Bài toán giải PTLG dùng phương pháp kết hợp nghiệm bằng đường tròn lượng giác để loại các nghiệm ngoại lai.

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\frac{\sin x(\sin x+\cos x)-1}{\cos^2 x+\sin x-1}=0$$

Giải.

Điều kiện: $\cos^2 x+\sin x-1\neq 0 \Leftrightarrow \sin x+\sin^2 x\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} (1)$$

Với điều kiện đó phương trình tương đương:

$$\sin x(\cos x+\sin x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin x\cos x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in \mathbf{Z}\ (2)$$

Kết luận: nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi; \qquad x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, (k\in \mathbf{Z})$$

__Nhận xét__: Đây là một bài có công thức nghiệm đơn giản cho phép ta có thể biểu diễn một cách chính xác trên đường tròn lượng giác. Tuy nhiên ta hãy xét thêm bài toán sau để thấy rõ màu sắc của bài toán biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Bài toán 2: Giải phương trình sau:

$$\frac{\sin 4x}{\cos 6x}=1$$

Giải.

Điều kiện để phương trình có nghĩa là:

$$\cos 6x\neq 0 \Leftrightarrow 6x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}, k\in \mathbf{Z}\ (1)$$

Với điều kiện (1) phương trình tương đương:

$$\sin 4x=\cos 6x$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x=\dfrac{\pi}{2}-4x+2m\pi\\ 6x=4x-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi\end{array}\right. m\in \mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{m\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \end{array} \right. \quad m \in \mathbf{Z}$$

So sánh các nghiệm này với điều kiện ban đầu ta được nghiệm của phương trình là:

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{m\pi}{5}$ và $m \neq 5n + 1$, $n \in \mathbf{Z}$

Nhận xét: ta nhận thấy đối với bài toán này việc biểu diễn bằng đường tròn lượng giác đã ttrở nên khó khăn và khó chính xác. Do đó ta hãy xem phương pháp hai.

B. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN:

1. Cơ sở của phương pháp:

Giải phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$, với a,b,c nguyên.

a) Định lí 1: Định lí về sự tồn tại nghiệm nguyên

Cần và đủ để phương trình $ax + by = c$,với $(a, b, c \in \mathbf{Z})$ có nghiệm nguyên là $(a, b) | c$.

Hệ quả: Nếu $(a, b) = 1$ thì phương trình $ax + by = c$ luôn có nghiệm nguyên.

b) Định lí 2: nếu phương trình $ax + by = c$, với$(a, b, c \in \mathbf{Z})$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $(a, b) = 1$ có một nghiệm riêng (x_0, y_0) thì nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}, \text{ với } t \in \mathbf{Z}$$

Ví dụ: phương trình $3x + 2y = 1$ có nghiệm riêng là $(1, -1)$ và nghiệm tổng quát là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases}, \text{ với } t \in \mathbf{Z}$$

c) Ví dụ: giải và biện luận phương trình nghiệm nguyên sau theo tham số m nguyên

$$6x - 11y = m + 2 \quad (1)$$

Ta có $(6, 11) = 1$ nên phương trình (1) luôn có nghiệm nguyên.

Phương trình (1) có nghiệm riêng là $(2m + 4, m + 2)$ nên có nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} x = 2m + 4 - 11t \\ y = m + 2 - 6t \end{cases}, \ t \in \mathbf{Z}$$

2. Ví dụ: Ta xét một số bài toán dùng phương trình nghiệm nguyên để kết hợp nghiệm hay giải hệ phương trình hệ quả của PTLG.

Bài toán 1: Giải phương trình : $tg2xtg7x = 1$

Giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 7x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} (1) \\ x \neq \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k\pi}{7} (2) \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương:

$$\sin 2x \sin 7x = \cos 2x \cos 7x$$

$$\Leftrightarrow \cos 9x = 0 \qquad \Leftrightarrow 9x = \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9}, (3)\ m \in \mathbf{Z}$$

Ta xét xem nghiệm của (3) có thoả điều kiện (1), (2) hay không:

- Xét điều kiện (1):

Ta giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9} \qquad \Leftrightarrow 4m - 18k = 7$$

Dễ dàng nhận thấy phương trình trên có $(4,18) = 2$ không phải là ước của 7 nên phương trình nghiệm nguyên vô nghiệm.

Vậy nghiệm (3) luôn thoả mãn (1)

- Xét điều kiện (2):

Ta giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$\frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7} = \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9}$$

$$\Leftrightarrow 7 + 14m = 9 + 18k$$

$\Leftrightarrow 7m - 9k = 1$ có nghiệm riêng tổng quát là:

$$\begin{cases} m = 4 + 9t \\ k = 3 + 7t \end{cases}, t \in \mathbf{Z}$$

Do vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9}, \text{ với } m \in \mathbf{Z} \text{ và } m \neq 9t + 4, n \in \mathbf{Z}.$$

Nhận xét: Đối với bài toán này ta nhận thấy công thức nghiệm của nó khá phức tạp, việc biểu diễn trên đường tròn khó được chính xác. Cho nên ta dùng phương trình nghiệm nguyên sẽ chính xác và dễ dàng hơn. Quay trở lại bài toán2 ở mục trên ta thấy nếu dùng phương trình vô định thì bài toán sẽ nhanh hơn.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình cơ bản sau:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

Giải.

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k\pi (1) \\ x = 2l\pi (2) \end{cases} (k, l \in \mathbf{Z})$$

Để giải hệ phương trình này ta giải phương trình nghiệm nguyên:

$$4k\pi = 2l\pi \quad \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + t \\ l = 2t \end{cases}, t \in \mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x = 4t\pi$ với $t \in \mathbf{Z}$.

<u>Nhận xét</u>: Có thể ta cho rằng bài toán này cực kì đơn giản nhưng nó rất quan trọng. Có một sai lầm thường gặp vô cùng nguy hiểm: khi nhìn vào hệ phương trình đơn giản này ta nghĩ ngay đến đường tròn lượng giác -"cực kì cực kì nguy hiểm". Bởi vì đường tròn lượng giác có chu kì là 2π trong khi đó (1) có chu kì là 4π và (2) có chu kì là 2π. Ta không thể sử dụng đường tròn lượng giác trong trường hợp này.

*<u>Chú ý</u> :*Ta chỉ dùng đường tròn lượng giác khi số đo góc lượng giác đó có dạng:

$$x = \alpha + \frac{k2\pi}{m} \text{ hay } x = \alpha + \frac{k\pi}{m}$$

(do đường tròn lượng giác có chu kì 2π).

BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC DẠNG CHÍNH TẮC.

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP:

1. Phương trình đẳng cấp bậc I: $a\sin x + b\cos x = c$ **(1)** với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Đối với dạng này ta có 2 cách giải quen thuộc:

<u>Cách 1</u>: Phương pháp lượng giác

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + tg\varphi\cos x = \frac{c}{a} \quad \left(tg\varphi = \frac{b}{a}; -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

Đặt $\frac{c}{a}\cos\varphi = \sin\alpha \ \left(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$, ta có phương trình cơ bản:

$$\sin(x+\varphi) = \sin\alpha$$

<u>Điều kiện để phương trình có nghiệm</u>:

$$\left|\frac{c}{a}\cos\varphi\right| \le 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}\cos^2 x \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} \le 1 + tg^2\varphi \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} \le 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 \le a^2 + b^2$$

<u>Cách 2</u>: Phương pháp đại số

- Nếu $\cos\frac{x}{2} = 0$ là nghiệm của (1) thì $\begin{cases} sinx = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow b + c = 0$

- Nếu $\cos\frac{x}{2} = 0$ không là nghiệm của (1), hay là $b + c \neq 0$ nên tồn tại $tg\frac{x}{2}$.

Đặt $t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow a\dfrac{2t}{1+t^2} + b\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = c$

$$\Leftrightarrow 2at + b(1-t^2) = c(1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0$$

Giải phương trình được nghiệm $t = tg\frac{x}{2}$, suy ra nghiệm x.

Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} b+c=0 \\ \begin{cases} b+c\neq 0 \\ \Delta' = a^2-\left(c^2-b^2\right)\geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2$$

Chú ý:

- Nếu $a^2+b^2=c^2$, phương trình trở thành:

$$\cos\varphi.\sin x+\sin\varphi.\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\varphi)=1$$

- Nếu cung φ trong cách giải 1 không phải là cung đặc biệt $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},...$ ta nên dùng cách 2 để được phép tính đơn giản hơn.
- Đối với phương trình có tham số ta nên dùng cách 2

Bài toán 1: (Đại học Kinh tế Quốc Dân Hà Nội 1997)

Tìm các nghiệm $x\in\left(\frac{2\pi}{5},\frac{6\pi}{7}\right)$ của phương trình sau:

$$\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}$$

Giải.

$$\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 7x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 7x=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ 7x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{13\pi}{84}+\frac{2k\pi}{7} \\ x=\frac{5\pi}{84}+\frac{2k\pi}{7} \end{array}\right. (k\in\mathbf{Z})$$

- Xét $x=-\frac{13\pi}{84}+\frac{2k\pi}{7}\in\left(\frac{2\pi}{5};\frac{6\pi}{7}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{5}\leq -\frac{13\pi}{84}+\frac{2k\pi}{7}\leq\frac{6\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow 168<-65+120k<360$$

$$\Leftrightarrow 233<120k<425$$

$$\Rightarrow k=2; k=3$$

Với k=2 $\Rightarrow x=-\frac{13\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}=\frac{35\pi}{84}$

Với k=3 $\Rightarrow x=-\frac{13\pi}{84}+\frac{6\pi}{7}=\frac{59\pi}{84}$

- Xét $x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\in\left(\frac{2\pi}{5};\frac{6\pi}{7}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{5}<\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}$

$\Leftrightarrow 168<25+120k<335$

$\Rightarrow k=2$

Khi đó $x=\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}=\frac{53\pi}{84}$

Kết luận: $x\in\left\{\frac{35\pi}{84};\frac{53\pi}{84};\frac{59\pi}{84}\right\}$

Nhận xét: Ở bài toán này ta gặp lại vấn đề xét điều kiện của 'k' trong công thức nghiệm. Ta nhận thấy nếu bài toán có yêu cầu thêm điều kiện của nghiệm thì việc xét điều kiện của 'k' là đương nhiên.

Bài toán 2: (Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội 2000)

Giải phương trình sau:

$2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+\cos 2x$

Giải

$2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x+\left(\sqrt{2}-1\right)\cos 2x=3-\sqrt{2}$

Có: $\begin{cases} a^2+b^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2=5-2\sqrt{2} \\ c^2=\left(3-\sqrt{2}\right)^2=11-6\sqrt{2} \end{cases}$

Ta sẽ chứng minh: $a^2+b^2<c^2$

$\Leftrightarrow 5-2\sqrt{2}<11\text{-}6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}<6\Leftrightarrow\left(4\sqrt{2}\right)^2<6^2\Leftrightarrow 32<36$ (đúng)

Vậy phương trình vô nghiệm.

Nhận xét: Điều kiện để phương trình có nghiệm rất quan trọng, đặc biệt là trong các bài toán có tham số m mà ta thường gặp trong các kì thi Đại Học (trước đây) do đó ta cần quan tâm đến nó. Vì thế các bài toán về điều kiện tồn tại nghiệm ta sẽ được gặp ở các bài toán sau.

Bài toán 3: Cho phương trình

$$2\sin x+m\cos x=1-m \ (1)$$

a.Tìm m để phương trình có nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Giải.

a. Do $b+c=m+\left(1-m\right)\neq 0$ nên $\cos\frac{x}{2}\neq 0$.

Đặt $t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2\frac{2t}{1+t^2} + m\frac{1-t^2}{1+t^2} = 1-m$$

$$\Leftrightarrow 4t + m(1-t^2) = (1-m)(1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 4t + 1 - 2m = 0$$

Tìm m để (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

- Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương

  $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 4t + 1 - 2m = 0$ có nghiệm $t \in [-1;1]$.

Xét $f(-1) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 3$ thoả

Xét $f(1) = 0 \Leftrightarrow -2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ thoả

Xét $f(t) = 0$ có 1 nghiệm $t \in (-1;1)$ và 1 nghiệm $t \notin [-1;1]$

$$\Leftrightarrow f(-1)f(1) = (6-2m)(-2-2m) < 0$$

$$\Leftrightarrow (2\text{m-}6)(2m+2) < 0 \Leftrightarrow 1 < \text{m} < 3$$

Xét $f(t) = 0$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả $-1 < t_1 \le t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ 1.f(-1) > 0 \\ 1.f(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 \ge 0 \\ 6-2m > 0 \\ -2-2m > 0 \\ -1 < 2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{VN}$$

Kết luận: (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -1 < \text{m} < 3$

- Cách 2: $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 4t + 1 - 2m = 0$ có nghiệm $t \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow g'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{1}{2} = m \text{ có nghiệm } t \in [-1;1]$$

Ta có: $g'(t) = t - 2 < 0 \forall t \in [-1;1]$, suy ra g (t) nghịch biến/ [-1;1]

Suy ra tập giá trị g (t) là đoạn $[g(1); g(-1)] \equiv [-1;3]$

Từ đó (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow g(t) = m$ có nghiệm $t \in [-1;1] \Leftrightarrow -1 < \text{m} < 3$

b. Giải và biện luận:

$$f(t) = t^2 - 4t + 1 - 2m = 0 \text{ có } \Delta' = 2m + 3$$

Nếu $m < \frac{-3}{2} \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow f(t) = 0$, suy ra (1) vô nghiệm.

Nếu $m = \frac{-3}{2} \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow tg\frac{x}{2} = 2 = tg\alpha \Leftrightarrow x = 2\alpha + 2k\pi$

Nếu $m > \frac{-3}{2} \Rightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 - \sqrt{3+2m} = tg\beta \\ t_2 = 2 + \sqrt{3+2m} = tg\gamma \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\beta + 2k\pi \\ x = 2\gamma + 2k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbf{Z})\ ]$$

Nhận xét:

- Câu a của bài toán này thật ra là giải một phương trình bậc hai có điều kiện mà cách 1 (dùng tam thức bậc hai) là một cách quen thuộc thường thấy ở học sinh lớp 10. Trong câu này cần chú ý đến cách giải 2 (dùng một số kiến thức về giải tích: hàm đồng biến, nghịch biến, hàm liên tục,…) mà ta sẽ gặp lại ở bài sau.
- Cũng ở câu a này ta đã sử dụng một công thức: $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow b + c \neq 0$. Thật ra công thức này đã được nhắc đến ở phần lý thuyết, ở đây chỉ nhắc lại để nhấn mạnh bởi vì công thức này có thể rất có ích trong các bài kiểm tra trắc nghiệm.
- Ở câu b ta có thể sử dụng công thức phương trình vô nghiệm, có một nghiệm, có 2 nghiệm khi và chỉ khi: $a^2 + b^2 < c^2$ hay $a^2 + b^2 = c^2$ hay $a^2 + b^2 > c^2$.

Bài toán 4:

Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0$ và c là số bất kì. Chứng minh rằng trong 2 phương trình sau:

$$a\cos x + b\sin x = c(1)$$

$$a\cot gx + btgx = \sqrt{2}c(2)$$

Ít nhất có 1 phương trình có nghiệm.

Giải.

- Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$ thì là điều kiện cần và đủ để phương trình $a\cos x + b\sin x = c$ có nghiệm.

- Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình (1) vô nghiệm. Ta xét phương trình (2):

Với $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$ (do $a^2 + b^2 \neq 0$) thì $(2) \Leftrightarrow btgx = \sqrt{2}c$ có nghiệm.

Với $a \neq 0$ thì $(2) \Leftrightarrow a\cot g^2 x - \sqrt{2}c\cot gx + b = 0$ là phương trình bậc hai theo cotgx, có

$$\Delta = 2c^2 - 4ab = 2(c^2 - 2ab) > 0$$

$$(c^2 > a^2 + b^2 \geq 2ab)$$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm.

Tóm lại với $a^2 + b^2 \neq 0$ và c bất kì thì ít nhất một trong hai phương trình (1) và (2) có nghiệm.

Nhận xét: Đây là một bài toán đơn giản nhưng vô cùng thú vị bởi vì thật ra nó chỉ đơn giản nếu ta nắm vững điều kiện có nghiệm của phương trình đẳng cấp bậc I còn nếu không việc xét bài toán này sẽ vô cùng rắc rối. Ngoài ra bài toán này còn cho thấy điều kiện có nghiệm của một phương trình có vai trò vô cùng quan trọng.

2. Phương trình đẳng cấp bậc 2: $a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d$ (1) (a,b,c$\neq$0)

Cách 1:

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d$$
$$\Leftrightarrow a.\frac{1-\cos 2x}{2} + b\frac{\sin x}{2} + c\frac{1+\cos 2x}{2} = d$$
$$\Leftrightarrow b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = 2d - a - c$$

Lúc này phương trình (1) trở về dạng phương trình đẳng cấp bậc I.

Cách 2:

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d$$
$$\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow a - d = 0$ (dễ dàng chứng minh được)

Xét $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow a - d \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được phương trình bậc hai theo tgx:

$$(a-d)tg^2x + btgx + c - d = 0.$$

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$7\sin^2 x + 2\sin 2x - 3\cos^2 x - 3\sqrt[3]{15} = 0 \quad (1)$$

Giải.

Do ta có: $a = 7; d = 3\sqrt[3]{15} \Rightarrow a - d \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0$

Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$$7tg^2x + 4tgx - 3 - 3\sqrt[3]{15}\left(1 + tg^2x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(7 - 3\sqrt[3]{15}\right)tg^2x + 4tgx - \left(3 + 3\sqrt[3]{15}\right) = 0 \quad (2)$$

Ta có: $\Delta' = 4 + \left(7 - 3\sqrt[3]{15}\right)\left(3 + 3\sqrt[3]{15}\right)$

$$= 25 + 12\sqrt[3]{15} - 9\sqrt[3]{15^2}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{15} \Rightarrow t^3 = 15 \Rightarrow \frac{5}{3}t^3 = 25$, khi đđó

$$\Delta' = \frac{5}{3}t^3 - 9t^2 + 12t = \frac{5}{3}t(t-3)\left(t - \frac{12}{5}\right)$$

Dễ dàng thấy: $\left(\frac{12}{5}\right)^3 < 15 < 3^3 \Leftrightarrow \frac{12}{5} < t = \sqrt[3]{15} < 3$

Suy ra $\Delta' < 0 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm $\Rightarrow (1)$ vô nghiệm

Kết luận: phương trình đã cho vô nghiệm

Nhận xét: Bước ngoặt trong bài toán này là đặt $t = \sqrt[3]{15}$. Từ đó ta có thể đưa đến dấu của Δ' giúp bài toán được giải quyết. Đây là một dạng trong bài toán đổi vai trò của ẩn số và tham số.

Bài toán 2: Định a để phương trình sau có nghiệm:

$$a\sin^2 x + \sin 2x + 3a\cos^2 x = 1$$

Giải.

$$a\sin^2 x+\sin 2x+3a\cos^2 x=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2}\left(1-\cos 2x\right)+\sin 2x+\frac{3a}{2}\left(1+\cos 2x\right)=1$$

$$\Leftrightarrow a\cos 2x+\sin 2x=1-2a$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left(1-2a\right)^2\le a^2+1$

$$\Leftrightarrow 3a^2-4a\le 0$$

$$\Leftrightarrow 0\le a\le \frac{4}{3}$$

Kết luận: phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi: $0\le a\le \frac{4}{3}$

Nhận xét: Đối với bài toán này ta còn có thể giải theo cách khác:

- Với $a-1=0$ phương trình có nghiệm: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in \mathbf{Z}\right)$
- Với $a-1\ne 0$ ta chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x\ne 0$ được phương trình bậc hai theo tgx rồi dùng điều kiện của Δ để xác định a.

3. Phương trình đẳng cấp bậc III:

$$a\sin^3 x+b\sin^2 x\cos x+c\sin x\cos^2 x+d\cos^3 x=0$$

Xét $\cos x=0$ có là nghiệm của phương trình

Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x\ne 0$ ta được một phương trình bậc 3 theo tgx.

Bài toán 1: (Đại học Y Dược Thành phố Hồ Chí Minh 1997)

Giải phương trình:

$$\sin x.\sin 2x+\sin 3x=6\cos^3 x \quad (1)$$

Giải.

$$(1)\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin x\cos x\right)+3\sin x-4\sin^3 x=6\cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x-3\sin x-2\sin^2 x\cos x+6\cos^3 x=0 \quad (2)$$

Nếu $\cos x=0$ là nghiệm của (2) thì:

$$\begin{cases}\cos x=0\\ 4\sin^3 x-3\sin x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\\ 4\sin^3 x-3\sin x=0\end{cases}\Rightarrow \text{vô lý}$$

Chia 2 vế của (2) cho $\cos^3 x\ne 0$ ta được phương trình tương đương:

$$\left(2\right)\Leftrightarrow tg^3x-2tg^2x-3tgx+6=0$$

$$\Leftrightarrow \left(tgx-2\right)\left(tg^2x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=2=tg\alpha\\ tgx=\pm\sqrt{3}=\pm tg\frac{\pi}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in \mathbf{Z}\right)$$

Nhận xét: Ở dạng phương trình đẳng cấp bậc III này ta cần quan tâm đến 2 công thức góc nhân 3 sau đây:

$$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a\,;$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

Nhờ công thức này mà ta có thể đưa một phương trình đẳng cấp bậc ba có phương trình theo tg là một phương trình bậc ba khó đoán nghiệm sang phương trình đẳng cấp bậc nhất có dạng: $a\sin 3x + b\cos 3x + c = 0$ hay một phương trình đẳng cấp bậc hai tương ứng.

Bài toán 2: Cho phương trình: $\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0\ (*)$

Định m để (*) có đúng 7 nghiệm phân biệt $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$

<u>Giải.</u>

Ta có (*) $\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - \left(2\cos^2 x + 1\right) + \cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 2\cos^2 x + (m-3)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0\end{array}\right.$$

Trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ phương trình $\cos x = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Do đó để (*) có đúng 7 nghiệm phân biệt trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ thì phương trình

$4\cos^2 x - 2\cos x + m - 3 = 0$ phải có đúng 5 nghiệm khác nhau trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ và khác $x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

Mặt khác phương trình $\cos x = \alpha$ với $0<\alpha<1$ có đúng 3 nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$; với $-1<\alpha<0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$. Vậy ta tìm điều kiện của m để phương trình $4t^2 - 2t + m - 3 = 0$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả điều kiện $-1<t_1<0<t_2<1$ với $t=\cos x \in [-1,1]$.

Đặt $f(t) = 4t^2 - 2t + m - 3 = 0$ thì yêu cầu bài toán thoả khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f(0)<0\\ f(-1)>0\\ f(1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0\\ m+3>0\\ m-1>0\end{cases} \Leftrightarrow 1<m<3$$

<u>Nhận xét:</u> Đây là bài toán nằm trong bộ đề thi đại học (Đề 89/II) và cũng là dạng toán cần phải biết trong vấn đề giải phương trình lượng giác. Điểm mấu chốt của dạng toán này là cần nhớ lại một số kiến thức về tam thức bậc hai và cácnhận xét quan trọng về các góc lượng giác

II. <u>PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG</u>:

Đó là PTLG có chứa đồng thời $(\sin x \pm \cos x)^m$ và $(\sin x \cos x)^n$ với $m, n \in \mathbf{Z}$.

Các phương trình loại này ta thường áp dụng công thức:

$$\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2};$$

$$\sin x \cos x = \frac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{2}$$

Sau đó bằng cách đặt $t = \sin x + \cos x$ hoặc $t = \sin x - \cos x$ ta sẽ đưa PTLG về một phương trình đại số của t, với $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Bài toán 1:

Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt $x \in [0; \pi]$:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = m$$

<u>Giải</u>

$\sin^3 x - \cos^3 x = m \quad \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^3 + 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x) = m$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-1; \sqrt{2}\right] \forall x \in [0; \pi]$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow t^3 - 3t\left(\frac{1 - t^2}{2}\right) = m$

$\Leftrightarrow 2t^3 + 3t\left(1 - t^2\right) = 2m \Leftrightarrow f(t) = -t^2 + 3t = 2m$

Ta có $f'(t) = -3t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Bảng biến thiên:

t	-1		1		$\sqrt{2}$
$f(t)$	0	+	0	-	
$f'(t)$		↗	2	↘	
	-2				$\sqrt{2}$

Với mỗi

$\left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t \in (-1; 1) \end{array}\right.$ ta có 1 nghiệm $x \in [0; \pi]$

Với mỗi $t \in \left[1; \sqrt{2}\right)$ cho ta 2 nghiệm $x \in [0; \pi]$

Do đó để phương trình $\sin^3 x - \cos^3 x = m$ có 3 nghiệm phân biệt $x \in [0; \pi]$ thì $f(t) = 2m$ phải có 2 nghiệm t_1, t_2 sao cho $-1 < t_1 < 1 < t_2 < \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2m < 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$

Nhận xét: Vẫn với kiến thức về tam thức bậc hai bài toán sử dụng để giải một phương trình bậc hai có điều kiện. Ở đây ta cần chú ý đến một số công thức sau thường được dùng để đưa về phương trình đối xứng:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\left(\sin x+\cos x\right)^3-3\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)$$

$$\sin^3 x-\cos^3 x=\left(\sin x-\cos x\right)^3+3\sin x\cos x\left(\sin x-\cos x\right)$$

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

Bài toán 2: (Đại Học Huế 2001)

Cho phương trình:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=m\sin 2x-\frac{1}{2}$$

a) Giải phương trình với m=1

b) Chứng minh rằng $\forall |m|\geq 1$ phương trình luôn có nghiệm

Giải.

$$\sin^4 x+\cos^4 x=m\sin 2x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 x=m\sin 2x-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x+2m\sin 2x-3=0\left(1\right)$$

a) Với m=1 thì

$$\left(1\right)\Leftrightarrow \sin^2 2x+2\sin 2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin 2x-1\right)\left(3+\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in \mathbf{Z}\right)$$

b) Đặt $t=\sin 2x\in\left[-1,1\right]$

$$\Rightarrow \left(1\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)=t^2+2mt-3=0$$

Dễ dàng thấy $f\left(-1\right)f\left(1\right)=-\left(2m+2\right)\left(2m-2\right)=-4\left(m^2-1\right)\leq 0\ \forall |m|\geq 1$

Do đó $f\left(t\right)=0$ luôn có 1 nghiệm $t\in\left[-1,1\right]$.

Bài toán 3: (Vô địch New York 1973)

Giải phương trình:

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{97}{128}$$

Giải.

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{97}{128}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4=\frac{97}{128}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x+1)^4+(\cos 2x-1)^4=\frac{97}{8}$$

Đặt $t=\cos 2x$. Khi đó phương trình tương đương:

$$\Leftrightarrow (t+1)^4+(t-1)^4=\frac{97}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left(t^4+4t^3+6t^2+4t+1\right)+\left(t^4-4t^3+6t^2-4t+1\right)=\frac{97}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2t^4+12t^2-\frac{81}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow t^2=\cos^2 2x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\quad (\mathbf{k}\in \mathbf{Z})$$

Bài toán 4: (Bài 13 III.1- Bộ đề thi Tuyển Sinh)

Tìm m để:

$$\frac{3}{\sin^2 x}+3tg^2x+m(tx+\cot gx)-1=0$$

<u>**Giải**</u>

Phương trình $\Leftrightarrow 3(tgx+\cot gx)^2+m(tgx+\cot gx)-4=0$

Đặt

$$t=tgx+\cot gx\Rightarrow |t|=|tgx+\cot gx|=\left|\frac{2}{\sin 2x}\right|\ge 2$$

Khi đó: $3t^2+mt-4=0$ với $|t|\ge 2\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{-3t^2+4}{t}=m$

Ta có

$$f'(t)=-3-\frac{4}{t^2}<0\Rightarrow f'(t)\downarrow /(-\infty;-2)\cup[2;+\infty)$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(t)$		$-$		$-$	
$f'(t)$	$+\infty$ ↘	4 ‖ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ -4 ‖	↘ $-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow f(t)=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow |m|\ge 4$

<u>**Nhận xét:**</u> Phương trình trong bài toán này cũng được xem như là môt phương trình đối xứng nhưng là đối xứng của tg và cotg. Sau đây là một bài toán về phương trình đối xứng của cả sin, cos, tg, cotg:

$$2(tgx-\sin x)+3(\cot gx-\cos x)+5=0$$

III. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ MỘT VẾ LÀ TỔNG HỮU HẠN:

A. CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG TRÌNH:

Dạng phương trình này có cơ sở là một số tổng hữu hạn ở dạng phức tạp được đưa về dạng giản đơn.

Cần chú ý là ở đây chỉ nêu các trường hợp con, sử dụng các công thức đơn giản hơn để thu gọn các tổng tích phức tạp rồi áp dụng chúng vào việc giải phương trình lương giác chứ không đưa ra các phương pháp tổng quát. Bởi vì phần này sẽ được đề cập đến một cách rõ ràng và đầy đủ ở chương sau: “ Lượng giác ứng dụng vào giải toán Giải tích”.

a) Một số công thức chính được dùng nhiều ở phương pháp này:

1. $\cot gx - tgx = 2\cot g\, 2x$
2. $\cot gx + tgx = \dfrac{2}{\sin 2x}$
3. $\dfrac{1}{\sin 2x} - \cot gx = -\cot g\, 2x$

b) Một số tổng hữu hạn và cách chứng minh nó:

1. $S_1 = \sin a + \sin 2a + ... + \sin na = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\sin\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$

Nhìn vào kết quả ta cũng có thể đoán được là ta cần nhân 2 vế với $\sin\dfrac{a}{2}$

2. $S_2 = \cos a + \cos 2a + ... + \cos na = \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}a - \sin\dfrac{na}{2}}{2\sin\dfrac{a}{2}}$

Cũng tương tự như S_1 ta nhân 2 vế với $\sin\dfrac{a}{2}$.

3. $S_3 = \dfrac{1}{\sin a} + \dfrac{1}{\sin 2a} + \dfrac{1}{\sin 2^2 a} + ... + \dfrac{1}{\sin 2^n a} = \cot g\dfrac{a}{2} - \cot g 2^n a$

<u>Cách 1</u>: áp dụng $\dfrac{1}{\sin 2x} - \cot gx = -\cot g\, 2x$

<u>Cách 2</u>: ta có đẳng thức cần chúng minh tương đương với:

$$\frac{-\cos\dfrac{a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}} + \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + ... + \frac{1}{\sin 2^n a} = \frac{\cos 2^n a}{\sin 2^n a}$$

Xét vế trái có:

$$\frac{-\cos\dfrac{a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}} + \frac{1}{2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}} = \frac{-\left(2\cos^2\dfrac{a}{2} - 1\right)}{2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}} = -\frac{\cos a}{\sin a}$$

Hoàn tòan tương tự ta được:

$$\text{VT} = \frac{\cos 2^n a}{\sin 2^n a}$$

4. $S_4 = \frac{1}{\cos a\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a\cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(n-1)a\cos na} = \frac{1}{\sin a}(tgna - tga)$

Nhân 2 vế vơi sin a

5. $S_5 = 1 + \frac{\cos a}{\cos a} + \frac{\cos 2a}{\cos^2 a} + ... + \frac{\cos na}{\cos^n a} = \frac{\sin(n+1)a}{\sin a.\cos^n a}$

Ta có:

$$\frac{\cos ka}{\cos^k a} = \frac{\sin a.\cos ka}{\sin a.\cos^k a} = \frac{\sin(k+1)a - \sin(k-1)a}{2\sin a.\cos^k a} = \frac{\sin(k+1)a}{\sin a.\cos^k a} - \frac{\sin ka}{\sin a.\cos^{k-1} a}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sin(n+1)a}{\sin a.\cos^n a}$$

6. $S_6 = tgatg2a + tg2atg3a + ... + tg(n-1)atgna = \frac{tgna}{tga} - n$

Áp dụng: $tg(n-1)atgna - \frac{tgna}{tga} = -\frac{tg(n-1)a}{tga} - 1$

$$\Rightarrow S = \frac{tgna}{tga} - n$$

7. $S_7 = \frac{1}{2}tg\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}tg\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}tg\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot g\frac{a}{2^n} - \cot ga$

Áp dụng: $\cot gx - tgx = 2\cot g\ 2x$

8. $S_8 = \frac{1}{a\cos^2\frac{a}{2}} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}} = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$

Áp dụng: $\frac{1}{4\sin^2 x} + \frac{1}{4\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 2x}$

c) Một số tích và cách chứng minh:

1. $T_1 = (2\cos a - 1)(2\cos 2a - 1)...(2\cos 2^{n-1}a - 1) = \frac{2\cos 2^n + 1}{2\cos a + 1}$

Nhân 2 vế với $(2\cos a + 1)$

2. $T_2 = \left(1 + \frac{1}{\cos a}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos 2a}\right)...\left(1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}a}\right) = \frac{tg2^{n-1}a}{tg\frac{a}{2}}$

Cách 1: nhân 2 vế với $tg\frac{a}{2}$

Cách 2: ta xét vế trái:

$$\mathrm{VT} = \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{\cos a}.\frac{2\cos^2 a}{\cos 2a}.\frac{2\cos^2 2a}{\cos 2^2 a}...\frac{2\cos^2 2^{n-1}a}{\cos 2^{n-1}a}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{a}{2}VT = \sin\frac{a}{2}.\frac{2^n\cos^2\frac{a}{2}\cos a\cos 2a...\cos 2^{n-2}a}{\cos 2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow VT = \frac{\cos\frac{a}{2}\sin 2^{n-1}a}{\sin\frac{a}{2}\cos 2^{n-1}a} = \text{VP}$$

3. $T_3 = \cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}...\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n\sin\frac{\pi}{2n+1}}$

Nhân 2 vế với $\sin\frac{\pi}{2n+1}$

Chú ý: Ở các công thức này ta có một mẹo nhỏ. Đó là chỉ cần nhìn kết quả của vế phải là ta đã có thể biết được cách chứng minh. Tuy nhiên có nhiều trường hợp ta chỉ có vế trái thì ta phải làm sao? Ta cần sử dụng đến các công thức ở mục a). do đó ta cần ghi nhớ các công thức ở mục a.

Bài toán 1: Giải phương trình: (đề kiểm tra chuyên tháng 10 lớp 11A1)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin 2^i x} = \frac{1}{\sin x}$$

<u>Giải</u>

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $\sin 2^i x \neq 0; i = \overline{1,n}$

Áp dụng S_3 ta được nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{k2\pi}{1-2^{n+1}}; x = l2\pi\left(k,l \in \mathbf{Z}\right)$$

<u>Nhận xét</u>: Ta nhận thấy nhờ có đẳng thức S_3 mà việc giải bài toán này trở nên dễ dàng hơn. Mặt khác cần chú ý rằng đối với các bài toán có điều kiện phức tạp như vậy ta chỉ cần đặt điều kiện tổng quát. Sau đó khi đã có được nghiệm rồi ta thế vào điều kiện tổng quát ban đầu để loại đi các nghiệm ngoại lai.

Bài toán 2: Tìm n để đẳng thức sau đúng:

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(40^\circ i\right) = \cos 20^\circ \ (1)$$

<u>Giải</u>

Áp dụng S_2 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{n+1}{2}40^\circ - \sin\frac{n40^\circ}{2}}{2\sin\frac{40^\circ}{2}} = \cos 20^\circ$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(20^\circ n + 10^\circ\right) = \frac{\sin 40^\circ}{2\sin 10^\circ} = \frac{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ}{2\sin 10^\circ} = 2\cos 10^\circ\cos 20^\circ$$

Do $0^\circ < 10^\circ; 20^\circ < 90^\circ$ nên $\cos 10^\circ\cos 20^\circ > 0$ suy ra $\begin{cases} 0 < 20^\circ \text{n} + 10^\circ < 90 \\ \text{n} \in \text{N} \end{cases}$

Ta nhận thấy n không thể náo là 1 được. Như vậy còn lại 2 giá trị, thử trực tiếp ta được n=2. Chúng ta sẽ đề cập thêm vấn đề này ở chương 3, phần 3.

IV. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ:

$$\sqrt{f} = g \Leftrightarrow \begin{cases} g \ge 0 \\ f = g^2 \end{cases}$$

Khi giải các PHTL mà ẩn số nằm dưới dấu căn, các điều kiện ràng buộc thường ở dưới dạng các bất phương trình lương giác. Dĩ nhiên ta có thể xem như là một hệ thống gồm các PTLG và bất PTLG. Nhưng rõ ràng đây là một dạng khó, phức tạp dễ mắc phải sai lầm mà ta có thể thấy ở các bài toán dưới đây:

Bài toán 1: (64II-Bộ đề thi Tuyển sinh)

Giải phương trình:

$$\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x} \ (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} + \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = 2\sqrt{\cos x + \sin x}$$

Xét $\cos x + \sin x = 0$ là nghiệm $\Leftrightarrow tgx = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$

Xét $\begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ (\cos x + \sin x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ (\cos x - \sin x) \ge 0 \end{cases} (2)$

Với điều kiện (2) thì $(1) \Leftrightarrow \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} = 2$

$$\Leftrightarrow 2\cos x + 2\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = (2 - \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 4\cos x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \in [-1,1] \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbf{Z})$$

Thử lại với điều kiện (2): Do $\cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$ thoả (2).

Kết luận:

$$x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \ ; \ x = k2\pi \text{ với } k \in \mathbf{Z}.$$

Nhận xét:

Hãy thử quan sát xem tại sao ta phải xét 2 trường hợp riêng là: $\cos x + \sin x = 0$ và $\cos x + \sin x > 0$ mà không gộp điều kiện lại là: $\cos x + \sin x \ge 0$.

Nếu ta đặt: $a = \cos x + \sin x$ và $b = \cos x - \sin x$ thì điề kiện của bài toán khi ta chỉ xét 1 trường hợp là: $\begin{cases} a \ge 0 \\ ab \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$

Phép biến đổi này hoàn toàn sai vì nếu $a = 0$ thì $\forall b < 0$ ta vẫn có hệ $\begin{cases} a \ge 0 \\ ab \ge 0 \end{cases}$ được thoả mãn.

Do đó ta cần phải thật cẩn thận trong phương trình dạng này.

Bài toán 2: Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{10 + 8\sin^2 x} - \sqrt[4]{8\sin^2 - 1} = 1$$

Giải

Đặt

$$\begin{cases} u = \sqrt[4]{10 + 8\sin^2 x} \\ v = \sqrt[4]{8\sin^2 x - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ u^4 + v^4 = 17 \end{cases} \Rightarrow u^4 + (u-1)^4 = 17$$

Đặt $t = u - \frac{1}{2}$, ta có

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{4}\right)^4 = 17 \Leftrightarrow 2t^4 + 3t^2 - \frac{1}{8} = 17$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{-3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2>0 \\ u = -1<0 \end{array}\right. \Rightarrow u = 2$$

$$\Rightarrow u^4 = 16 \Leftrightarrow 10 + 8\sin^2 x = 16 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\left(k \in \mathbf{Z}\right)$$

Bài toán 3: (66II.2-Bộ đề thi tuyển sinh)

Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x} = m$$

Giải

Hàm số y=$\sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x} = m$ là hàm tuần hoàn với chu kì 2π nên ta chỉ cần tìm m để phương trình có nghiệm $x \in [-\pi, \pi]$.

Từ đó $\begin{cases} x \in [-\pi, \pi] \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \\ \sin x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.

Xét biểu thức

$$f = y^2 = \left(\sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f = 2 + 2(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x \cos x}$$

Đặt

$$t = \sin x + \cos x \in \left[\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \sqrt{2}\right] \forall x \in \left[\frac{-\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

Khi đó $f = 2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1}$

$$\Rightarrow f' = 2 + \frac{2(2t+1)}{\sqrt{2t^2+2t-1}} > 0 \Rightarrow f(t) \uparrow / \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \sqrt{2}\right]$$

$$\Rightarrow \text{Min } f = f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 1+\sqrt{3}$$

$$\text{Max } f = f\left(\sqrt{2}\right) = 4\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \text{Min } y \le m \le \text{Maxy} \Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{3}} \le m \le 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Nhận xét: Phương pháp này có thể gọi là phương pháp miền giá trị. Bởi vì thật ra tập giá trị của m chính là miền giá tri của hàm f.

Đây là hàm đồng biến trong trong tập xác định của nó nên Max và Min của hàm số cũng chính là giá trị 2 đầu của miền giá trị.

V. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC VỚI CÁC YẾU TỐ GIẢI TÍCH:

Trong lương giác ta cũng thường gặp các yếu tố giải tích như: sửdụng đạo hàm, hàm liên tục, hàm mũ, hàm logarit để giải.

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ SUNG:

1. Tính đơn điệu:

Cho hàm f đơn điệu $/(a,b)$ ta có các tính chất sau:

- $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Giả sử có $x_0 \in (a,b) : f(x_0) = 0$ thì x_0 là nghiệm duy nhất.
- Nếu có

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Và $\exists x_0 \in (a,b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow \exists! x_0$

-Nếu tập giá trị của hàm cũng $/(a,b)$ thì hàm $f(f(x))$ cũng là hàm tăng.

2. Tính liên tục:

Cho hàm f liên tục trên $[a,b]$ có $f(a)f(b) < 0$ thì <u>tồn tại ít nhất</u> $x_0 \in (a,b)$ sao cho $f(x_0) = 0$.Thêm vào đó nếu f là hàm đơng điệu thì x_0 là <u>duy nhất.</u>

3. Định lý Lagrange:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a,b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Hệ quả:Định lý Rolle

Nếu f có 2 nghiệm $x = a, x = b$ và có đạo hàm trên $[a,b]$ thì giữa 2 nghiệm của $f(x)$ có một nghiệm của đạo hàm $f'(x)$:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$$

B. VÍ DỤ:

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\log_2(\cos x+1)=2\cos x$$

Giải

Đặt $t=\cos x;-1<t\le 1$

Phương trình trở thành:

$$\log_2(t+1)=2t \Leftrightarrow 4^t=t+1 \Leftrightarrow 4^t-t-1=0$$

Xét hàm số $f(t)=4^t-t-1;-1<t\le 1$

$$f'(t)=4^t\ln 4-1$$

$$f''(t)=4^t\ln^2 4>0$$

Ta có phương trình $f(t)=0$ không có quá 2 nghiệm phân biệt**.** Thật vậy nếu có it nhất 3 nghiệm phân biệt thì theo định lí Rolle phương trình $f'(t)=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt và phương trình $f''(t)=0$ có nghiệm (vô lý).

Ta có: $f(0)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

Do đó phương trình $f(t)=0$ có đúng 2 nghiệm:

$$f(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in \mathbf{Z})$$

Bài toán 2: Giải phương trình:

$$\sqrt{2^{1-3\sin x}}+1+3\sin x=\log_2(1-9\sin x)$$

Giải

Đặt

$$t=\frac{1-3\sin x}{2}\Rightarrow 3\sin x=1-2t, \frac{1}{3}<t\le 2$$

Phương trình trở thành: $2^t-2t+1=\log_2(3t-1)\quad(1)$

Đặt $u=\log_2(3t-1)\Rightarrow 2^u=3t-1$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 2^t-2t+1=u \\ 2^u-3t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^t+t=2^u+u \\ 2^u-3t+1=0 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)=2^x+x$ tăng trong **R** nên hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=u \\ 2^u-3t+1=0 \end{cases} (2)$$

Hàm số $g(t)=2^t-3t+1$ giảm trong $\left(\frac{1}{3};2\right]$ và $g(1)=0$.

Vậy (2) có nghiệm duy nhất $u=t=1$.

Suy ra

$$\sin x=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.$$

Với $\sin\alpha=\frac{-1}{3},\frac{-\pi}{2}<\alpha<0$ và $k\in\mathbf{Z}$.

Bài toán 3:

Chứng minh phương trình $\lg x=\sin x$ có đúng một nghiệm trên $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

<u>Giải</u>

Nhận xét: với $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ thì $\sin x\le 0$ và $\lg x\ge 0$

Suy ra phương trình vô nghiệm trên $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

Do đó ta chỉ xét phương trình trên $\left[2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$

Xét hàm số $f(x)=\lg x-\sin x,x\in\left[2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\lg e}{x}-\cos x;$$

$$f''(x)=\frac{-\lg e}{x^2}+\sin x;$$

$$f'''(x)=\frac{2\lg e}{x^3}+\cos x$$

$\forall x\in\left[2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$ thì $\cos x\ge 0;\frac{2\lg e}{x^3}>0\ \Rightarrow f'''(x)=\frac{2\lg e}{x^3}+\cos x>0$

$\Rightarrow f''$ □ trên $\left[2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$

Mà

$$f''(2\pi)<0;f''\left(\frac{5\pi}{2}\right)>0$$

$$\Rightarrow\exists!c\in\left[2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]:f''(c)=0$$

Tức là với $x\in[2\pi;c]$ thì $f''\le 0$ và $x\in\left(c,\frac{5\pi}{2}\right]$ thì $f''\ge 0$

$\Rightarrow$ trên $[2\pi;c]$ thì f' nghịch biến; và trên $\left(c,\frac{5\pi}{2}\right]$ thì f' đồng biến

Mà $f'(2\pi)=\dfrac{\lg e}{2\pi}-1<0 \Rightarrow f'(x)<0 \forall x\in(2\pi,c)$ và $f'(c)\le\dfrac{\lg e}{2\pi}-1<0$

Trên $\left(c,\dfrac{5\pi}{2}\right]$ có $f'(c)<0$ và $f'\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)=\dfrac{2\lg e}{5\pi}>0 \Rightarrow \exists d\in\left(c,\dfrac{5\pi}{2}\right): f'(d)=0$

Mặt khác f' tăng trên $\left(c,\dfrac{5\pi}{2}\right)\Rightarrow f'(x)<0$ với $x\in(c,d)$ và $f'(x)>0$ với $x\in\left(d,\dfrac{5\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f'(x)<0 \text{ với } x\in(2\pi,d) \text{ và } f'(x)>0 \text{ với } x\in\left(d,\frac{5\pi}{2}\right).$$

Bảng biến thiên:

x	2π		d		$\frac{5\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\lg 2\pi>0$	↘	$f(d)<0$	↗	$\lg\frac{5\pi}{2}-1<0$

Vì $f(2\pi)>0, f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)<0 \Rightarrow f(d)<0 \Rightarrow f(2\pi).f(d)<0$

$\Rightarrow \exists x_0\in(2\pi,d): f(x_0)=0$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$

VI. CÁC PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT GIẢI PTLG THƯỜNG GẶP:

Cần chú ý đây chỉ là một số phương pháp tổng quát cho phương trình chính tắc. Đối với phương trình không mẫu mữc ta sẽ có một số phương pháp ở bài 3: Phương trình lượng giác không mẫu mực.

1. Phương pháp 1:Rất nhiều PTLG ta gặp không ở dạng chính tắc ta phải sử dụng các công thức lượng giác thích hợp để biến đổi đưa về dạng phương trình tích:

$$f(x).g(x).h(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \\ h(x)=0 \end{array}\right.$$

(với $f(x),g(x),h(x)$ là các hàm số lượng giác cơ bản)

<u>**Bài toán 1**</u>:

Tìm mọi nghiệm của phương trình:

$$\sin x.tg2x+\sqrt{3}\left(\sin x-\sqrt{3}tg2x\right)=3\sqrt{3}$$

Thoả mãn bất phương trình $2+\log_{\frac{1}{2}} x \le 0$

Giải.

Điều kiện: $\cos 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Ta có: $\sin x.tg2x+\sqrt{3}\left(\sin x-\sqrt{3}tg2x\right)=3\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(tg2x+\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}+3tg2x=3\left(tg2x+\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(tg2x+\sqrt{3}\right)\left(\sin x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow tg2x=-\sqrt{3}\left(do \sin x-3<0\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ k \in \mathbf{Z}$$

Mặt khác $2+\log_{\frac{1}{2}} \le 0 \Leftrightarrow 2-\log_2 x \le 0 \Leftrightarrow \log_2 x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge 4$

Ta tìm $k \in \mathbf{Z}$ sao cho $\dfrac{-\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2} \ge 4 \Rightarrow \begin{cases} k \in \mathbf{Z} \\ k \ge 3 \end{cases}$

<u>Kết luận</u>:

$$x=\frac{-\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \text{ với } \begin{cases} k \in \mathbf{Z} \\ k \ge 3 \end{cases}.$$

<u>Nhận xét</u>: Bài toán này đã một lần nữa thể hiện vai trò của 'k' trong việc giải các PTLG có thêm điều kiện.

Bài toán 2: Giải phương trình:

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{8}$$

<u>Giải</u>

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)+\sin^3 x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=\frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin 4x=\frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. k \in \mathbf{Z}$$

Bài toán 3: (149 II- Bộ đề thi Tuyển sinh)

Cho phương trình:

$$\sin^2\left[(x+1)y\right]=\sin^2(xy)+\sin^2\left[(x-1)y\right]$$

Tỉm nghiệm (x,y) để $(x+1)y, xy, (x-1)y$ là số đo các góc của tam giác.

<u>Giải</u>

Từ điều kiện $(x+1)y, xy, (x-1)y$ là số đo các góc của tam giác

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)y + xy + (x-1)y = \pi \\ 0<(x+1)y, xy, (x-1)y<\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3xy = \pi \\ 0<\dfrac{\pi}{3}+y, \dfrac{\pi}{3}-y<\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{-\pi}{3}<y<\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Thế $xy = \dfrac{\pi}{3}$ vào phương trình đã cho ta có:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+y\right) = \sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}-y\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{3}+y\right)}{2} - \frac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{3}-y\right)}{2} = \sin^2\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos 2\left(\frac{\pi}{3}-y\right) - \cos 2\left(\frac{\pi}{3}+y\right)\right] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{3}\sin 2y = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 2y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mà $-\dfrac{\pi}{3}<y<\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{-2\pi}{3}<2y<\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow 2y = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{6}$

Mặt khác $xy = \dfrac{\pi}{3}$ nên $x = 2$.

<u>Kết luận</u>: $(x, y) = \left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$

<u>Nhận xét:</u> Bài toán khá hay khi đặt vào trong tam giác mặc dù thật sự bản chất của nó chỉ là giải phương trình lương giác có điều kiện.

Bài toán 4: (Đại học xây dựng 2001)

Tìm m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$:

$$\sin 2x + m = \sin x + 2m\cos x$$

<u>Giải</u>

$$\sin 2x + m = \sin x + 2m\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + m - \sin x - 2m\cos x = 0 \qquad \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = m \end{array}\right.$$

Do phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ có đúng 1 nghiệm $x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ nên phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$

$\Leftrightarrow \sin x = m$ hoặc có đúng 1 nghiệm duy nhất $x_0 \neq \frac{\pi}{3}$ với $x_0 \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ trong đó có nghiệm $x_2 = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow m \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup (m = 1) \cup \left(m = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ

Dạng PTLG sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ ta thường gặp trong các bài toán có tham số, các phương trình đối xứng hay các phương trình có thể đưa về dạng phương trình bậc hai, bậc ba,…

Khi phép phân tích thành tích không thực hiện được, ta cố gắng biểu diễn tất cả các số hạng bằng một hàm số lượng giác duy nhất, và đó sẽ là ẩn của phương trình rồi đưa về phương trình lượng giác cơ bản để giải. Có thể chọn ẩn bằng các quy tắc sau:

- Nếu phương trình không thay đổi khi ta thế:
  - a) x bởi $-x$, chọn ẩn là $\cos x$
  - b) x bởi $\pi - x$, chọn ẩn là $\sin x$
  - c) x bởi $\pi + x$, chọn ẩn là tgx
- Nếu cả 3 cách đều thực hiện được, chọn ẩn là $\cos 2x$
- Nếu cả 3 cách đều không thực hiện được, chọn ẩn là $tg\frac{x}{2}$

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = 6$$

Giải

Đặt $u = 3\cos x + 4\sin x + 1$ phương trình đã cho trở thành:

$$u - 1 + \frac{6}{u} = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\cos x + 4\sin x + 1 = 1 (1) \\ 3\cos x + 4\sin x + 1 = 6 (2) \end{array}\right.$$

Giải $(1) \Leftrightarrow tgx = \frac{-3}{4} \Leftrightarrow x = -arctg\frac{3}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Giải $(2) \Leftrightarrow 3\cos x + 4\sin x = 5$

Gọi $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ với $tg\alpha = \frac{4}{3}$ ta có:

$$\cos(x-\alpha)=\frac{5}{3}\cos\alpha=1\text{ , vì }\cos\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow x=\alpha+l2\pi, l\in\mathbf{Z}$$

Vậy phương trình có các họ nghiệm:

$$x=-arctg\frac{3}{4}+k\pi\ ;x=\alpha+l2\pi\text{ với } k,l\in\mathbf{Z}$$

Nhận xét: thật ra ở phương trình (2) ta có thể giải cách khác hay hơn, ngắn gọn hơn. Đó là cách dùng bất đẳng thức B.C.S

Bài toán 2: Giải phương trình: $\left|\sin x-\cos x\right|+4\sin 2x=1(1)$

Giải

Đặt $t=\left|\sin x-\cos x\right|\geq 0\Rightarrow t^2=\left|\sin x-\cos x\right|^2=1-\sin 2x\Rightarrow \sin x=1-t^2$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 4t^2-t-3=0\qquad \Rightarrow t=1>0\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2};\ ;\ k\in\mathbf{Z}$

Nhận xét:qua bài toán này ta thấy có vẻ như việc đặt ẩn phụ hay không không quan trọng lắm. Chẳng qua việc đặt ẩn phụ làm cho bài toán trở nên gọn hơn mà thôi. Thế nhưng ở 2 bài toán sau thì khác.

Bài toán 3: Giải phương trình:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\sin^4 x+\cos^4 x$$

Giải

Nhận xét: nếy thay x bởi $-x$, $\pi-x$, $\pi+x$ thì phương trình không thay đổi. Do đó ta đặt ẩn: $t=\cos 2x, t\in[-1,1]$. Phương trình trở thành:

$$\left(\frac{1-t}{2}\right)^3+\left(\frac{1+t}{2}\right)^3=\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(\frac{1+t}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2=1\qquad\Leftrightarrow t=\pm 1\qquad \Leftrightarrow \cos 2x=\pm 1$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbf{Z})\qquad\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$$

Bài toán 4: Giải phương trình: $\sin x+tg\frac{x}{2}=2$

Giải

Nhận xét: Nếu thay x bởi $-x$, $\pi-x$, $\pi+x$ thì phương trình không thay đổi.

Điều kiện: $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\pi+k2\pi$

Đặt $t=tg\frac{x}{2}$. Phương trình trở thành:

$$\frac{2t}{1+t^2}+t=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t^2-t+2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow tg\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbf{Z})$$

3. Phương pháp 3: Đổi vai trò của ẩn số và tham số: Phương pháp tham số biến thiên

Trong một số bài toán đôi khi việc đổi vai trò của ẩn số và tham số cho nhautrở thành một phương pháp giải khá thú vị: Bằng cách đổi vai trò của ẩn số và tham số khi bậc của tham số là bậc II còn bậc của ẩn thì cao hơn ta có thể đưa một phương trình bậc cao về dạng một phương trình bậc hai theo tham số. Từ điều kiện tồn tại nghiệm củ phương trình $\Delta \geq 0$ suy ra các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm. Tuy nhiên có một số trường hợp mà biến quá phức tạp ta cũng có thể đặt tham số làm ẩn để dễ giải hơn.

Ta xét môt số bài toán sau:

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m:

$$(2m+1)\cos x+(2m-1)\sin x-2m^2-\frac{3}{2}=0$$

Giải

$$(2m+1)\cos x+(2m-1)\sin x-2m^2-\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2-2(\cos x+\sin x)m+\frac{3}{2}+(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow f(m)=4m^2-4(\cos x+\sin x)m+3+2(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Delta'_m=4(\cos x+\sin x)^2-12-8(\sin x-\cos x)=4+8\sin x\cos x-12-8(\sin x-\cos x)$$
$$=8(\sin x+1)(\cos x-1)\leq 0$$

$$\Delta'_m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(m)=2m^2+2m+\frac{1}{2}\\ f(m)=2m^2-2m+\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(m)=2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\\ f(m)=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\end{array}\right.$$

Với $m=-\frac{1}{2}$ thì $f(m)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbf{Z}$

Với $m=\frac{1}{2}$ thì $f(m)=0\Leftrightarrow x=k2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$

Với $m\neq\pm\frac{1}{2}$ thì $f(m)=0$ vô nghiệm.

Bài toán 2: Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$(2m+1)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)+2m^2+2m+2=0$$

Giải

$$(2m+1)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)+2m^2+2m+2=0$$

$$\Leftrightarrow m^2+m(\sin x-\cos x+1)+1=0$$

$$\Delta_m=(\sin x-\cos x+1)^2-4=2(\sin x-\cos x)-2\sin x\cos x-2$$

Đặt $t=\sin x-\cos x,|t|\leq\sqrt{2}$

Khi đó $\Delta_m=-(t-1)^2\leq 0$

Mà một phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta_m\geq 0\Leftrightarrow\Delta_m=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\sin x-\cos x=1$

Thế vào ta được: $m=0\,,m=1$

BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

Trong giải toán ta thường gặp một số phương trình mà cách giải tuỳ đặc thù của từng phương trình, có thể gọi đó là những phương trình không mẫu mực. Một số PTLG thể hiện tính không mẫu mực ở ngay dạng của chúng, nhưng cũng có những phương trình mà thoạt trông thấy rất bình thường nhưng cách giải lại không mâu mực (hay cách giải không mẫu mực thường hay hơn, gọn hơn cách giải mẫu mực)

Trong dạng phương trình này phương pháp đánh giá bất đẳng thức rất thường gặp. Nó gồm một số dạng nhỏ sau:

I. PHƯƠNG PHÁP TỔNG BÌNH PHƯƠNG:

$$A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

Hệ quả: $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ .... \\ f_n(x)=0 \end{cases}$ Với $f_i(x)\geq 0, i=\overline{1,n}$

Bài toán 1:

Giải phương trình:

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0(1)$$

Giải

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0(1) \quad \Leftrightarrow \left[x+\sin(xy)\right]^2+\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=0 \\ \sin(xy)=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=0 \\ \sin(xy)=-1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{\pi}{2}+l\in \end{cases} \end{array}\right. \text{ Với } (k,l\in \mathbf{Z})$$

Nhận xét: đối với bài toán này ta dễ nhìn thấy dạng của nó cho nên nó trở nên dễ dàng. Do đó một kinh nghiệm trong giải toán loại này có lẽ là cẩn thận nhận dạng nó. Thực hiện được bước này bài toán xem như được giải khoảng 7 phần.

Bài toán 2: Giải phương trình:

$$4\cos x+2\cos 2x+\cos 4x=-7$$

Giải

$$4\cos x+2\cos 2x+\cos 4x=-7$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x+1)+2(\cos 2x+2)+(\cos 4x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\cos x = 0 \\ 1+\cos 2x = 0 \\ 1+\cos 4x = 0 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

<u>Nhận xét</u>: Trong bài toán này ta đã sử dụng một bất đẳng thức quen thuộc của lương giác: $\cos x \le 1$

Một số BĐT lượng giác thường dùng để ước lượng:

$|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Nếu m, n là các số tự nhiên lớn hơn 2 thì $\sin^m x \pm \cos^m x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐỐI LẬP:

(Còn có tên gọi là phương pháp gặp nhau ở cửa-chặn trên chặn dưới 2 vế):

$$\begin{cases} A \ge M \\ B \le M \\ A=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M \end{cases}$$

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\cos^5 x + x^2 = 0$$

<u>Giải</u>

$$\cos^5 x + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = -\cos^5 x$$

Vì $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Mà $[-1,1] \subset \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x>0$ với $-1 \le x \le 1$

$$\Rightarrow -\cos^5 x<0 \text{ với } -1 \le x \le 1$$

Do đó ta có $x^2 \ge 0$ và $-\cos^5 x<0$ nên phương trình $\cos^5 x + x^2 = 0$ vô nghiệm.

Bài toán 2:

Giải phương trình:

$$\sin x.\sin 2x = -1$$

<u>Giải</u>

$$\sin x.\sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k_2\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{vô nghiệm}$$

Nhận xét: Bài toán này có thể xem như một bài toán mẫu. Bằng cách lập luận tương tự ta giải được các phương trình có dạng tương tự:

$$\sin ax.\sin bx = 1$$
$$\sin ax.\sin bx = -1$$
$$\cos ax.\cos bx = 1$$
$$\cos ax.\cos bx = -1$$

Bài toán 3:

Giải phương trình: $\sin x = x^2 + x + 1$

Giải

Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $x \in [-1,0] \subset \left[-\frac{\pi}{2},0\right] \Rightarrow \sin x \le 0$

Mà $x^2 + x + 1 > 0$,suy ra vô nghiệm.

- Nếu $x \in (-\infty,-1) \cup (0,\pm\infty)$ thì $\sin x \le 1$

Mà $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, suy ra phương trình vô nghiệm.

Kết luận: phương tình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét: Bài toán này đã sử dụng một phương pháp tìm nghiệm trong đại số. Đó là phương pháp chia khoảng. Phương pháp này thường được dùng trong các bài toán giải phương trình có trị tuyêt đối, có miền giá trị lộn xộn, hay trong các bài toán bất phương trình.đối với phương pháp này ta chia miền xác định ra từng khoảng mà trên khoảng đó hàm f không đổi dấu.

Bài toán 4: Giải phương trình:

$$\left(tgx + \frac{1}{4}\cot gx\right)^n = \cos^n x + \sin^n x \ (n \in \mathbf{Z}; n > 1)$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \sin x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}$

Do tg và cotg luôn cùng dấu nên

$$\left(\left|tgx + \frac{1}{4}\cot gx\right|\right)^n = \left(|tgx| + \frac{1}{4}|\cot gx|\right)^n \ge 2\sqrt{\left(\frac{|tgx||\cot gx|}{4}\right)^n} = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và vhỉ khi

$$tgx = \frac{1}{4}\cot gx \Leftrightarrow tg^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow tgx = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = arctg\left(\pm\frac{1}{2}\right) + k\pi$$

Với $n \in \mathbf{Z}; n > 1$ ta xét vế phải :

$$n = 2 \Rightarrow \sin^n x + \cos^n x = \sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\Rightarrow\left(tgx+\frac{1}{4}\cot gx\right)^n=1\Leftrightarrow x=arctg\left(\pm\frac{1}{2}\right)+k\pi$$

$n>2$ ta có: $\left|\cos^n x\right|\le\cos^2 x$

$$\left|\sin^n x\right|\le\sin^2 x$$

$$\Rightarrow\left|\cos^n x+\sin^n x\right|\le\left|\cos^n x\right|+\left|\sin^n x\right|\le\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$'='\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$ (loại)

Vậy $\left|\cos^n x+\sin^n x\right|<1,\forall x\ne\frac{k\pi}{2}$ và $\left|tgx+\frac{1}{4}\cot gx\right|^n\ge 1$

Cho nên với $n>2$ phương trình vô nghiệm.,

Kết luận: nghiệm của phương trình là:

$$x=arctg\left(\pm\frac{1}{2}\right)+k\pi\,,k\in\mathbf{Z}$$

Nhận xét: qua bài toán này ta thấy việc sử dụng bất đẳng thức kinh điển trong các bài toán giúp ta tìm được giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của một biểu thức để chặn nó lại và đem áp dụng vào phương trình bởi vì thông thường điều kiện xảy ra đẳng thức không nhiều giúp ta có thể giải nhanh các phương trình. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức là một phương pháp kinh điển được sử dụng rất phổ biến.

Bài toán 5:

Giải phương trình:

$$\cos x.\cos 2x.\cos 3x+\sin x.\sin 2x.\sin 3x=1(1)$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức BCS ta có:

$$\cos x.\cos 2x.\cos 3x+\sin x.\sin 2x.\sin 3x=1(1)$$

$$\Leftrightarrow \cos x.\cos 2x.\cos 3x+\sin x.\sin 2x.\sin 3x$$
$$\le\sqrt{\left(\cos^2 x\cos^2 2x+\sin^2 x\sin^2 2x\right)\left(\cos^2 3x+\sin^2 3x\right)}$$
$$=\sqrt{\left(\cos^2 x\cos^2 2x+\sin^2 x\sin^2 2x\right)}\le\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}=1$$

$$'='\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\cos 2x\sin 3x=\sin x\sin 2x\cos 3x\ge 0(2)\\ \cos^2 x\cos^2 2x+\sin^2 x\sin^2 2x=\cos^2 x+\sin^2 x(3)\end{cases}$$

Ta xét $(3)\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$ thoả (2)

Vậy nghiệm của (1) là: $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

Nhận xét: Bài toán này làm ta nhớ đến các tổng hữu hạn ở bài trước. Ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức BCS (như Bài toán này) hay bất đẳng thức Cauchy để tìm được giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của tổng đó.

III. PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG: (Nguyên lý cực biên)

$$\begin{cases} A \le A_1 \\ B \le B_1 \\ A+B=A_1+B_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=A_1 \\ B=B_1 \end{cases}$$

<u>Bài toán1</u>: Giải phương trình:

$$\sin^{12} x + \cos^{16} x = 1$$

<u>Giải</u>

Ta có: $\sin^{12} x \le \sin^2 x$;

$\cos^{16} x \le \cos^2 x$

$\Rightarrow \sin^{12} x + \cos^{16} x \le 1 \forall x$

Vì thế

$$\sin^{12} x + \cos^{16} x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{12} x = \sin^2 x \\ \cos^{16} x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$$

<u>Nhận xét</u>: Bài toán này thuộc dạng phương trình tổng quát sau: $\sin^m x + \cos^n x = 1$ với m ,n tự nhiên.

Ta có: $\begin{cases} \sin^m x \le \sin^2 x \\ \cos^n x \le \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^m x = \sin^2 x (1) \\ \cos^n x = \cos^2 x (2) \end{cases}$

Từ đó ta xét 4 khả năng cho dạng toán này:

1.Nếu m,n cùng chẵn. Khi đó:

$$(1)(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$$

2. Nếu m,n cùng lẻ. Khi đó:

$$(1)(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbf{Z})$$

3. Nếu mchẵn, n lẻ. Khi đó:

$$(1)(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbf{Z})$$

4. Nếu m lẻ, n chẵn. Khi đó:

$$(1)(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbf{Z})$$

Bài toán 2: Giải phương trình:

$$\frac{1}{1+\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 4x} + \frac{1}{1-\cos 6x} = 2$$

<u>Giải</u>

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq -1 (1) \\ \cos 4x \neq -1 (2) \\ \cos 6x \neq 1 (3) \end{cases}$

$\Rightarrow 1+\cos 2x, 1+\cos 4x, 1-\cos 6x > 0$

Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$(1+\cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 - \cos 6x).\left(\frac{1}{1+\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 4x} + \frac{1}{1-\cos 6x}\right) \geq 9 (4)$$

Đặt $S = 1+\cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 - \cos 6x$

$= 3 + 1 - 2\sin^2 2x = 2\sin 4x \sin 2x$

$= 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\sin^2 4x + \cos^2 4x) - 2\sin^2 2x - 2\sin 4x \sin 2x$

$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(\sin 4x + 2\sin 2x)^2 - \frac{1}{2}\cos^2 4x$

$\Rightarrow S \leq \frac{9}{2} (5)$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x + 2\sin 2x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x(1+\cos 2x) = 0 (6) \\ \cos 4x = 0 (7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}$

Hệ phương trình này vô nghiệm $\Rightarrow S < \frac{9}{2}$

Tức là $\frac{1}{1+\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 4x} + \frac{1}{1-\cos 6x} > 2$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

CHƯƠNG II: NHẬN DẠNG TAM GIÁC

- Để làm tốt các loại bài tập này, ta cần nhớ các điều sau:
  - Nắm vững các công thức lượng giác kết hợp các góc liên quan đặc biệt (bù, phụ), hệ thức lượng trong tam giác.
  - Nên thuộc các đẳng thức, bất đẳng thức quen thuộc trong tam giác để tránh những biến đổi không cần thiết.
- Giải các bài toán nhận dạng tam giác ta thường:
  - Đối với các bài toán chỉ biến đổi đẳng thức: đưa về phương trình tích.
  - Đối với các bài toán sử dụng bất đẳng thức: khi đẳng thức xảy ra thì đó là tam giác cần nhận dạng.
- Dựa vào phương pháp giải mà ta phân loại như sau:
  - Bài toán 1: sử dụng phép biến đổi đẳng thức.
  - Bài toán 2: sử dụng bất đẳng thức

BÀI 1: SỬ DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẲNG THỨC.

Một số đẳng thức quen thuộc trong tam giác:

Cho tam giác ABC có:

1) $\sin A+\sin B+\sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2) $\cos A+\cos B+\cos C = 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

4) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C = 1-2\cos A\cos B\cos C$

5) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2(1+\cos A\cos B\cos C)$

Để ý rằng tam giác ABC vuông

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos A=0\\ \cos B=0\\ \cos C=0\end{array}\right.$$

Như vậy, từ đẳng thức (4) và (5) ta có bài toán sau:

Hãy nhận dạng tam giác ABC nếu biết:

a) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$

b) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$

I. NHẬN DẠNG TAM GIÁC VUÔNG:

Một số phương pháp nhận dạng tam giác vuông:

Giả sử có ⊔ ABC, chứng minh ⊔ ABC vuông tại A, ta chứng minh:

- $\cos A = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - A\right) = 0 \Leftrightarrow \sin A = 1$
- $\sin B = \cos C$

Bài 1: (Đề 121/III)

Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC

$\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$

thì ABC là tam giác vuông.

Lời giải:

Trong ⊔ ABC ta dễ dàng chứng minh

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$1 - \cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Vậy từ giả thiết ta có:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow tg\frac{A}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Bài 2: Cho ⊔ ABC thỏa mãn hệ thức:

$\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \cos A + \cos B + \cos C$

Chứng minh rằng ⊔ ABC là tam giác vuông.

Lời giải:

Đẳng thức đã cho tương đương với đẳng thức sau:

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right] = \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right] \qquad (1)$$

Từ (1) có hai khả năng:

1. Nếu: $\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}=0 \Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

Khi ấy ta có hoặc là: $A-B=C \Rightarrow A=B+C \Rightarrow A=90^0$

Hoặc là: $B-A=C \Rightarrow B=C+A \Rightarrow B=90^0$

2. Nếu: $\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}\neq 0 \Rightarrow \cos\frac{C}{2}=\sin\frac{C}{2} \Rightarrow tg\frac{C}{2}=1$

$$\Rightarrow \frac{C}{2}=45^0 \Rightarrow C=90^0$$

như thế trong mọi trường hợp ABC đều là tam giác vuông.

Bài 3:(Đề 45/II$_2$)

Chứng minh rằng nếu $\sin 2A+\sin 2B=4\sin A.\sin B$ thì ABC là tam giác vuông .

Lời giải:

Theo công thức biến đổi tổng thành tích và tích thành tổng ta có

$$\sin 2A+\sin 2B=2\sin(A+B).\cos(A-B)$$
$$4\sin A.\sin B=2\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

Nếu từ giả thiết ta có

$$\sin(A+B).\cos(A-B)=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B)\left[1-\sin(A+B)\right]=\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B)\left(\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\right)^2=\cos^2\frac{A+B}{2}-\sin^2\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos(A-B)\left(\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\right)-\left(\cos\frac{A+B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)\right]=0$$

Mà biểu trong ngoặc vuông viết thành

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos(A-B)-1\right]-\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos(A-B)+1\right]$$

$$=-\cos\frac{A+B}{2}.2\sin^2\frac{A-B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}.2\cos^2\frac{A-B}{2}<0$$

$$\left(\cos\frac{A+B}{2},2\sin^2\frac{A-B}{2}>0,\sin\frac{A+B}{2}\geq 0,2\cos^2\frac{A-B}{2}>0\right)$$

nên ta phải có $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A+B}{2} \Rightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{C}{2}$

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

Bài 4: (Đề 19/II$_1$)

Xác định tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$c = c.\cos 2B + \sin 2B$

Lời giải:

Hệ thức đã cho viết thành

$c(1-\cos 2B) = 2b\sin B.\cos B$

$\Leftrightarrow \sin C.2\sin^2 B = 2\sin^2 B.\cos B$

$\Leftrightarrow \sin C = \cos B$

(vì $\sin^2 B \neq 0$)

Vì $\sin C$ và $\sin B$ là hai góc tam giác nên

$$\sin C = \cos B \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{\pi}{2} - B(1) \\ C = \frac{\pi}{2} + B(2) \end{cases}$$

Trường hợp (1) tam giác ABC vuông tại $\sin A$

Trường hợp (2) ta có góc $C - B = \frac{\pi}{2}$ ⊔ ABC giả vuông tại A

Bài 5:((Đề 24/III$_2$)

Trong một tam giác ABC, gọi r, r_A, r_B, r_C lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp trong các góc A,B,C. Chứng minh rằng nếu $r_A = r + r_B + r_C$ thì tam giác ABC vuông

Lời giải:

Theo công thức tính diện tích tam giác dựa vào bán kính các vòng tròn nội tiếp và bàng tiếp

Ta có

$S = p.r = (p-a).r_A = (p-b).r_B = (p-c).r_C$ nên

$r_A = r + r_B + r_C$

$\Leftrightarrow \frac{S}{p-a} = \frac{S}{p} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)}$

$\Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c)$

$\Leftrightarrow -pa = bc - p(b+c)$

$\Leftrightarrow p(b+c-a) = bc$

$\Leftrightarrow (b+c)^2 = a^2$

Vậy tam giác ABC vuông tại A

II. NHẬN DẠNG TAM GIÁC CÂN

Bài 1: Tam giác ABC có tính chất gì nếu $tgA + tgB = 2\cot g\dfrac{C}{2}$

Lời giải:

Do A, B, C là 3 góc của tam giác nên $\cot g\dfrac{C}{2} = tg\dfrac{A+B}{2}$

Vậy hệ thức đã cho viết thành:

$$tgA - tg\frac{A+B}{2} + tgB - tg\frac{A+B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}} + \frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}} = 0$$

$$\left(\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A}{2} \neq 0\right)$$

nên ta có

$$\sin\frac{A-B}{2}\left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\cos B}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ \cos A = \cos B \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A = B$$

Vậy tam giác A, B, C cân tại C

Nhận xét: Bài toán này có thể giải bằng phương pháp bất đẳng thức. Thực chất đây là bài toán tìm min (tam giác ABC có tính chất gì khi đẳng thức xảy ra) của bất đẳng thức sau:

$tgA + tgB \geq 2tg\dfrac{A+B}{2}$ (Trong mọi tam giác nhọn ta đều có bất đẳng thức trên)

Thật vậy trong một tam giác có 3 góc nhọn ABC ta có:

$$tgA + tgB = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$$

mà $2\cos A\cos B = \cos(A+B)\cos(A-B) \leq 1 + \cos(A+B) = 2\cos^2\dfrac{A+B}{2}$

nên $tgA + tgB \ge \dfrac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\cos^2\frac{A+B}{2}} = 2tg\dfrac{A+B}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A = B$

<u>Bài 2</u>: (Đề 90/III$_2$)

Chứng minh rằng nếu trong △ ABC có

$tgA + 2tgB = tgA.tg^2B$ thì tam giác ABC cân

<u>Lời giải</u>:

ta có $tgA + 2tgB = tgA.tg^2B$

$\Leftrightarrow tgA + tgB = tgA.tg^2B - tgB = (tgAtgB - 1)tgB$

$\Leftrightarrow \dfrac{tgA+tgB}{1-tgAtgB} = -tgB$

$(A+B \ne \pi \Rightarrow tgA+tgB \ne 0 \Rightarrow 1-tgAtgB \ne 0)$

$\Leftrightarrow tg(A+B) = -tgB$

$\Leftrightarrow -tgC = -tgB$

$\Leftrightarrow C = B\,(0 < A,B,C < \pi)$

Vậy △ ABC cân tại A

<u>Nhận xét</u>:

Với bài toán trên ta có thể giải bằng cách đưa về phương trình bậc hai với ẩn t là tgB :

$tgA.t^2 - 2t - tgA = 0$

Với nghiệm t ta có phương trình $tgB = t$

Cuối cùng suy ra tính chất của tam giác ABC

<u>Bài 3</u>: (Đề 7/II$_2$)

Tam giác ABC có tính chất gì nếu:

$\text{a.tgA+b.tgB} = (\text{a+b})\,tg\dfrac{A+B}{2}$

<u>Lời giải</u>:

Theo định lí hàm số sin ta có $\text{a} = 2\text{R}\sin A$, $\text{b} = 2\text{R}\sin B$ nên từ hệ thức đã cho ta viết

$\sin A.\text{tgA} + \sin B.\text{tgB} = (\sin A + \sin B)\,tg\dfrac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow \sin A.\left(\text{tgA} - tg\dfrac{A+B}{2}\right) + \sin B.\left(\text{tgB} - tg\dfrac{A+B}{2}\right) = 0$

Theo công thức $tga - tgb = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$ ta có

$$\sin A.\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}} + \sin B.\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}} = 0$$

Vì $\cos\dfrac{A+B}{2} \neq 0, \sin\dfrac{A-B}{2} = -\sin\dfrac{B-A}{2}$ nên hệ thức đã cho viết thành

$$\sin\frac{A-B}{2}\left(\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ tgA = tgB \end{array}\right. \Rightarrow A = B$$

Vậy tam giác ABC cân tại C

Bài 4: (Đề 39/II)

Tam giác ABC có các cạnh và góc thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$$

Chứng minh rằng ABC LÀ tam giác cân

Lời giải:

Ta có

$$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

Bình phương hai vế ta được

$$\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2} = \frac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow 1 + \cot g^2\frac{B}{2} = 1 + \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{4a}{2a-c} \Leftrightarrow 2a - c = 2a(1-\cos B) \Leftrightarrow c = 2a\cos B$$

mà theo định lí hàm số sin có $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

Vậy $b^2 = a^2 + c^2 - c^2 \Rightarrow b = a$, ⊔ ABC cân tại C

Nhận xét: Ta có thể giải bằng phương pháp tam thức

Đẳng thức đã cho tương đương

$$\frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2\cos B+\cos^2 B}{1-\cos^2 B} = \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow 2a\cos^2 B + (2a-c)\cos B - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos B = \dfrac{c}{2a} \\ \cos B = -1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{\sin C}{2\sin A}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A\cos B = \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) = \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

Bài 5:

Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông hay cân khi và chỉ khi

$$a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$$

Lời giải:

Theo định lí hàm số sin có

$$\sin A.\cos B - \sin B.\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \frac{(1-\cos 2A)-(1-\cos 2B)}{2} = \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B)\left[1-\sin(A+B)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(A-B) = 0 \\ \sin(A+B) = 1 \end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C hoặc vuông tại C

III NHẬN DẠNG TAM GIÁC ĐỀU

Bài 1: Chứng minh tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^0 khi và chỉ khi

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3} \quad (1)$$

Lời giải:

Vì ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} > 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow (\sin A - \sqrt{3}\cos A) + (\sin B - \sqrt{3}\cos B) + (\sin C - \sqrt{3}\cos C) = 0$$

$$\sin A-\sqrt{3}\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)$$

mà $\sin B-\sqrt{3}\cos B=2\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sin C-\sqrt{3}\cos C=2\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(1)\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$$

Nên

$$\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(\frac{A+B-\frac{2\pi}{3}}{2}\right).\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-(A+B)\right)\right]=0$$

mà $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-(A+B)\right)=-\sin\left((A+B)-\frac{2\pi}{3}\right)=-2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=\frac{\pi}{3}\\ B=\frac{\pi}{3}\,(0<A,B,C<\pi)\\ C=\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^0

Bài 2: Tam giác cân ABC có một góc là nghiệm của phương trình

$$tgx-tg\frac{x}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều

Lời giải:

Ta có

$$tgx-tg\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos x\neq 0,\cos\frac{x}{2}\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{tg\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow t+t^3=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2$$

$$\Leftrightarrow t^3+\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2+t-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t^3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t^2+\sqrt{3}t+2\right)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ t^2+\sqrt{3}t+2=0 \end{array}\right.$$

$$t=tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

Ta chọn một góc của tam giác ABC là $x=\frac{\pi}{3}$

Vậy tam giác ABC cân có một góc là $\frac{\pi}{3}$ nên ⊔ ABC đều

Bài 3:

Chứng minh rằng nếu ⊔ ABC thỏa điều kiện sau thì ABC là tam giác đều

$$b+c=\frac{a}{2}+h_a\sqrt{3}$$

Lời giải:

Ta có

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{2R.\sin B.2R.\sin C.\sin A}{2R.\sin A}=2R.\sin B.\sin C$$

Theo định lí hàm số sin từ đẳng thức trên có

$$2\sin B+2\sin C=\sin A+2\sqrt{3}\sin B.\sin C$$

với $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B$ đẳng thức viết lại thành

$$2\sin B\left(1-\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)+2\sin C\left(1-\frac{1}{2}\cos B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)=0(a)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-C\right)\right]+2\sin C\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-B\right)\right]=0$$

vì
$$\begin{cases} \sin B > 0 \\ \left[1-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)\right] \ge 0 \\ \sin C > 0 \\ \left[1-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)\right] \ge 0 \end{cases}$$

nên ta phải có

$$\begin{cases} 1-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)=0 \\ 1-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)=1 \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=\dfrac{\pi}{3} \\ B=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC đều

<u>Nhận xét</u>: Từ đẳng thức (a) ta có thể dùng bất đẳng thức B.C.S

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C \le 1 \\ \dfrac{1}{2}\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B \le 1 \Rightarrow (a) \ge 0 \\ \sin B, \sin C > 0 \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C = 1 \\ \dfrac{1}{2}\cos B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgC=\sqrt{3} \\ tgB=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\dfrac{\pi}{3} \\ B=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

BÀI 2: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

I. NHẬN DẠNG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1: Cho □ ABC có các góc thỏa mãn hệ thức

$$3(\cos B+2\sin C)+4(\sin B+2\cos C)=15$$

Chứng minh □ ABC vuông

Lời giải:

Theo B.C.S

$$3\cos B+4\sin B\le 5$$
$$6\sin C+8\cos C\le 10$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{4}{3}\Rightarrow tgB=\cot gC$$
$$B,C\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow B=\frac{\pi}{2}-C$$

Vậy □ ABC vuông tại A

Bài 2:

Chứng minh rằng □ ABC thỏa

$$3S=2R^2\left(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C\right)$$

thì ABC là tam giác đều

Lời giải:

Theo công thức tính diện tích tam giác và định lí hàm số sin có

$$3S=\frac{3abc}{4R}=2R^2\left[\left(\frac{a}{2R}\right)^3+\left(\frac{b}{2R}\right)^3+\left(\frac{c}{2R}\right)^3\right]$$
$$\Rightarrow a+b+c=3abc$$

theo bất đẳng thức Cauchy:

$$a+b+c\ge 3abc$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Vậy □ ABC đều

II. NHẬN DẠNG TAM GIÁC CÂN

Bài 1: Cho ⊔ ABC có 2 góc nhọn A, B thỏa điều kiện

$$tg^2A+tg^2B=2tg^2\frac{A+B}{2}$$

Chứng tỏ ABC là tam giác cân

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $tgA+tgB\geq 2tg\frac{A+B}{2}$ cho ⊔ ABC có 2 góc nhọn

từ gt ta có

$$(tgA+tgB)^2\geq 4tg^2\frac{A+B}{2}=2\left(tg^2A+tg^2B\right)$$

$$\Rightarrow\left(tgA-tgB\right)^2\leq 0\Rightarrow tgA=tgB$$

Vì A, B là các góc của một tam giác nên A=B

Vậy ⊔ ABC cân tại C

Bài 2: (Đề 51/II)

Cho ⊔ ABC có các góc thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\cos^2A+\cos^2B}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{1}{2}\left(\cot g^2A+\cot g^2B\right)$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác cân

Lời giải:

Đẳng thức tương đương

$$\frac{2-\left(\sin^2A+\sin^2B\right)}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{1}{2}\left(\cot g^2A+1+\cot g^2B+1\right)-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2A+\sin^2B\right)\left(\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}\right)=4$$

theo bất đẳng thức Cauchy

$$\sin^2A+\sin^2B\geq 2\sin A.\sin B$$

và $\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}\geq\frac{2}{\sin A.\sin B}$

suy ra $\left(\sin^2A+\sin^2B\right)\left(\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}\right)\geq 4$

Đẳng thức xảy ra khi $\sin^2A=\sin^2B\Leftrightarrow\sin A=\sin B\left(\sin A>0,\sin B>0\right)\Leftrightarrow A=B$

(vì A, B là 2 góc của tam giác) . Vậy tam giác ABC cân tại C

III. NHẬN DẠNG TAM GIÁC ĐỀU

Bài 1: Chứng minh ABC là tam giác đều nếu ta có

$$\begin{cases} \sin A + \sin B \ge 2\sin C \quad (1) \\ \cos A + \cos B \ge 2\cos C \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ (1) ta có nhận xét C không là góc lớn nhất vì khi C lớn nhất thì cạnh c lớn nhất trong 3 cạnh a, b, c theo định lí hàm số sin ta sẽ có

$$\begin{cases} \sin C > \sin A \\ \sin C > \sin B \end{cases} \Rightarrow 2\sin C > \sin A + \sin B$$

Trái gt từ hệ thức (1)

Vậy C phải là góc nhọn (do C không là góc lớn nhất) $\Rightarrow \cos C > 0$

Nên 2 vế của bất đẳng thức (1) và (2) đều dương nên ta có hệ

$$\begin{cases} (\sin A + \sin B)^2 \ge 4\sin^2 C \quad (3) \\ (\cos A + \cos B)^2 \ge 4\cos^2 C \quad (4) \end{cases}$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức (3) và (4)

$$2 + 2\cos(A-B) \ge 4 \Leftrightarrow \cos(A-B) \ge 1$$

mà $\cos(A-B) \le 1$ nên $\cos(A-B) = 1$

A, B là hai góc của tam giác nên A=B

từ (1) có $2\sin A \ge 2\sin C \Rightarrow a \ge c \Rightarrow A \ge C$

từ (2) có $2\cos A \ge 2\cos C \Rightarrow A \le C$

suy ra A=C

Vậy ABC là tam giác đều

Bài 2: Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC có

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \frac{2p}{9R}$$

thì ABC là tam giác đều

Lời giải:

Ta có

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \frac{2p}{9R}$$

$$\Rightarrow \frac{2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C}{a\frac{b}{2R}+b\frac{c}{2R}+c\frac{a}{2R}}=\frac{2p}{9R}=\frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Rightarrow \frac{2R^2\left(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\right)}{ab+bc+ca}=\frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Rightarrow \frac{8R^2\sin A.\sin B.\sin C}{ab+bc+ca}=\frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Rightarrow \frac{8R^2\frac{c}{2R}.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}}{ab+bc+ca}=\frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{a+b+c}{9}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)=9abc$$

$$\Rightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-c=0 \\ c-a=0\Rightarrow a=b=c \\ a-b=0 \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC đều

PHẦN II: LƯỢNG GIÁC ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1 : PHƯƠNG TRÌNH HÀM LƯỢNG GIÁC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ SỞ:

a. Đặc trưng hàm của hàm lượng giác:

-Hàm $f(x)=\sin x$ có tính chất

$$f(3x)=3f(x)-4f^3(x),\forall x\in \mathbb{R}$$

Quy ước: $f^3(x)=\left[f(x)\right]^3$

-Hàm $f(x)=\cos x$ có tính chất

$$f(2x)=2f^2(x)-1,\forall x\in \mathbb{R}$$

và $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y);\forall x,y\in \mathbb{R}$

-Cặp hàm $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ có tính chất

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x).g(x)+f(y)g(x);\forall x,y\in \mathbb{R} \\ g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y);\forall x,y\in \mathbb{R} \end{cases}$$

-Hàm $f(x)=tgx$ có tính chất

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x).f(y)}$$

Với $x,y,x+y\neq \frac{(2k+1)\pi}{2}(k\in \mathbb{Z}), x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi; y\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

-Hàm $f(x)=\cot gx$ có tính chất

$$f(x+y)=\frac{f(x).f(y)-1}{f(x)+f(y)}$$

Với $x,y,x+y\neq k\pi,(k\in \mathbb{Z}), x\neq k\pi; y\neq k\pi$

b. Đặc trưng hàm của hàm lượng giác ngược:

-Hàm $f(x)=\arcsin x$ có tính chất

$$f(x)+f(y)=f\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right);\forall x,y\in[-1;1]$$

-Hàm $g(x)=\arccos x$ có tính chất

$$g(x)+g(y)=g\left(xy-\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}\right);\forall x,y\in[-1;1]$$

-Hàm $h(x)=arctgx$ có tính chất

$$h(x)+h(y)=h\left(\frac{x+y}{1-xy}\right);\forall x,y,xy\neq 1$$

-Hàm $p(x)=arc\cot g$ có tính chất

$$p(x)+p(y)=p\left(\frac{xy-1}{x+y}\right);\forall x,y,x+y\neq 0$$

c.Phương trình hàm Cauchy:

Phương trình này cũng như cách chứng minh nó sẽ được sử dụng rất nhiều trong phần này.

***Phát biểu:**

Nếu hàm f(x) liên tục trên tập số thực và thỏa: $f(x+y)=f(x)+f(y);\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

thì $f(x)=ax$, với $a\in\mathbb{R}$ tùy ý.

***Chứng minh:**

Từ (1) suy ra $f(0)=0, f(-x)=-f(x)$

Và với $y=x$ thì $f(2x)=2f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Giả sử với k nguyên dương, $f(kx)=kf(x),\forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó: $f((k+1)x)=f(kx+x),\forall x\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{N}$

Từ đó theo nguyên lí quy nạp, ta có:

$$f(nx)=nf(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (3)$$

Ta kết hợp tính chất $f(-x)=-f(x)$ thu được:

$$f(mx)=mf(x),\forall m\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R}$$

Từ (2) ta có:

$$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=2^2 f\left(\frac{x}{2^2}\right)=...=2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}f(x),\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}\ (4)$$

Kết hợp (3) và (4)

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right)=\frac{m}{2^n}.f(1),\forall m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^+$$

Sử dụng giả thiết liên tục của hàm f(x) $\Rightarrow f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{R},a=f(1)$

Thử lại, ta thấy hàm f(x) =ax thỏa (1). Suy ra đpcm.

Tiếp đến ta sẽ xét các bài tóan liên quan đến phương pháp này.

II.Các bài toán chọn lọc:

<u>Bài 1</u>: Xác định α,β để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\alpha x+\beta}$ có tính chất $f(a),f(b),f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

<u>Lời giải</u>:

Không mất tính tổng quát, ta luôn luôn giả thiết $a \ge b \ge c$

Nhận xét rằng, phép nghịch đảo $g(x)=\dfrac{1}{x}$ không có tính chất $g(a),g(b),g(c)$ Là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC. Thật vậy, xét tam giác cân với $a=b=2,c=1$ thì ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

Để $f(a),f(b),f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có

$$f(a)>0,f(b)>0,f(c)>0,\forall \triangle ABC$$

Suy ra

$$\alpha a+\beta>0,\alpha b+\beta>0,\alpha c+\beta>0,\forall \triangle ABC \qquad (3)$$

Từ (3) ta thu được $\alpha \ge 0$ .Thật vậy,nếu $\alpha<0,\beta$ tùy ý cho trước thì ta chọn tam giác ABC có độ dài cạnh a đủ lớn, theo tính chất về dấu của nhị thức bậc nhất sẽ nhận được $\alpha a+\beta<0$

Tương tự, cũng từ (3) ta suy ra $\beta \ge 0$ .Thật vậy, nếu $\beta<0$ ta chọn tam giác ABC

Có độ dài cạnh a đủ nhỏ thì theo tính chất về dấu của nhị thức bậc nhất sẽ nhận được $\alpha a+\beta<0$

Trường hợp khi đồng thời xảy ra $\alpha=0,\beta=0$ $f(x)$ không xác định. Với $\alpha=0,\beta>0$ ta thu được hàm hằng dương nên $f(a)=f(b)=f(c)>0$ và $f(a),f(b),f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác đều.

Xét trường hợp $\alpha>0,\beta>0$. Khi đó

$$f(a)\le f(b)\le f(c)$$

Vậy ta cần xác định các số dương α,β sao cho luôn có

$$f(a)+f(b)>f(c),\forall \triangle ABC,a\ge b\ge c$$

Hay

$$\frac{1}{\alpha a+\beta}+\frac{1}{\alpha b+\beta}>\frac{1}{\alpha c+\beta},\forall \triangle ABC,a\ge b\ge c \qquad (4)$$

Xét các tam giác ABC cân đồng dạng với tam giác cạnh 3,3,1, tức $a=b=3d,c=d$ với $d>0$ tùy ý. Khi đó,(4) có dạng

$$\frac{1}{3d\alpha+\beta}+\frac{1}{3d\alpha+\beta}>\frac{1}{d\alpha+\beta},\forall d>0$$

Hay

$$\frac{2}{3d\alpha+\beta}>\frac{1}{d\alpha+\beta}\Leftrightarrow\frac{3d\alpha+\beta}{2}<d\alpha+\beta\Leftrightarrow\beta>d\alpha,\forall d>0$$

Điều này không xảy ra khi d đủ lớn.

Vậy với $\alpha = 0, \beta > 0$ thì hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\alpha x + \beta}$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bài 2: Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$, $f(0) = 0$ và có đạo hàm trong $(0,\pi)$ sao cho $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải:

Ta cần xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$ có đạo hàm trong $(0,\pi)$ sao cho

$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in (0,\pi) \\ f(0) = 0 \\ f(A) + f(B) + f(C) = \pi \end{cases}$$

Theo giả thiết thì $f(0) = 0$ nên $f(\pi) = \pi$ $\quad C = \pi - (A + B)$

Suy ra

$$f(A) + f(B) + f(\pi - A - B) = \pi, \forall A, B, A + B \in [0,\pi]$$

Hay

$$f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi, \forall x, y, x + y \in [0,\pi]$$

Lấy đạo hàm trong $(0,\pi)$ theo biến x, ta thu được

$$f'(x) - f'(\pi - x - y) = 0, \forall x, y, x + y \in [0,\pi] \qquad (5)$$

Từ (5) suy ra là hàm hằng trong $(0,\pi)$ và vì vậy $f(x) = px + q$. Do $f(0) = 0$ nên $q = 0$ và vì vậy $f(x) = px$. Do $f(\pi) = \pi$ nên $p = 1$ và ta thu được $f(x) = x$

Vậy hàm số $f(x) = x$ là hàm số liên tục trong $[0,\pi]$, $f(0) = 0$ và có đạo hàm trong $(0,\pi)$ thỏa mãn $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bài 3: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$ sao cho $f(0) = 0, f(x) > 0$, $\forall x \in (0,\pi)$ và $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải:

Ta phát biểu bài toán đã cho dưới dạng

Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$, $f(0) = 0, f(x) > 0$, $\forall x \in (0,\pi)$ và

$$f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi, \forall x, y \in [0,\pi], x + y \le \pi \qquad (6)$$

Do $f(0) = 0$ nên với $y = 0$, ta thu được

$$f(x)+f(0)+f(\pi-x)=\pi, \forall x\in[0,\pi]$$

Đặt $f(x)=x+g(x)$ thì $g(0)=0$ $g(x)$ là hàm liên tục trong $[0,\pi]$

Ta có

$$(6)\Leftrightarrow x+g(x)+(\pi-x)+g(\pi-x)=\pi$$

$$\Leftrightarrow g(x)+g(\pi-x)=0, \forall x\in[0,\pi]$$

Hay $$g(\pi-x)=-g(x), \forall x\in[0,\pi] \quad (7)$$

Thế $f(x)=x+g(x)$ vào (6) và sử dụng (7), ta thu được

$$x+g(x)+y+g(y)+\pi-(x+y)+g(\pi-(x+y))=\pi, \forall x,y\in[0,\pi], x+y\le\pi$$

Hay

$$g(x)+g(y)-g(x+y)=0, \forall x,y\in[0,\pi], x+y\le\pi$$

Tức là

$$g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x,y\in[0,\pi], x+y\le\pi \quad (8)$$

Do $g(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$ nên (8) là phương trình hàm Cauchy và $g(x)=\alpha x$ với α là hằng số, $f(x)=(1+\alpha)x$. Để $f(x)>0, \forall x\in(0,\pi)$ ta cần có $1+\alpha>0$ và để $f(A)+f(B)+f(C)=\pi$ ta cần có $1+\alpha=1$.suy ra $\alpha=0$ $f(x)\equiv x$

<u>Bài 4</u>: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$ sao cho $f(x)>0, \forall x\in(0,\pi)$ và $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

<u>Lời giải</u>:

Ta thấy có hai hàm số hiển nhiên thỏa mãn bài toán, đó là $f(x)=x$ và $f(x)=\frac{\pi}{3}$

Ta phát biêu bài toán đã cho dưới dạng

Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$ sao cho $f(x)>0$ và

$$f(x)+f(y)+f(\pi-x-y)=\pi, \forall x,y\in[0,\pi], x+y\le\pi \quad (9)$$

Cho $y=0$, ta thu được

$$f(x)+f(0)+f(\pi-x)=\pi, \forall x\in[0,\pi]$$

Hay

$$f(\pi-x)=\pi-f(0)-f(x), \forall x\in[0,\pi]$$

Thế vào (9), ta thu được

$$f(x)+f(y)+[\pi-f(0)-f(x+y)]=\pi, \forall x,y\in[0,\pi], x+y\le\pi$$

Tức là

$$f(x+y)+f(0)=f(x)+f(y), \forall x,y \in [0,\pi], x+y \le \pi \quad (10)$$

Đặt $f(x)=f(0)+g(x)$.Khi đó $g(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$ và có dạng

$$g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x,y \in [0,\pi], x+y \le \pi \quad (11)$$

Do $g(x)$ liên tục trong $[0,\pi]$ nên (11)là phương trình hàm Cauchy và $g(x)=\alpha x$ và $f(x)=\alpha x+\beta$.Ta cần xác định α,β để $f(x)>0$ với mọi $x\in(0,\pi)$ và để

$$f(A)+f(B)+f(C)=\pi$$

Tức là

$$\begin{cases} \alpha x+\beta>0, \forall x\in(0,\pi) \\ \alpha(A+B+C)+3\beta=\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x+\beta>0, \forall x\in(0,\pi) \\ \alpha\pi+3\beta=\pi \end{cases}$$

Suy ra $$f(x)=\alpha x+\frac{(1-\alpha)\pi}{3}>0, \forall x\in(0,\pi) \quad (12)$$

Cho $x\to 0$ và $x\to\pi$, từ (12) ta thu được

$$-\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$$

Với $-\frac{1}{2}<\alpha<1$ thì hiển nhiên (12) thỏa mãn.

Xét $\alpha=-\frac{1}{2}$ thì $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Thật vậy, với $0<x<\pi$ thì $f(x)>f(\pi)=0$

Xét $\alpha=1$ thì $f(x)=x$ hiển nhiên thỏa mãn điều kiện bài ra.

Vậy, các hàm cần tìm đều có dạng

$$f(x)=\alpha x+\frac{(1-\alpha)\pi}{3}, -\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$$

Nhận xét

Sau đây, ta sẽ xét một số bài toán sử dụng kiến thức lượng giác đơn giản để giải các bài toán liên quan đến phương trình hàm.

Các hàm này thường sử dụng 3 thủ thuật:

-Chọn các giá trị phù hợp với đối số

-Đổi biến số (đặt biến mới)

-Đổi hàm số(đặt hàm số mới)

Bài 4: Tìm hàm f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0)=1999, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2000 \\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y, \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Nhận xét: Ta cần định hướng sẽ thay x, y như thế nào sao cho đơn giản nhất, hơn nữa phải sử dụng được

$$\begin{cases} f(0) = 1999 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2000 \end{cases}$$

Ta xét cách thế sau

Lời giải:

Thay $x = t - \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$ ta thu được

$$f(t) + f(t-\pi) = 2f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad (1)$$

Tương tự, với $x = \frac{\pi}{2}, y = t - \frac{\pi}{2}$ rồi sau đó $x = 0, y = t - \pi$ ta được

$$f(t) + f(x-t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2.2000\sin t \qquad (2)$$

$$f(t-\pi) + f(\pi - t) = 2f(0)\cos(t-\pi) = -2.1999\cos t \qquad (3)$$

Nhân (3) với(-1) rồi cộng (1) với(2)

$$2f(t) = 2.2000\sin t + 2.1999\cos t$$

$$\Rightarrow f(x) = 1999\cos x + 2000\sin x, \forall x$$

Thử lại thấy đúng.

Bài 5: Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x\sin y, \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Lời giải:

Với dạng này ta chỉ cần xem xét quá trình sau

-Tìm $f(0)$

-Ứng với giá trị $f(0)$ tìm được dùng phép thế thích hợp tìm thêm một số giá trị.

-Tìm $f(x)$

Thật vậy

Với $x = y = 0$,ta thu được: $f^2(0) - f(0) = 0$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$

-Nếu $f(0) = 0$ thì với $y = 0$ ta có $-f(x) = 0$

Từ đó $f(x) \equiv 0, \forall x$

Nhưng nếu thay $x = y = \frac{\pi}{2}$ ta thấy mâu thuẫn.

-Nếu $f(0) = 1$ thay $y = -x$ ta có

$$f(x)f(-x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

Thay $x=\frac{\pi}{2}$ ta có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array}\right.$$

+Nếu $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, thay $y = \frac{\pi}{2}$ vào

Ta có $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow f(x) = \cos x, \forall x$

+Nếu $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ thay $y = -\frac{\pi}{2}$ vào ta được

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow f(x) = \cos x, \forall x$$

Vậy $f(x) = \cos x$ .Thử lại thấy đúng.

Nhận xét : Hóa ra điều kiện liên tục đề cho là thừa. Không biết hàm ý của tác giả là gì khi cho thêm giả thiết nhưng rõ ràng bài toán có thể giải bằng phép thế đơn giản.

Bài 6: Tìm hàm $f(x)$ ác định và liên tục trong $[-1,1]$ và thỏa mãn

$$f\left(2x^2 - 1\right) = 2xf(x), \forall x \in [-1.1]$$

Nhận xét:

Thoạt nhìn chúng ta liên tưởng $2x^2 - 1 \to 2\cos^2 x - 1$.

Đây là điều đã đề cập ở bài "Dãy số.."

Lời giải:

Ta sẽ sử dụng thuật chuyển ẩn x=cost

Ta được $f(\cos 2t) = 2\cos t . f(\cos t)$

Vậy $\frac{f(\cos 2t)}{\sin 2t} = \frac{f(\cos t)}{\sin t}, t \notin \pi\mathbb{Z} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Xét hàm $f(t) = \frac{f(\cos t)}{\sin t}$

Như vậy $f(t)$ xác định và liên tục với $t \notin \pi\mathbb{Z}$

Rõ ràng $f(t) = f(2t)$, từ đó $f(t) = f\left(2^m t\right), \forall m \in \mathbb{N}$ (1)

Mặt khác $f(t) = f(t + 2\pi) \Rightarrow f(t) = f(t + 2n\pi), \forall m \in \mathbb{}$ (2)

$$f(1) = f(2^{m+1}) = f(2^{m+1} + 2n\pi) = f\left(1 + \frac{n\pi}{2^m}\right)$$

Tập các điểm $\left\{1 + \frac{n\pi}{2^m}, m, n \in \mathbb{}\right\}$ là trù mật trong R ,vậy $f(x)$ là hằng số trên mỗi khoảng $(n\pi, (n+1)\pi)$

Dễ thấy $f(-x) = -f(x), \forall x \in [-1.1]$

Vậy $f(t + \pi) = \dfrac{f(-\cos t)}{-\sin t} = f(t)$

Từ đó các hằng số trên mỗi khoảng mở là như nhau.

Lại có $f(-t) = -f(t) \Rightarrow f(t) = 0$ có thể trừ ra những điểm của $n\mathbb{}$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in (-1,1)$$

Mà $f(x)$ liên tục vậy $f(x) = 0, \forall x \in [-1,1]$

Sau đây ta sẽ đến các bài toán sử dụng đặc trưng hàm đã được đề cập ở phần kiến thức cơ sở. Đây là dạng bài hay và khó, thường xuất hiện trong các bài thi học sinh giỏi dưới dạng các bài khó.

Bài 7: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trong $[-1,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) = f(x) + f(y), \forall x, y \in [-1,1]$$

Lời giải:

Đặt $x = \sin u, y = \sin v$ với $u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.Khi đó, $\cos u \geq 0, \cos v \geq 0$ và

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin(u+v), \forall u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Phương trình hàm đã cho có thể viêt dưới dạng

$$f(\sin u) + f(\sin v) = f(\sin(u+v)), \forall u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Đặt $f(\sin u) = g(u)$ ta được

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \forall u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Do vậy, $g(u) = au, a = const$ và $f(x) = a\arcsin x$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = a\arcsin x$ thỏa mãn bài ra

Nhận xét :

Bài toán đã sử dụng một phép biến đổi cơ bản

$$\begin{cases} \sin u\cos v+\sin v\cos u=\sin(u+v) \\ \sin v\sqrt{1-\sin^2 u}=\sin v\cos u \end{cases}$$

Việc phát hiện phép biến đổi này xem như mấu chốt bài toán .

Chú ý: chúng ta đã sử dụng phương trình hàm Cauchy ở cách giải trên .

Với cùng tư tưởng tương tự ta xét bài toán

Bài 8: Tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(xy-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}\right)=f(x)+f(y),\forall x,y\in[-1,1]$$

Lời giải:

Đặt $x=\cos u, y=\cos v, \forall u,v\in[0,\pi]$ .Khi đó $\sin u\geq 0, \sin v\geq 0$

$$xy-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}=\cos(u+v),\forall u,v\in[0,\pi]$$

Phương trình hàm đã cho có thể viết dưới dạng

$$f(\cos u)+f(\cos v)=f(\cos(u+v)),\forall u,v\in[0,\pi]$$

Đặt $f(\cos u)=g(u)$ ta được

$$g(u+v)=g(u)+g(v),\forall u,v\in[0,\pi]$$

Do vậy, $g(u)=au, a=const$ $f(x)=a\arccos x$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn bài toán .

Bài 9: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R} \\ f(0)=1,\exists x_0\in\mathbb{R}:|f(x_0)|<1 \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải:

Vì $f(0)=1$ và $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\exists\varepsilon>0$ sao cho $f(x)>0,\forall x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ (2)

Khi đó theo (2) với $n_0\in\mathbb{N}$ đủ lớn thì

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n_0}}\right)>0$$

Nhận xét rằng

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n_0}}\right)<1,\forall n\in\mathbb{N}$$

Thật vậy $f\left(\frac{x_0}{2^{n_0}}\right) \geq 1$ nguyên dương nào đó thì theo (1), ta có

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right]^2 - 1 \geq 1$$

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n-2}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)\right]^2 - 1 \geq 1$$

$$f(x_0) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2 - 1 \geq 1$$

Trái với giả thiết $|f(x_0)| < 1$

Vậy tồn tại $x_1 \neq 0$ sao cho $0 < f(x_1) < 1$ $f(x) > 0, \forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$ $x_1 = \frac{x_0}{2^{n_0}}$

$$f(x_1) = \cos\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Từ (1) suy ra

$$f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

Giả sử $f(kx_1) = \cos k\alpha, \forall k = 1, 2, ..., n \in \mathbb{N}^+$. Khi đó

$$f((n+1)x_1) = f(nx_1 + x_1) = 2f(nx_1)f(x_1) - f((n-1)x_1) = 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha = \cos(n+1)\alpha$$

Từ đó suy ra $f(mx_1) = \cos m\alpha, \forall m \in \mathbb{N}^+$.Mặt khác, đổi vai trò x và y trong (1), ta có $f(x-y) = f(y-x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .Do đó, $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ và như vậy

$$f(mx_1) = \cos m\alpha, \forall m \in \mathbb{Z} \qquad (3)$$

Cho $x = y = \frac{x_1}{2}$ từ (1) ta nhận được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1 + f(x_1)}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Do vậy

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$$

Giả sử

$$f\left(\frac{x_1}{2^k}\right) = \cos\frac{\alpha}{2^k}, \forall k = 1, 2, ..., n \in \mathbb{N}^+$$

Khi đó cho $x = y = \frac{x_1}{2^{k+1}}$ từ (1) ta thu được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} + f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2^n}}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

Do vậy

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right)=\cos\frac{\alpha}{2^n},\forall n\in\mathbb{N} \qquad (4)$$

(3) và (4) cho ta

$$f\left(\frac{mx_1}{2^n}\right)=\cos\frac{m\alpha}{2^n},\forall n\in\mathbb{N}^+,\forall m\in\mathbb{N} \qquad (5)$$

Vì $f(x)$ và cosx là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

(5) $\Leftrightarrow f(x_1t)=\cos\alpha t$

$$\Leftrightarrow f(x)=\cos ax,\forall a=\frac{\alpha}{x_1},\forall x\in\mathbb{R}$$

Thử lại ta thấy $f(x)=\cos ax\,(a\neq 0)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán .

Kết luận

$$f(x)=\cos ax, a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

<u>Nhận xét:</u> bài toán và lời giải trên khá hay, trước hết sử dụng tính trù mật và liên tục của hàm số để có được $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)<1$

Từ đây sử dụng lượng giác hóa để giải bài toán dựa trên quy nạp.

Do vậy ta có thể thấy lợi ích rõ ràng của các đặc trưng hàm lượng giác, bởi nó chính là chìa khóa giải những bài dạng này.

Ta tiếp tục xét thêm các bài toán khác.

<u>Bài 10</u>: Cho $b>0$ .Tìm các hàm $f(x)\neq 0$ xác định và liên tục trong

$$D:=\{x+2bk : x(-b,b),k=0,\pm1,\pm2,...\}$$

Và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},\forall x,y,x+y\in D \qquad (11)$$

<u>Lời giải:</u>

Cho $y=0$ từ (11) ta có

$$f(0)\left(\left[f(x)\right]^2+1\right)=0,\forall x\in D$$

Nên $f(0)=0$ .Do $f(0)=0$ và do $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nên tồn tại $x_0>0$ sao cho $[-x_0,x_0]\subset(-b,b)$ và

$$|f(x)|<1,\forall x\in[-x_0,x_0]$$

Chọn $x_1\in[-x_0,x_0]$ $\frac{x_1}{b}\notin\mathbb{Q}$ và đặt

$$f(x_1) = tg\alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Khi đó

$$f(2x_1) = \frac{2f(x_1)}{1-\left[f(x_1)\right]^2} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = tg2\alpha$$

Giả sử $f(kx_1) = tg(k\alpha), \forall k = 1,2,...,m, m \in \mathbb{N}^+$. Khi đó

$$f((m+1)x_1) = \frac{f(mx_1)+f(x_1)}{1-f(mx_1)f(x_1)} = \frac{tgm\alpha + tg\alpha}{1-tg\alpha tgm\alpha} = tg(m+1)\alpha$$

Vậy $f(mx_1) = tgm\alpha, \forall m \in \mathbb{N}^+$. Thay $y = -x$ vào (11) và sử dụng $f(0) = 0$, ta được $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ .Từ đó suy ra

$$f(mx_1) = tgm\alpha, \forall m \in \mathbb{Z} \qquad \text{(i)}$$

Mặt khác cũng từ (11) ta được

$$f(x_1) = \frac{2f\left(\frac{x_1}{2}\right)}{1-\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2} = tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(f\left(\frac{x_1}{2}\right) - tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+f\left(\frac{x_1}{2}\right)tg\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Do $\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| < 1$ $\left|f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right| < 1$ nên

$$(ii) \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1}{2}\right) = tg\frac{\alpha}{2}$$

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh đẳng thức

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = tg\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^+ \qquad \text{(iii)}$$

Từ (i) và (iii) suy ra

$$f\left(\frac{mx_1}{2^n}\right) = tg\frac{m\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^+, \forall m \in \mathbb{Z}$$

Kết hợp với giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục trên D,ta có

$$f(xx_1) = tg(x\alpha), \forall x \in D$$

Do đó

$$f(x) = tgax, a = \frac{\alpha}{x_1}$$

Để miền xác định của $f(x)$ trùng với D, cần chọn $a = \frac{\pi}{2b}$

Kết luận

$$f(x) = tg\frac{\pi}{2b}x, \forall x \in D$$

Nhận xét:

Bài toán cho ta cảm giác về công thức

$$tg(x+y) = \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x)tg(y)}$$

Từ đây ta có thể đoán ra đây là hàm gì và tiến hành giải.

Chúng ta sẽ xét đến các bài toán sử dụng hệ đặc trưng hàm sin và cos.

Bài 11:Tìm các cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định , liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (14)$$

Lời giải:

Từ (14) suy ra

$$\begin{cases} [f(x+y)]^2 = [f(x)g(y) + f(y)g(x)]^2 \\ [g(x+y)]^2 = [g(x)g(y) - f(x)f(y)]^2, \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Suy ra

$$[f(x+y)]^2 + [g(x+y)]^2 = \left[[f(x)]^2 + [g(x)]^2\right]\left[[f(y)]^2 + [g(y)]^2\right], \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Hay $\quad h(x+y) = h(x)h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$

Trong dó

$$h(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2$$

Nhận xét rằng, $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ .Vậy, do đặc trưng hàm mũ $h(x) \equiv 0$ hoặc $h(x) = a^x, a > 0$

Trong trường hợp đầu $h(x) \equiv 0$,sẽ kéo theo $f(x) \equiv 0$ và $g(x) \equiv 0$. Dễ thấy các cặp hàm này thỏa mãn các điều kiện của bài toán .

Xét trường hợp $h(x) = a^x$, tức là

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{a^{x/2}}\right]^2 + \left[\frac{g(x)}{a^{x/2}}\right] = 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (i)$$

Kết hợp (14) và (i), ta được $f(0)=0, g(0)=1$. Do các hàm $f(x)a^{-\frac{x}{2}}, g(x)a^{-\frac{x}{2}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $x_0>0$ sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{g(x)}{a^{\frac{x}{2}}}\le 1$$

$$\left|\frac{f(x)}{a^{\frac{x}{2}}}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}}, \forall x\in[-x_0,x_0]$$

Đặt

$$\begin{cases} g(x_0)=a^{\frac{x_0}{2}}\cos\alpha \\ f(x_0)=a^{\frac{x_0}{2}}\sin\alpha \end{cases}, \frac{-\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}$$

Thay $x=y=x_0$ vào(14), ta được

$$\begin{cases} g(2x_0)=a^{\frac{2x_0}{2}}\cos 2\alpha \\ f2(x_0)=a^{\frac{2x_0}{2}}\sin 2\alpha \end{cases}$$

Giả sử

$$\begin{cases} g(mx_0)=a^{m\frac{x_0}{2}}\cos m\alpha \\ fm(x_0)=a^{m\frac{x_0}{2}}\sin m\alpha \end{cases}, m\in\mathbb{N}^+$$

Khi đó theo (14), ta được

$$\begin{cases} f((m+1)x_0)=\left(a^{m\frac{x_0}{2}}\sin m\alpha\right)\left(a^{\frac{x_0}{2}}\cos\alpha\right)+\left(a^{\frac{x_0}{2}}\sin\alpha\right)\left(a^{m\frac{x_0}{2}}\cos m\alpha\right) \\ g((m+1)x_0)=\left(a^{m\frac{x_0}{2}}\cos m\alpha\right)\left(a^{\frac{x_0}{2}}\cos\alpha\right)-\left(a^{m\frac{x_0}{2}}\sin m\alpha\right)\left(a^{\frac{x_0}{2}}\sin\alpha\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g((m+1)x_0)=a^{\frac{(m+1)x_0}{2}}\cos(m+1)\alpha \\ f((m+1)x_0)=a^{\frac{(m+1)x_0}{2}}\sin(m+1)\alpha \end{cases}, m\in\mathbb{N}^+ \qquad \text{(ii)}$$

Tiếp theo, thay $x=mx_0, y=-mx_0$ vào (14), ta được

$$\begin{cases} f(mx_0)g(-mx_0)+f(-mx_0)g(mx_0)=f(0)=0 \\ g(mx_0)g(-mx_0)-f(mx_0)f(-mx_0)=g(0)=1 \end{cases}$$

Từ (ii), suy ra

$$\begin{cases} g(-mx_0)=a^{-m\frac{x_0}{2}}\cos m\alpha=a^{-m\frac{x_0}{2}}\cos(-m\alpha) \\ f(-mx_0)=-a^{-m\frac{x_0}{2}}\sin m\alpha=a^{-m\frac{x_0}{2}}\sin(-m\alpha) \end{cases}, m\in\mathbb{N}^+$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} g\left(mx_0\right) = a^{m\frac{x_0}{2}}\cos m\alpha \\ f\left(mx_0\right) = a^{m\frac{x_0}{2}}\sin m\alpha, \forall m \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

Tiếp theo, thay $x = y = \frac{x_0}{2}$ vào (14), ta có

$$\begin{cases} f\left(x_0\right) = 2f\left(\frac{x_0}{2}\right)g\left(\frac{x_0}{2}\right) = a^{\frac{x_0}{2}}\sin\alpha \\ g\left(x_0\right) = \left[g\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2 = a^{\frac{x_0}{2}}\cos\alpha \end{cases} \qquad \text{(iv)}$$

Giải (iv) với lưu ý $g\left(\frac{x_0}{2}\right) > 0$, ta được

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_0}{2}\right) = a^{\frac{x_0}{4}}\sin\frac{\alpha}{2} \\ g\left(\frac{x_0}{2}\right) = a^{\frac{x_0}{4}}\sin\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Giả sử

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}}\sin\frac{\alpha}{2^k} \\ g\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}}\cos\frac{\alpha}{2^k} \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Thay $x = y = \frac{x_0}{2^{k+1}}$ vào (14) ta được

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = 2f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right)g\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right) = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}}\sin\frac{\alpha}{2^k} \\ g\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = \left[g\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x_0}{2^{k+1}}\right)\right]^2 = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}}\cos\frac{\alpha}{2^k} \end{cases}$$

Sử dụng lập luận đối với (iv) ở trên , ta đi đến công thức

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}}\sin\frac{\alpha}{2^k} \\ g\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = a^{\frac{x_0}{2^{k+1}}}\cos\frac{\alpha}{2^k} \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N} \qquad \text{(v)}$$

Các hệ thức (iii) và (iv) cho ta

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{mx_0}{2^k}\right) = a^{\frac{mx_0}{2^{k+1}}} \sin\dfrac{m\alpha}{2^k} \\ g\left(\dfrac{mx_0}{2^k}\right) = a^{\frac{mx_0}{2^{k+1}}} \cos\dfrac{m\alpha}{2^k} \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \qquad \text{(vi)}$$

Do $f(x)$ liên tục trên R nên (vi) tương đương với

$$\begin{cases} f(tx_0) = a^{\frac{tx_0}{2}} \sin t\alpha \\ g(tx_0) = a^{\frac{tx_0}{2}} \cos t\alpha \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R} \qquad \text{hay} \qquad \begin{cases} f(x) = a^{\frac{x}{2}} \sin bx \\ g(x) = a^{\frac{x}{2}} \cos bx \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Thử lại ta thấy các cặp hàm trên thỏa mãn các điều kiện của bài toán .

Kết luận

$$\begin{cases} f(x) = a^{\frac{x}{2}} \sin bx, \\ g(x) = a^{\frac{x}{2}} \cos bx, a > 0, b \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{Hoặc} \qquad \begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ f(x) \equiv 0 \end{cases}$$

<u>Bài 12</u>: Tìm các cặp hàm $f(x)$ $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x-y) = f(x)g(y) - f(y)g(x) \\ g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (15)$$

<u>Lời giải:</u>

Từ giả thiết suy ra

$$[f(x-y)]^2 + [g(x-y)]^2 = \left[[f(x)]^2 + [g(x)]^2\right]\left[[f(y)]^2 + [g(y)]^2\right], \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Suy ra

$$h(x-y) = h(x)h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Trong đó

$$h(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2,\ h(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}$$

Ta có

$$[h(x)]^2 = h(x-x) = h(0)$$

Suy ra

$$h(x) \equiv c, \forall c \in \mathbb{R} : c = c^2$$

Vậy $h(x) \equiv 0$ hoặc $h(x) \equiv 1$

Nếu $h(x) \equiv 0$ thì

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ g(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Xét trường hợp $h(x) \equiv 1$. Khi đó thay $x = y = 0$ vào (15), ta được

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Và

$$\begin{cases} f(-y) = -f(y) \\ g(-y) = g(y), \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

Thay y bởi -y trong (15) và sử dụng (i), ta được

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

Theo bài toán 10 thì

$$\begin{cases} f(x) = a^{\frac{x}{2}} \sin bx \\ g(x) = a^{\frac{x}{2}} \cos bx \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do $\left[f(x)\right]^2 + \left[g(x)\right]^2 = 1$ nên a=1. Vậy (f(x),g(x)) có dạng

$$\begin{cases} f(x) = \sin bx, \\ g(x) = \cos bx, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Kết luận

$$\begin{cases} f(x) = \sin bx, \\ g(x) = \cos bx, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Hoặc $\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ g(x) \equiv 0 \end{cases}$

<u>Bài 13</u>: Tìm các cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} \left[f(x) + g(x)\right]^2 = 1 + f(2x), f(0) = 0, (i) \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y), (ii) \end{cases} (16)\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

<u>Lời giải</u>:

Cho $y = 0$, từ phương trình (ii) của (16), ta được

$$2f(x)\left[1 - g(0)\right] = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Nếu $g(0) \neq 1$ thì từ $f(x) \equiv 0$ và (i) cho ta $g(x) \equiv 1$ hoặc $g(x) \equiv -1$. Thử lại ta thấy hai cặp hàm này đều thỏa mãn bài toán.

Xét trường hợp $g(0) = 1$. Thay $y = x$ vào (16) và sử dụng các giả thiết $f(0) = 0, g(0) = 1$ ta được

$$\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=1$$

Từ đó và từ giả thiết $f(x)$ liên tục tại $x=0$ suy ra tồn tại $x_0>0$ sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<g(x)\le 1$$

$$\left|f(x)\right|<\frac{1}{\sqrt{2}},\forall x\in\left[-x_0,x_0\right]$$

Đặt

$$f(x_0)=\sin\alpha,\frac{-\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}$$

Khi đó $\qquad g(x_0)+\sqrt{1-\left[f(x_0)\right]^2}=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\left|\cos\alpha\right|=\cos\alpha$

Cho $x=y=x_0$. Khi đó từ (ii) suy ra

$$f(2x_0)=2f(x_0)g(x_0)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

Giả sử $f(kx_0)=\sin(k\alpha),k=1,2,...,m,m\in\mathbb{N}^+$. Khi đó

$$f\left((m+1)x_0\right)=2f(mx_0)g(x_0)-f\left((m-1)x_0\right)=2\sin m\alpha\cos\alpha-\sin(m-1)\alpha$$
$$=\sin(m+1)\alpha+\sin(m-1)\alpha-\sin(m-1)\alpha=\sin(m+1)\alpha$$

Vì vậy $f(mx_0)=\sin m\alpha,\forall m\in\mathbb{N}$

Mặt khác, thay $x=0$ vào (ii) thì $f(-y)=-f(y),\forall y\in\mathbb{R}$

Do đó

$$f(mx_0)=\sin m\alpha,\forall m\in\mathbb{Z} \qquad \text{(iii)}$$

Tiếp theo, thay $x=y=\frac{x_0}{2}$ vào (16), ta được

$$\begin{cases} f(x_0)=2f\left(\frac{x_0}{2}\right)g\left(\frac{x_0}{2}\right)=\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2} \\ \left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2+\left[g\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2=1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\alpha}{2} \end{cases} \qquad \text{(iv)}$$

Giải (iv), ta được

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_0}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2} \\ g\left(\frac{x_0}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Giả sử

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=\sin\frac{\alpha}{2^n} \\ g\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=\cos\frac{\alpha}{2^n} \end{cases},\forall n\in\mathbb{N}^+ \qquad \text{(v)}$$

Thay $x = y = \dfrac{x_0}{2^{k+1}}$ vào (16) và sử dụng (v), ta được

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x_0}{2^k}\right) = 2f\left(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\right)g\left(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2^k} \\ \left[f\left(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\right)\right]^2 + \left[g\left(\dfrac{x_0}{2^{k+1}}\right)\right]^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2^n} \\ g\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2^n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{(vi)}$$

Từ (iii) và (vi) suy ra

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{mx_0}{2^n}\right) = \sin\dfrac{m\alpha}{2^n} \\ g\left(\dfrac{mx_0}{2^n}\right) = \cos\dfrac{m\alpha}{2^n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{Z} \qquad \text{(vii)}$$

Sử dụng giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ ta được

$$\text{(vii)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0x) = \sin\alpha x \\ g(x_0x) = \cos\alpha x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sin\alpha x \\ g(x) = \cos\alpha x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}, a = \frac{\alpha}{x_0} \qquad \text{(viii)}$$

Nếu $a = 0$ thì $f(x) \equiv 0$,. Thay vào (16) và sử dụng giả thiết $g(0) = 1$, ta được $g(x) \equiv 1$

Khi $a \neq 0$ thì thay $y = x$ vào (ii) và sử dụng (viii), ta được

$$f(x) = \sin\alpha x, g(x) = \cos\alpha x, x \in \mathbb{R}$$

Dễ thấy, các cặp hàm này thỏa mãn các điều kiện của bài toán

Kết luận $\quad f(x) = \sin\alpha x, g(x) = \cos\alpha x, x \in \mathbb{R}$

hoặc $\quad f(x) \equiv 0, g(x) \equiv 1$

hoặc $\quad f(x) \equiv 0, g(x) \equiv -1$

Tiếp đến ta xét các hàm ngược.

Bài 14: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| < 1 \qquad (17)$$

Lời giải:

Đặt $x = tgu, y = tgv, \frac{-\pi}{2} < u, v < \frac{\pi}{2}$ .Do $|xy| < 1$ nên ta có

$$\frac{x+y}{1-xy} = tg(u+v)$$

Vậy
$$\frac{-\pi}{2} < u + v < \frac{\pi}{2}$$

Khi đó có thể viết (17) dưới dạng

$$f(tg(u+v)) = f(tgu) + f(tgv), \frac{-\pi}{2} < u, v, u+v < \frac{\pi}{2}$$

Do đó

$$g(u+v) = g(u) + g(v) \qquad \text{(i)}$$

Trong đó

$$g(u) = f(tgu), \frac{-\pi}{2} < u, v < \frac{\pi}{2}$$

Lặp lại lập luận và trình tự cách giải của phương trình Cauchy đối với (i), ta được

a) $g(0) = 0, g(u)$ là hàm lẻ.

b) $g(u_0) = 2g\left(\frac{u_0}{2}\right), 0 \neq u_0 \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

c) Bằng phương pháp quy nạp ta có

$$g\left(\frac{mu_0}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n} g(u_0)$$

trong đó $n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{2^n} u_0 \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Từ đó suy ra $g(u) = au, a \in \mathbb{R}, u \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Vậy $f(x) = aarctgx, a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ (ii)

Thử lại ta thấy hàm $f(x)$ xác định theo (ii) thỏa mãn các điều kiện của bài toán .

Kết luận $f(x) = aarctgx, a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Bài 15</u>: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1,1]$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(x) + f(y) = f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \forall x, y \in [-1,1] \qquad (18)$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt

$$x = \sin u, y = \sin v, \forall u, v \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Thì
$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin(u+v)$$

Khi đó có thể viết (18) dưới dạng

$$f(\sin u) + f(\sin v) = f(\sin(u+v)),$$

Hay $\quad g(u+v) = g(u) + g(v), u, v \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Trong đó $g(u) = f(\sin u)$. Lặp lại lập luận và trình tự cách giải của phương trình Cauchy cho trường hợp này, ta được

$$g(u) = au, u \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Suy ra $\quad f(x) = aarc\sin x, \forall x \in [-1,1], a \in \mathbb{R} \qquad$ (i)

Thử lại ta thấy hàm $f(x)$ xác định theo (i) thỏa mãn các điều kiện của bài toán .

Kết luận $\quad f(x) = aars\sin x, a \in \mathbb{R}$

Bài 16: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1,1]$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(x) + f(y) = f\left(xy - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}\right), \forall x, y \in [-1,1] \qquad (19)$$

Lời giải:

Đặt $\quad x = \cos u, y = \cos v, \forall u, v \in (0,\pi)$

Thì $\quad xy - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2} = \cos(u+v)$

Khi đó có thể viết (19) dưới dạng

$$f(\cos u) + f(\cos v) = f(\cos(u+v)),$$

Hay $\quad g(u+v) = g(u) + g(v), u \in (0,\pi)$

Trong đó $g(u) = f(\cos u)$

Lặp lại lập luận và trình tự cách giải của phương trình Cauchy cho trường hợp này, ta được

$$g(u) = au, u \in (0,\pi)$$

Suy ra $\quad f(x) = aars\cos x, \forall x \in [-1,1], a \in \mathbb{R} \qquad$ (i)

Thử lại ta thấy hàm $f(x)$ xác định theo (i) thỏa mãn các điều kiện của bài toán

Kết luận

$$f(x) = aars\cos x, \forall x \in [-1,1], a \in \mathbb{R}$$

Bài 17: Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên và thỏa mãn các điều kiện

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \forall x, y \in \mathbb{R} : x + y > 0 \qquad (20)$$

Lời giải:

Đặt $\quad x = cotgu, y = cotgv, 0 < u, v < \pi$

Thì $\dfrac{x+y}{1-xy} = cotg\left(u+v\right)$

Khi đó có thể viết (20) dưới dạng

$$f\left(cotg\left(u+v\right)\right) = f\left(cotgu\right) + f\left(cotgv\right),$$

Hay $g\left(u+v\right) = g\left(u\right) + g\left(v\right), 0 < u, v < \pi$

Trong đó $g\left(u\right) = f\left(cotgu\right)$.

Lặp lại lập luận và trình tự cách giải của phương trình Cauchy cho trường hợp này, ta được

$$g\left(u\right) = au, a \in \mathbb{R}, u \in \left(0, \pi\right)$$

Suy ra

$$f\left(x\right) = aarcctgx, a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(i)}$$

Thử lại ta thấy hàm $f\left(x\right)$ xác định theo (i) thỏa mãn các điều kiện của bài toán

Kết luận

$$f\left(x\right) = aarcctgx, a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

CHƯƠNG 2 : LƯỢNG GIÁC VÀ CÁC BÀI TÓAN DÃY SỐ

I. MỞ ĐẦU:

Lượng giác đóng vai trò quan trọng trong tóan dãy số: không những là một dạng tóan khó mà còn là một phương pháp giải. Phương pháp mà chúng ta sẽ đề cập trong phần này chính là phương pháp lượng giác hóa các bài tóan. Tuy vậy, khác với các phần tóan dãy số trước, phương pháp này không hề có cơ sở hay định lý rõ ràng nào, mà cần nhiều sự khéo léo cũng như tất cả kiến thức giải tích và lượng giác. Do vậy, thông qua từng bài tóan, chúng ta sẽ tìm được lối đi riêng cho bản thân.

II. CÁC BÀI TÓAN CHỌN LỌC:

Bài 1: (Tổng quát của bài 3, Olympic 30/4/2005).

Cho hai dãy $\{a_n\},\{b_n\}$ như sau: $a < b$ cho trước

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad b_1 = \sqrt{a.a_1}$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \; ; \; b_2 = \sqrt{a_2.b_1}$$

...

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \; ; \; b_n = \sqrt{a_n.b_{n-1}}$$

a.Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

b.Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Nhận xét:

Bài tóan đã giấu đi tính lượng giác rất khéo. Ta hãy quan sát thật kĩ, do $a< b$ nên ta có thể đặt $\cos\alpha = \frac{a}{b}$ hoặc $\sin\alpha = \frac{a}{b}$. Vậy nên chọn là sin hay cos?

Ta thử đặt:

- Nếu $\sin\alpha = \frac{a}{b}$: $a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b(\sin\alpha+1)}{2}$

$$b_1 = \sqrt{a_1.b} = \sqrt{\frac{b^2}{2}\left((\sin\alpha+1).\sin\alpha\right)}$$

Ta sẽ không thể giải tiếp. Vậy ta sẽ không đặt với sin.

- Nếu $\cos\alpha = \frac{a}{b}$: $a_1 = \frac{b(\cos\alpha+1)}{2} = b\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$b_1 = \sqrt{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = b\cos\frac{\alpha}{2}$$! Vậy ta tiến hành giải.

Giải:

a.Đặt $\cos\alpha = \frac{a}{b}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $\begin{cases} a_1 = b\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ b_1 = b\cos\frac{\alpha}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = b\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right) = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2} \\ b_2 = \sqrt{a_2b_1} = \sqrt{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2} \end{cases}$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng có:

$$\begin{cases} a_n = b.\cos\frac{\alpha}{2}...\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos^2\frac{\alpha}{2^n} = \dfrac{b.\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2^n}.}{2^n.\sin\frac{\alpha}{2^n}} \\ b_n = b.\cos\frac{\alpha}{2}...\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos^2\frac{\alpha}{2^n} = \dfrac{b.\sin\alpha.}{2^n.\sin\frac{\alpha}{2^n}} \end{cases}$$

Vậy: $b_n = \dfrac{b}{2^n.\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}.\dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$$

b.Ta cũng có: $a_n = b_n.\cos\frac{\alpha}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}.\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$$

Chú ý: Với *a=2005, b=2006* ta sẽ có bài 3 Olympic 30/4/2005.

Bài 2: (Kỳ thi quốc gia lần XXXI-1993)

Cho $a_0 = 2, b_0 = 1$. Lập hai dãy số $\{a_n\},\{b_n\}$ với $n = 0, 1, 2, ...$ theo quy tắc sau: $a_{n+1} = \frac{2a_n.b_n}{a_n+b_n}; b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}.b_n}$

Chứng minh rằng các dãy $\{a_n\},\{b_n\}$ có cùng một giới hạn khi $n\to\infty$. Tìm giới hạn đó.

Nhận xét:

Dễ thấy dãy $\{a_n\}$ là dãy trung bình điều hòa, $\{b_n\}$ là dãy tựa trung bình nhân. Để chứng minh hai dãy cùng giới hạn thì nhất thiết phải tìm công thức tổng quát.

Trong trường hợp này, lượng giác hóa là biện pháp tối ưu nhất.

Giải:

Ta chú ý: $a_0 = 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$, $b_0 = 1$

$$a_1 = \frac{2a_0b_0}{a_0 + b_0} = \frac{2}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{3} + 1} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}$$

$$b_1 = \sqrt{a_1b_0} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh rằng:

$$a_n = \left(\cos\frac{\pi}{2.3}.\cos\frac{\pi}{2^2.3}...\cos\frac{\pi}{2^{n-1}.3}.\cos\frac{\pi}{2^n.3}\right)^{-1}$$

$$b_n = \left(\cos\frac{\pi}{2.3}.\cos\frac{\pi}{2^2.3}...\cos\frac{\pi}{2^{n-1}.3}.\cos\frac{\pi}{2^n.3}\right)^{-1} \forall n \geq 1$$

Lưu ý rằng: $\cos\frac{\pi}{2.3}.\cos\frac{\pi}{2^2.3}...\cos\frac{\pi}{2^{n-1}.3}.\cos\frac{\pi}{2^n.3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.3}} \forall n \geq 1$

Ta có: $a_n = \frac{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.3}}{\sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{2^n.3}}(1); b_n = \frac{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.3}}{\sin\frac{\pi}{3}}(2)$

Từ (1), (2) tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Ngòai ra:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.3}}{\sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{2^n.3}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^n.3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Vậy hai dãy {an},{bn} có cùng giới hạn chung là $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

Bài 3: (Kỳ thi quốc gia lần XXVIII-1990)

Cho dãy số {xn}, $n \in \mathbb{N}$, $|x_1| < 1$ được xác định bởi hệ thức:

$$x_{n+1} = \frac{-x_n + \sqrt{3 - 3x_n^2}}{2}$$

a.Có cần thêm diều kiện gì đối với x_1 để dãy tòan số dương.

b.Dãy số này có tuần hòan không? Tại sao?

Nhận xét:

Ta quan sát rằng $\sqrt{3-3x_n^2}$ cho ta cảm giác về dạng $1-\cos^2 x$,hơn nữa $|x_1|<1$, điều đó càng củng cố suy nghĩ về lượng giác hóa bài tóan. Ta tiến hành giải.

Giải:

a. Để $x_n > 0$, trước hết ta phải có $x_1 > 0$ và $x_2 < 0$.

Nhưng $x_2 > 0$ tức là $\sqrt{3-3x_n^2} > x_1$ hay $x_1^2 < \frac{3}{4}$.

Suy ra: $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ngược lại, nếu $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì tồn tại $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{3}\right)$ sao cho $\sin\alpha_1 = x_1$. Khi đó:

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right), 0 < \frac{\pi}{3}-\alpha < \frac{\pi}{3}$$

Ta lại có: $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \sin\alpha$

Từ đó suy ra: $x_1 = x_3 = ... = \sin\alpha > 0$

Vậy điều kiện là: $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Xét hai trường hợp đối với x_1:

- Trường hợp $x_1 \ge 0$:

- Nếu $x_2 \ge 0$ thì tương tự phần a ta có: $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$ và

$x_1 = x_3 = ...; x_2 = x_4 = ...$

- Nếu $x_2 < 0$ thì $x_3 > 0$ và cũng có $x_3 = x_1$

Thật vậy từ: $x_2 = \frac{-x_1 + \sqrt{3-3x_1^2}}{2}$

Suy ra: $\sqrt{3-3x_1^2} = 2x_2 + x_1\ (1) \Rightarrow 3 - 3x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2\ (2)$

Do (1) mà: $2x_1 + x_2 > 0$ .Suy ra:

$2x_1 + x_2 = x_1 + (x_1 + x_2) > x_1 - x_2 > 0\ (x_1 \ge 0, x_2 < 0)$

Vì thế từ (2) ta có: $\sqrt{3-3x_2^2} = 2x_1 + x_2$

Suy ra: $x_1 = \frac{-x_2 + \sqrt{3-3x_2^2}}{2} = x_3$

Tương tự: $x_2 = x_4 ...$

Vậy ta có: $\{x_n\}$ là dãy tuần hòan.

- Trường hợp $x_1 < 0$.

Khi đó $x_2 > 0$ và theo trường hợp 1 suy ra x_n kể từ hạng thứ hai trở đi là dãy tuần hòan.

Bài 4: Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi: $u_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Giải:

Đây là bài tóan đơn giản và quen thuộc. Ta sẽ chứng minh:

$$v_n = \sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}(1).$$

Rõ ràng với n = 1 thì (1) hiển nhiên đúng.

Giả sử đúng khi n = k, nghĩa là: $v_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Xét: $$v_{k+1} = \sqrt{2+v_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

Vậy (1) đúng khi n = k+1, suy ra (1) đúng với mọi n.

Ta có: $u_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$

$$= 2^{n+1}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}.2^{n+2}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

Từ đó ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}.2^{n+2}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$$

Bài 5: (Olympic 30/4/2003)

Cho dãy $\{u_n\}$ định bởi: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+\sqrt{2}-1}{1+\left(1-\sqrt{2}\right)u_n} \end{cases}$

Tính u_{2003}

Nhận xét:

Bài này giải theo hai hướng:

- *Hướng 1 (hướng cơ bản):*

Ta đưa về dạng: $u_{n+1} = \dfrac{au_n+b}{cu_u+d}$

Sau đó thực hiên tuyến tính hóa, rồi dùng phương trình sai phân tính công thức tổng quát.

- *Hướng 2:*

Ta chú ý quan sát công thức xác định dãy giống với công thức lượng giác nào mà ta đã biết?

Câu trả lời là : $tg\left(a+b\right)=\dfrac{tga+tgb}{1-tga.tgb}$

Vậy ta sẽ giải theo cách 2.

Giải:

Ta có: $\begin{cases} u_1=\sqrt{3} \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+\sqrt{2}-1}{1+\left(1-\sqrt{2}\right)u_n}\ (*) \end{cases}$

Ta đã biết: $tg\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

$$1=tg\frac{\pi}{4}=tg\left(2.\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\frac{\pi}{8}}\quad\Rightarrow tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$$

Từ (*) ta có: $u_{n+1}=\dfrac{u_n+tg\frac{\pi}{8}}{1-u_n tg\frac{\pi}{8}}(1)$

Theo nguyên lý quy nạp, từ (1) và $u_1=\sqrt{3}$ .suy ra

Suy ra: $u_n=tg\left[\dfrac{\pi}{3}+\left(n-1\right)\dfrac{\pi}{8}\right]$

Vậy: $u_{2003}=tg\left(\dfrac{\pi}{3}+2002\dfrac{\pi}{8}\right)=tg\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\left(2+\sqrt{3}\right)$

Bài 6: Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi: $\begin{cases} u_1=2;u_2=8 \\ u_n=4u_{n-1}-u_{n-2} \end{cases}$

và $S_n=\sum_{i=1}^{n}arc\cot g\left(u_i^2\right)$

Tìm $\lim_{n\to\infty}S_n$

Nhận xét:

Đây là bài tóan rất khó vì sử dụng kiến thức về dãy Lucas và hàm arctg và arccotg.

Ta cần biết:

$$arctg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)=arctgx+arctgy$$

$$arccotg\left(\frac{1+xy}{y-x}\right)=arc\cot g\left(x\right)-arc\cot g\left(y\right)$$

Giải:

-Ta sẽ chứng minh: $u_i^2 - u_{n+1}.u_{n-1} = 4\left(\forall n \geq 2\right)$

Thật vậy: $u_n\left(4u_{n-1}\right) = u_{n-1}\left(4u_n\right)$

$\Rightarrow u_n\left(u_n + u_{n-2}\right) = u_{n-1}\left(u_{n+1} + u_{n-1}\right) \Rightarrow u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = u_{n-1}^2 u_n u_{n-2} = ... = u_2^2 - u_3.u_1 = 4$

Ta có:

$$arc\cot gu_n^2 = arccotg\left[u_n\left(\frac{4u_n}{4}\right)\right] = arccotg\left[\frac{u_n\left(u_{n+1} + u_{n-1}\right)}{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}}\right]$$

$$= arccotg\left[\frac{\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}} + 1}{\frac{u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}}\right] = arccotg\frac{u_{n+1}}{u_n} - arccotg\frac{u_n}{u_{n-1}}$$

Suy ra: $\sum_{i=1}^{n} arcotg\left(u_i^2\right) = arcotg\left(u_i^2\right) + \sum_{i=2}^{n} arcotg\left(u_i^2\right)$

Ta sẽ chứng minh rằng $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ có giới hạn bởi vì $0 < u_{n-1} < u_n \Rightarrow \frac{u_{n-1}}{u_n} < 1$

Mặt khác $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ là dãy giảm, suy ra $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

Mà: $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$

$$\Rightarrow 1 = 4\frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_n} \Rightarrow 1 = 4\frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_n}$$

Nếu đặt: $x = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n-1}}{u_n}$

$$\Rightarrow 1 = 4x - x^2 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 + \sqrt{3}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = arc\cot g\left(2 + \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{12}$

Bài 7: (Bài tóan đề nghị Olympic 30/4/2004)

Cho dãy $\{u_n\}$ như sau: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{e^{\sqrt{3}}} \\ u_2 = \sqrt{e} \\ u_{n+1}u_{n-1} = u_n^{\sqrt{3}}\left(\forall n \geq 2\right) \end{cases}$

a.Chứng minh rằng: $\frac{1}{e} \leq u_n \leq e; \forall n \in \square^+$

b.Lậpdãy số $\{v_n\}$ biết: $v_n = \left(u_1.u_2...u_n\right)^{\frac{1}{n}}$. Tìm $\lim_{n\to\infty} v_n$

Nhận xét:

Trước hết ta hãy trả lời cho câu hỏi: Có thể tiến hành lượng giác hóa cho bài tóan được hay không? Để trả lời, ta cần quan sát thật kĩ điều kiện:

$$\sqrt{e^{\sqrt{3}}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^{\cos\frac{\pi}{3}}$$

Vậy ta sẽ tiến hành giải.

Giải:

a. Ta chứng minh $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$

Thật vậy $u_1 > 0, u_2 > 0$ .Giả sử $u_n > 0, \forall n \geq k$.

Ta có $u_{k+1} = \dfrac{u_k^{\sqrt{3}}}{u_{k-1}} > 0$ .Vậy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$

Ta lại có: $\sqrt{e^{\sqrt{3}}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\cos\frac{\pi}{6}}$

$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^{\cos\frac{2\pi}{6}}$

Giả sử $u_n = e^{\cos\frac{n\pi}{6}}, \forall n \leq k$

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\sqrt{3}}}{u_{n-1}} = \dfrac{e^{\sqrt{e}\cos\frac{n\pi}{6}}}{e^{\cos\frac{(n-1)\pi}{6}}} = e^{\cos\frac{(n+1)\pi}{6}}$

Vậy $\quad u_n = e^{\cos\frac{n\pi}{6}}, \forall n \in \mathbb{N}^+$

Ta lại có $\dfrac{1}{e} \leq e^{\cos\frac{n\pi}{6}} \leq c$ và hàm là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ đpcm

b. Ta có: $v_n = \sqrt[n]{u_1.u_2...u_n} = e^{\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+...+\cos\frac{n\pi}{6}\right)}$

Đến đây áp dụng công thức tính tổng của bài 1, chương I, ta có:

$$v_n = e^{\frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{12}}\left(\sin\frac{(2n+1)\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)} = e^{\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{12}}.\cos\frac{(n+1)\pi}{12}.\sin\frac{n\pi}{12}}$$

Mặt khác ta có: $\dfrac{-1}{n\sin\frac{\pi}{12}} \leq \dfrac{\cos\frac{(n+1)\pi}{12}.\sin\frac{n\pi}{12}}{n.\sin\frac{\pi}{12}} \leq \dfrac{1}{n\sin\frac{\pi}{12}}$

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{n\sin\frac{\pi}{12}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\sin\frac{\pi}{12}} = 0$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = e^0 = 1$

Bài 8: (Tạp chí tóan học và tuổi trẻ năm 2005)

Dãy {h$_n$} được cho bởi điều kiện $h_1 = \dfrac{1}{2}$

và $h_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}; \forall n \geq 1$

Đặt $S_n = \sum_{i=1}^{n} h_i; \forall n \in \mathbb{N}$. Hãy chứng minh rằng: $\lim_{n\to\infty} S_n < 1,03$

Nhận xét:

Bài tóan này nếu không lượng giác hóa thì sẽ đi vào thế bế tắc. Thật vậy, vì phương pháp sai phân không thể giải quyết bài tóan có nhiều căn như vậy.

Bây giờ ta chú ý đại lượng $\sqrt{1-h_n^2}$, điều này cho ta một cảm giác gần giống công thức $\sqrt{1-\sin^2 x}$ hay $\sqrt{1-cos^2 x}$! Vậy ta tiến hành giải.

Giải:

Ta có: $h_1 = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{3.2} \Rightarrow h_2 = \sin\dfrac{\pi}{3.2}$

Ta sẽ chứng minh rằng: $h_n = \sin\dfrac{\pi}{3.2^n}$

iả sử rằng: $\sin h_k = \sin\dfrac{\pi}{3.2^k}$

$$h_{k+1} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\sin\dfrac{\pi}{3.2^k}}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{3.2^k}}{2}} = \sin\dfrac{\pi}{3.2^n}$$

Mặt khác: $\sin x < x; \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Nên: $S_n = \sum_{i=1}^{n} h_i = \dfrac{1}{2} + \sin\dfrac{\pi}{3.2^n} + ... + \sin\dfrac{\pi}{3.2^n} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{3.2^2} + ... + \dfrac{\pi}{3.2^n}$

$$< \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{3.2}$$

Do S$_n$ là dãy tăng nên $\lim_{n\to\infty} S_n \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{3.2} < 1,03$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 9: Cho dãy {u$_n$} và {v$_n$} như sau:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+v_n^2}-1}{v_n} \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $2^{n+2}.u_n < \pi < 2^{n+2}.v_n$

Nhận xét:

Với dãy {un} ta thấy có biểu thức $\sqrt{1-u_n^2}$, ta nghĩ ngay đến lượng giác hóa bằng sin, cos.

Còn dãy {vn}? Câu trả lời nằm ở biểu thức $\sqrt{1+v_n^2}$ và $v_0=1$, cho ta suy nghĩ nên sử dụng hàm tg và cotg.

Giải:

Ta có: $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{2^2}, u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}=\sin\frac{\pi}{2^3}$

Vậy: $u_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{2+1}}}=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$

Tương tự: $v_0=1=tg\frac{\pi}{2^2}$

$$v_n=\frac{\sqrt{1+tg^2\frac{\pi}{2^{n+1}}}}{tg\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}-1}{tg\frac{\pi}{2^{n+1}}}=tg\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

Bằng cách xét: $f(x)=\sin x-x, g(x)=tgx-x; x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta suy ra: $\sin x<x<tgx; \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó: $\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}<\frac{\pi}{2^{n+2}}<tg\frac{\pi}{2^{n+2}}\Leftrightarrow 2^{k+2}.u_n<\pi<2^{k+2}.v_n\Rightarrow$ đpcm

Bài 10: (Kỳ thi quốc gia lầnXXV-1987)

Cho cấp số cộng gồm 1987 số hạng với số hạng đầu $u_1=\frac{\pi}{1987}$ và công sai là $\frac{\pi}{3974}$

Tính giá trị: $S=\sum\cos(\pm u_1\pm u_2...\pm u_{1987})$ ở đó tổng $\sum$ chứa tất cả các số hạng ứng với tất cả các cách khác nhau có thể được để lấy dấu cộng hay trừ trước các số $u_1, u_2, ..., u_{1987}$

Nhận xét:

Ta thấy rằng số 1987 là cố ý cho trùng với năm thi. Điều đó chứng tỏ có thể tổng quát hóa bài toán. Đôi khi việc này khiến bài toán dễ dàng hơn và không còn che giấu như bài toán nguyên thủy.

Giải:

Ta sẽ chứng minh từ bài tóan tổng quát hơn. Bài tóan thực chất là:

$\forall\{u_j\}_1^n$ (kí hiệu dãy) $\sum\cos(\pm u_1\pm u_2...\pm u_{1987})=2^n.\prod_{j=1}^{n}\cos u_j$

Ta chứng minh bằng quy nạp:

Với n = 1:

$\cos u_1 + \cos(-u_1) = 2\cos u_1$

Với n = 2:

$\cos(u_1 + u_2) + \cos(u_1 - u_2) + \cos(u_2 - u_1) + \cos(-u_1 - u_2)$

$= 2\cos u_1.\cos u_2 + 2\cos(-u_1).\cos u_2 = 4\cos u_1.\cos u_2$

Giả sử bài tóan đúng với n, khi đó:

$$2^{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}\cos u_j = 2\left(2^n.\prod_{j=1}^{n}\cos u_j\right)\cos u_{n+1}$$

$$= 2\left[\sum\cos(\pm u_1 \pm u_2 ... \pm u_{1987})\right]\cos u_{n+1}$$

$$= \sum\cos(\pm u_1 \pm u_2 ... \pm u_{1987})$$

Trở lại bài tóan ta có: $S = 2^{1987}\prod_{j=1}^{1987}\cos u_j$

Do $\{u_j\}$ là cấp số cộng nên:

$$u_{1987} = u_1 + 1985d = \frac{\pi}{1987} + \frac{1985\pi}{2.1987} = \frac{\pi}{2}$$

Bài 11: (Kì thi quốc gia lần XXVII - 1984)

Cho dãy số u_1, u_2... như sau: $u_1=1$, $u_2=2$, $u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$.

Dãy số v_1, v_2...được theo quy luật: $v_n = \sum_{i=1}^{n} arc\cot g u_i$

Hãy tìm $\lim_{n\to\infty} v_n$

Giải:

Trước hết nhận xét rằng dãy u_1, u_2... chính là các số hạng lẻ của dãy Fibonaci:1,1,2, 3, 5,...Gọi dãy đó là t_1, t_2, t_3, t_4.

Ta có: $t_1 = t_2 = 1$ và $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \ (n \geq 1)$

a. Trước hết ta chứng minh rằng:

$$arc\cot g t_2 - arc\cot g t_3 - arc\cot g t_5 - ... - arc\cot g t_{2n+1} = arc\cot g t_{2n+2} \ (1)$$

Thật vậy theo công thức cộng cung ta có:

$arc\cot g t_{2n} - arc\cot g t_{2n+1} = arc\cot g \dfrac{t_{2n}t_{2n+1} + 1}{t_{2n+1} - t_{2n}} = arc\cot g \dfrac{t_{2n}t_{2n+1}}{t_{2n-1}}$ Chú ý là:

$t_{m+1}.t_{m+2} - t_m.t_{m+3} = (-1)^m$

Nếu đặt $m = 2n - 1$ thì $t_{2n}.t_{2n+1} - t_{2n-1}.t_{2n+2} = -1$

Từ đó: $t_{2n}.t_{2n+1} + 1 = t_{2n-1}.t_{2n+2}$

Suy ra: $arc\cot g t_{2n} - arc\cot g t_{2n+1} = arc\cot g t_{2n+2} \ (2)$

Trong (2) lần lượt thay $n = 1, 2, 3, ...$ rồi cộng lại sẽ được (1).

b. Từ (1) suy ra:

$$arc\cot gu_i - \sum_{i=2}^{n} arc\cot gu_i = arc\cot gt_{2n+2}$$

Do: $\lim\limits_{n\to\infty} t_{2n+2} = +\infty$ nên $\lim\ arc\cot gt_{2n+2} = 0$

Từ đó suy ra $\lim\left(\sum_{i=2}^{n} arc\cot gu_i\right) = arc\cot gu_i = \dfrac{\pi}{4}$

Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\left(\sum_{i=2}^{n} arc\cot gu_i\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

PHẦN III: LƯỢNG GIÁC ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1: MỐI QUAN HỆ GIỮA ĐẠI SỐ VÀ LƯỢNG GIÁC

Lượng giác và đại số là hai bộ môn của toán học, nhìn bề ngoài thì có vẻ như là không liên quan đến nhau nhưng thực sự là chúng có mối liên hệ mật thiết với nhau. Một số bài toán lượng giác nếu giải theo những biến đổi lượng giác thông thường để đưa về phương trình cơ bản thì rất mất thời gian và có thể là sẽ giải không được. Trong khi đó nếu giải bằng phương pháp đại số thì nhanh hơn và trong đại số cũng vậy,cũng nhiều lúc cần phải nhờ đến lượng giác. Ta sẽ xét một số bài toán sau để nhìn thấy được mối liên hệ giữa lượng giác và đại số.

BÀI 1: PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: Giải phương trình

a) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$.

b) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right] = 2+\sqrt{1-x^2}$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Ta có phương trình:

$$\sqrt{1+\cos t} = \sin t\left(1+2\cos t\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\left[1+2\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{t}{2}-4\sin^3\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3.\frac{t}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

Giải (1), kết hợp với điều kiện $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ta được

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

b) Đặt $x = \cos t$ với $0 \leq t \leq \pi$.

Ta có phương trình:

$$\sqrt{1+\sin t}\left[\sqrt{(1+\cos t)^3}-\sqrt{(1-\cos t)^3}\right] = 2+\sqrt{1-\cos^2 t}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\left[\cos^3\frac{t}{2}-\sin^3\frac{t}{2}\right]2\sqrt{2}=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)(2+\sin t)\sqrt{2}=2+\sin t$$

$$\Leftrightarrow (2+\sin t)\left[\sqrt{2}\text{cost-1}\right]=0 \qquad (2)$$

Vì $2+\sin t>0$ nên phương trình (2) có nghiệm là

$\text{cost}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ tức là $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Nhận xét</u>: với những bài toán ta thấy điều kiện để phương trình có nghĩa là $x\in[-1,1]$ thì ta nên đặt $x=\sin t$ hoặc $x=c\text{ost}$ để được phương trình đơn giản hơn.

Bài 2: Giải phương trình

2(tgx-sinx)+3(cotgx-cosx)+5=0

Lời giải

Điều kiện sinx.cosx ≠ 0 ⇔ $x\neq\frac{k\pi}{2}$ phương trình viết thành

$$2\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)+3\cos x\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)+5=0$$

$$2\sin^2 x(1-\cos x)+3\cos^2 x(1-\sin x)+5\sin x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x[\sin x(1-\cos x)+\cos x]+3\cos x[\cos x(1-\sin x)+\sin x]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left[\sin x+\cos x-\sin x.\cos x\right]+3\cos x\left[\cos x+\sin x-\sin x.\cos x\right]=0$$

$$(2\sin x+3\cos x)(\sin x+\cos x-\sin x.\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}2\sin x+3\cos x=0 & (a)\\ \sin x+\cos x-\sin x.\cos x=0 & (b)\end{array}\right.$$

Phương trình (a) có họ nghiệm thỏa $tgx=-\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow x=arctg\left(-\frac{3}{2}\right)+k\pi$$

Để giải (b) đặt t=sinx+cosx $\Rightarrow t^2=1+2\sin x.\cos x$ nên(b) viết thành

$$t-\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}t=1+\sqrt{2} & (loại)\\ t=1-\sqrt{2} & \end{array}\right.$$

Suy ra $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{2})=1-\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+m\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+m\pi \end{array}\right.$$

Bài 3: Tìm những nghiệm của phương trình

$32x\left(x^2-1\right)\left(2x^2-1\right)^2=1-\dfrac{1}{x}$ nằm trong khoảng $(0;1)$

Lời giải

Điều kiện $x\in(0;1)$

Đặt $x=cost$ với $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có phương trình

$$32cost\left(\cos^2 t-1\right)\left(2\cos^2 t-1\right)^2=1-\frac{1}{cost}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 2t\cos^2 2t=1-cost$$

$$\Leftrightarrow cost=1\text{-}2\sin^2 4t$$

$$\Leftrightarrow cost=\cos 8t \qquad (1)$$

Giải phương trình (1) kết hợp với điều kiện $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ ta được các nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2\pi}{7} \\ t=\dfrac{2\pi}{9} \\ t=\dfrac{4\pi}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\cos\dfrac{2\pi}{7} \\ x=\cos\dfrac{2\pi}{9} \\ x=\cos\dfrac{4\pi}{9} \end{array}\right.$$

Bài 4: Giải phương trình

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}} \quad \text{với} |x|\le 1$$

Lời giải

Đặt $x=cost\ (0<t<\pi)$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-cost}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-cost}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-cost}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}$$

(do $0<\dfrac{t}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin\dfrac{t}{2}>0$)

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sin\frac{t}{2}} \qquad \Leftrightarrow 2\sqrt{6}\sin^2\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}-\sqrt{6}=0$$

Đặt $X = xin\frac{t}{2}\left(0 < X < 1\right)$

Ta có phương trình bậc hai

$$2\sqrt{6}X^2 + X - \sqrt{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} \\ X_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{array}\right.$$

Vì $\left(0 < X < 1\right)$ nên: $\sin\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Và $\quad x = c\text{ost}=1\text{-}2\sin^2\frac{\text{t}}{2} = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $x = \frac{1}{4}$

Bài 5: Giải phương trình

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \qquad \left(0 < a < 1\right)$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x + 1 = \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$$

Chia hai vế phương trình cho $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x \neq 0$ ta được

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1 \qquad (1)$$

Đặt $a = tg\frac{t}{2}\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\left(1\right)$ trở thành:

$$\left(\frac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}\right)^x + \left(\frac{2tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}\right)^x = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(c\text{ost}\right)^x + \left(\sin t\right)^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 2$

Nhận xét:biến đổi biểu thức đại số thành dạng công thức lượng giác cộng với diều kiện bài toán để ta có những cách đặt cho thích hợp.

Bài 6: Giải phương trình

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x} + \sin\frac{\pi}{6} = \cos 2x + \log_4\left(4\cos^3 2x - \cos 6x - 1\right)$$

Lời giải

Phương trình có thể viết lại:

$$2^{\cos 2x - 1} + \frac{1}{2} = \cos 2x + \log_4\left(3\cos 2x - 1\right) \quad (1)$$

Điều kiện: $\cos 2x > \frac{1}{3}$. Đặt $y = \cos 2x$, điều kiện $\frac{1}{3} < y \le 1$

Phương trình (1) trở thành

$$2^{y-1} + \frac{1}{2} = y + \log_4\left(3y - 1\right) \Leftrightarrow 2^y + 1 = 2y + \log_2\left(3y - 1\right)$$

Đặt $t = \log_2\left(3y - 1\right) \Leftrightarrow 2^t = 3y - 1$. Điều kiện: $\frac{1}{3} < y \le 1 \Rightarrow t \le 1$

Ta có hệ $\begin{cases} 2^y = 2y + t - 1 \\ 2^t = 3y - 1 \end{cases}$

Trừ theo từng vế ta có: $2^y + y = 2^t + t$ (2)

Xét hàm $f(z) = 2^z + z$ phương trình (2) có dạng $f(y) = f(t)$ (3)

Rõ ràng $f(z)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra (3) $\Leftrightarrow y = t$

Thay vào hệ phương trình cuối ta có:

$$2^t = 3t - 1 \Leftrightarrow 2^t - 3t + 1 = 0 \quad (4)$$

Xét hàm $g(t) = 2^t - 3t + 1$. Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$g'(t) = 2^t \ln 2 - 3, \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 = \log_2 3 - \log_2(\ln 2).$$

Phương trình (4) không có quá hai nghiệm

Lại thấy $g(1) = g(3) = 0$.

Suy ra phương trình (4) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$

$t = 3$ (loại do $t \le 1$)

Vậy $t = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 7: Giải phương trình

$$x^3 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)^3} = x\sqrt{2\left(1 - x^2\right)}$$

Lời giải

Điều kiện: $-1 < x < 1$

Đặt $\begin{cases} x = \cos a \\ a \in D = (0;\pi) \end{cases}$ (1)

$\Rightarrow 1 - x^2 = \sin^2 a, \sin a > 0$

Phương trình đầu trở thành $\cos^3 a + \sin^3 a = \sqrt{2}\cos a\sin a$. (2)

Đặt tiếp $t = \sin a + \cos a = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$ (3), điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Suy ra:

$$t^2 = 1 + 2\cos a\sin a \Rightarrow \cos a\sin a = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$t^3 = \cos^3 a + \sin^3 a + 3t\cos a\sin a \Rightarrow t^3 = \cos^3 a + \sin^3 a + 3t\,\frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 a + \sin^3 a = \frac{3t - t^3}{2}$$

Phương trình (2) trở thành $\frac{3t - t^3}{2} = \frac{t^2 - 1}{2}\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left(t - \sqrt{2}\right)\left(t + \sqrt{2} + 1\right)\left(t + \sqrt{2} - 1\right) = 0 \quad (4)$$

Do $|t| \le \sqrt{2}$ nên (12) $\Leftrightarrow \left(t - \sqrt{2}\right)\left(t + \sqrt{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$

Với $t = \sqrt{2}$ thay vào (3) ta có:

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 1 \Leftrightarrow a - \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Thay vào (1) ta có $x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Với $t = 1 - \sqrt{2}$ thay vào (1) ta có:

$$\sin a\cos a = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x\sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^4 - x^2 + 3 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 = \frac{1 + \sqrt{8\sqrt{2} - 11}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2\left(1 + \sqrt{8\sqrt{2} - 11}\right)}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2\left(1 + \sqrt{8\sqrt{2} - 11}\right)}}{2}\right\}$

Bài 8: Giải bất phương trình

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

Lời giải

Từ vế trái của (1) ta thấy x phải thỏa mãn cácđiều kiện $x>0$ và $x^2-1>0$. Kết hợp hai điều kiện lại sẽ là $x>1$, suy ra $0<\frac{1}{x}<1$.

Đặt $\frac{1}{x}=\cos t$ với $0<t<\frac{\pi}{2}$, bất phương trình (1) trở thành

$$\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}>\frac{3\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow 2\left(\sin t+\cos t\right)>3\sqrt{5}\sin t\cos t$$

Lại đặt $u=\sin t+\cos t$ ta được: $2u>\frac{3\sqrt{5}}{2}\left(u^2-1\right)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5}u^2-4u-3\sqrt{5}<0\Leftrightarrow \frac{-\sqrt{5}}{3}<u<\frac{3}{\sqrt{5}} \qquad (2)$$

Vì $u=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ nên từ (2) ta có

$$\frac{-\sqrt{10}}{6}<\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{3}{\sqrt{10}} \qquad (3).$$

Mặt khác từ điều kiện $0<t<\frac{\pi}{2}$

Ta có $-\frac{\pi}{4}<t-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$ và $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)<1$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{3}{\sqrt{10}}$ (5)

Đặt $\varphi=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

Bất phương trình (5) tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\varphi<t-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}\\ \frac{-\pi}{4}<t-\frac{\pi}{4}<-\varphi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi+\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}\\ 0<t<\frac{\pi}{4}-\varphi\end{array}\right.$$

Do tính nghịch biến của hàm cosin trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Nên ta có:

$$\left[\begin{array}{l}0<\cos t<\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)<\cos t<1\end{array}\right.$$

Trong đó:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi+\sin\frac{\pi}{4}\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Từ $0 < cost < \frac{1}{\sqrt{5}}$ suy ra $x = \frac{1}{cost} > \sqrt{5}$

Từ $\frac{2\sqrt{5}}{5} < cost < 1$ suy ra $1 < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$

Tóm lại, nghiệm của phương trình (1) là: $\left(1;\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\sqrt{5};+\infty\right)$

Bài 9: Với những giá trị nào của tham số a bất phương trình sau đây có nghiệm

$$\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} \le 2 \qquad (1)$$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0, a + \sqrt{x} \ge 0, a - \sqrt{x} \ge 0$, suy ra $a \ge \sqrt{x} \ge 0$

Khi $a = 0$ ta có: $\sqrt{\sqrt{x}} + \sqrt{-\sqrt{x}} \le 2 \Leftrightarrow x = 0$

Khi $a > 0$, từ $0 \le \sqrt{x} \le a$ suy ra $0 \le \frac{\sqrt{x}}{a} \le 1$

Đặt $\sqrt{x} = a\cos t$ với $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Khi đó

(1) $\Rightarrow \sqrt{a(1+\cos t)} + \sqrt{a(1-\cos t)} \le 2$

$\Rightarrow \sqrt{2a}\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right) \le 2$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{\sqrt{a}}$ (2)

Bởi vì: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$,suy ra $-\frac{\pi}{4} \le \frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \le 0$

Do đó: $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$.

Khi đó bất phương trình (2) có nghiệm nếu $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{1}{\sqrt{a}}$, tức là $0 < a \le 2$

Tổng hợp các kết quả ta thấy điều kiện để bất phương trình (1) có nghiệm là: $0 \le a \le 2$

Bài 10: Giải và biện luận phương trình theo tham số m

$$2\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x} = \sqrt{m - x + \sqrt{x(m+x)}} \qquad (1)$$

Lời giả

Điều kiện $\begin{cases} m + x \ge 0 \\ m - x \ge 0 \\ x(m+x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \le x \le m \\ x \ge 0,\ m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le m$ (2)

1) Khi $m = 0$:(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} - x\sqrt{-x} = \sqrt{-x + \sqrt{x^2}} \Leftrightarrow x = 0$

2) Khi $m > 0 : (2) \Leftrightarrow 0 \le \frac{x}{m} \le 1$

Đặt $x = m\cos\alpha$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (3)

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{m(1+\cos\alpha)} - \sqrt{m(1-\cos\alpha)}$$
$$= \sqrt{m(1-\cos\alpha) + \sqrt{m^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha} = \sqrt{(1-\cos\alpha) + \sqrt{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}$$
$$\Leftrightarrow 4(1+\cos\alpha) - 4\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \sqrt{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}$$
$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}\right) = \sqrt{\cos\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 32 - \cos\alpha = 32\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 1025\cos^2\alpha - 64\cos\alpha = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \cos\alpha = \frac{64}{1025} \end{array}\right.$$

Lúc đó (3) cho nghiệm

$$x = 0 \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{64a}{1025}$$

Kết luận:

Nếu $m \ge 0$ thì (1) có nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = \frac{64a}{1025}$

Nếu $m < 0$ thì (1) vô nghiệm.

Bài 11: Giải phương trình

$$3\cos 4x + 5 = 8\left(\sin^{10}x + \cos^{10}x\right)$$

Lời giải

Đặt $u = \sin^2 x$, $v = \cos^2 x$

$$\Rightarrow \cos 2x = u - v \ , \ u + v = 1$$

Ta có:

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = (u-v)^2 - 1$$
$$\sin^{10}x + \cos^{10}x = u^5 + v^5$$
$$= (u+v).\left(u^4 - u^3.v + u^2.v^2 - u.v^3 + v^4\right)$$
$$= \left(u^4 + v^4\right) - uv\left(u^2 + v^2\right) + u^2v^2$$
$$= \left(u^2 + v^2\right)^2 - uv\left(u^2 + v^2\right) - u^2v^2$$
$$= (1 - 2uv)^2 - uv(1 - 2uv) - u^2v^2$$

$= 5u^2v^2 - 5uv + 1$

Vậy phương trình cần giải tương đương với

$$3\left((u-v)^2 - 1\right) + 5 = 8\left(5u^2v^2 - 5uv + 1\right)$$

$$5 - 12uv = 8\left(5u^2v^2 - 5uv + 1\right)$$

$$40(uv)^2 - 28(uv) + 3 = 0$$

Đặt $uv = y$ ta được phương trình bbạc hai

$$40y^2 - 28y + 3 = 0$$

$$y_1 = \frac{7+\sqrt{19}}{20}$$

$$y_2 = \frac{7-\sqrt{19}}{20}$$

Vì $0 \le y_1, y_2 \le 1$ do đó uv có thể nhận một trong hai giá trị trên.

Với $y = \dfrac{7+\sqrt{19}}{20}$ ta được

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{7+\sqrt{19}}{20}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x - \sin^2 + \frac{7+\sqrt{19}}{20} = 0$$

Đây là phương trình trùng phương đã biết cách giải. Tương tự cho trường hợp còn lại.

Nhận xét: đối những phương trình bậc cao ta nên dùng công thức hạ bậc để được những phương trình cơ bản đã biết cách giải.

Bài 12: Giải và biện luận phương trình sau

$$\sqrt[3]{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt[3]{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = m\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\frac{\cos 2x}{2}}$$

Lời giải

Với mọi giá trị của m thì $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt[3]{\dfrac{\cos^2 x}{2}}$ ta được:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\text{sinx+cosx}}{\text{cosx}}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\text{sinx-cosx}}{\text{cosx}}\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = m\sqrt[3]{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+tgx)^2} + \sqrt[3]{(1-tgx)^2} - \sqrt[3]{1-tg^2 x} = m\sqrt[3]{2}$$

Đặt $u = \sqrt[3]{1+tg}$, $v = \sqrt[3]{1-tgx}$

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = m\sqrt[3]{2} \\ u^3 + v^3 = 2 \end{cases} \quad (*)$$

a) với $m = 0$ thì $(*)$ vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) với $m \neq 0$ thì (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = m\sqrt[3]{2} \\ u + v = \dfrac{2}{m\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{m} - u \\ u^2 - \dfrac{\sqrt[3]{4}}{m}u + \dfrac{\sqrt[3]{2}\left(2 - m^3\right)}{3m^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{2\sqrt[3]{2}\left(2m^2 - 1\right)}{3m^2}$$

i) Với $m < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ phương trình vô nghiệm

ii) Với $m > \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ thì $tgx = \left(u_{1,2} - 1\right)^3 = tg\alpha_{1,2}$

phương trình có nghiệm: $x = \alpha_{1,2} + k\pi$ trong đó:

$$u_{1,2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{2\sqrt[3]{2}\left(2m^3 - 1\right)}{3m^2}}$$

Bài 13: Giải phương trình

$tgx+tg^2x+tg^3x+cotgx+cotg^2x+cotg^3x=6$ (1)

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq o \\ \cos x \neq o \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Với điều kiện trên thì :

(1) $\Leftrightarrow$ $(tgx+cotgx)+(tg^2x+cotg^2x)+tg^3x+cotg^3x)=6$

$\Leftrightarrow$ $(tgx+cotgx)+[(tgx+cotgx)^2-2]+[(tgx+cotgx)^3-3(tgx+cotgx)]=6$ (2)

Đặt tgx+cotgx=t với $|x| \geq 2$ thì

(2) $\Leftrightarrow$ $t+(t^2-2)+(t^3-3t)=6$

$\Leftrightarrow$ $t^3+t^2-2t-8=0$

$\Leftrightarrow$ $(t-2)(t^2+3t+4)=0$

$\Leftrightarrow$ $t=2$ (vì $t^2+3t+4>0$)

$\Leftrightarrow$ $tgx+cotgx=2$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

BÀI 2: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: (x,y,z) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x) \end{cases}$$ Tìm tất cả các giá trị mà tổng $S = x + y + z$ có thể nhận được.

Lời giải

Giả sử (x,y,z) là một nghiệm đã cho. Cộng các vế của các phương trình của hệ, ta được:

$$3s = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \quad \Rightarrow s \geq 0$$

Vì $s \geq 0$ nên trong 3 số x,y,z phải có ít nhất một số không âm, ta có thể coi rằng $x \geq 0$. Từ phương trình đầu của hệ

$$y(4-y) = x \geq 0$$

Suy ra $0 \leq y \leq 4$. Bằng phép hoán vị vòng quanh, ta thấy $0 \leq x,y,z \leq 4$

Do vậy, ta có thể đặt $x = 4\sin^2\alpha$ với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Từ phương trìng thứ ba, suy ra

$$z = 4\sin^2\alpha\left(4 - 4\sin^2\alpha\right) = 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4\sin^2 2\alpha$$

Và từ phương trình thứ hai

$$y = 4\sin^2 2\alpha\left(4 - 4\sin^2 2\alpha\right) = 4\sin^2 4\alpha$$

Cuối cùng từ phương trình đầu

$$x = 4\sin^2 4\alpha\left(4 - 4\sin^2 4\alpha\right) = 4\sin^2 4\alpha$$

Như vậy α là nghiệm của phương trình

$$\sin^2 8\alpha = \sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos 16\alpha = \cos 2\alpha$$

Suy ra

1) $16\alpha = 2\alpha + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{7}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Nhớ rằng $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên k chỉ có thể lấy 4 giá trị 0,1,2,3

a) Với $k = 0$, ta có $\alpha = 0$, vậy

$$s = x + y + z = 4\left(\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 4\alpha\right) = 0$$

b) Với $k = 1,2,3$, ta được cùng một giá trị s

$$s = x + y + z = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7}\right)$$

2) $16\alpha = -2\alpha + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{9}$ $\quad\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Do $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, nên k chỉ có thể lấy một trong 5 giá trị 0,1,2,3,4

a) Với $k = o$, ta được $\alpha = 0$, vậy $s = 0$

b) Với $k = 1,2,4$, ta được cùng một giá trị s

$$s = x + y + z = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{4\pi}{9}\right)$$

c) Với $k = 3$, ta được

$$s = x + y + z = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{2\pi}{3} + \sin^2\frac{4\pi}{3}\right)$$

Kết luận tổng s nhận một trong các giá trị sau đây

$s = 0$ (xảy ra khi $x = y = z = o$)

$s = 9$ (xảy ra khi $x = y = z = 3$)

$$s = x + y + z = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$s = x + y + z = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{4\pi}{9}\right)$$

Bài 2: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ (1-x)(1+y) = 2 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $-1 \le y \le 1; -1 \le x \le 1$

Đặt: $x = cos\alpha$; $y = cos\beta$ với $\alpha, \beta \in [0, \pi]$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha = 1 \\ (1 - cos\alpha)(1 + cos\beta) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = 1 \\ (1 - cos\alpha)(1 + cos\beta) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ 1 - cos\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha\cos\beta = 2 \end{cases}$$

Đặt $t = \sin\alpha - cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$,ta có $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{2}$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$t - \frac{1-t^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow t = 1$ và $t = -3$ (loại)

Vậy: $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (do $0 \le \alpha \le \pi$)

Từ: $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ suy ra $\beta = 0$

Khi đó: $x = cos\alpha = 0; y = cos\beta = 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất: $(0;1)$

Bài 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho có thể viết thành:

$$\begin{cases} 2x = y\left(1 - x^2\right) \\ 2y = z\left(1 - y^2\right) \\ 2z = x\left(1 - z^2\right) \end{cases}$$

Từ đó dễ thấy rằng $x \neq \pm 1, y \neq \pm 1, z \neq \pm 1$ .do đó ta có

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}$$

Đặt $x = tg\alpha \Rightarrow \alpha \neq \pm \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ta có

$$\begin{cases} y = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = tg2\alpha \\ z = \dfrac{2tg2\alpha}{1 - tg^2 2\alpha} = tg4\alpha \\ x = \dfrac{2tg4\alpha}{1 - tg^2 4\alpha} = tg8\alpha \end{cases}$$

Do dó ta có phương trình

$$tg\alpha = tg8\alpha \Leftrightarrow 8\alpha = \alpha + k\pi \Rightarrow \alpha = k\frac{\pi}{7}$$

cho $k = 0,1,2,3,4,5,6$ ta được các nghiệm của hệ phương trình là

$$(0,0,0), \left(tg\frac{\pi}{7}, tg\frac{2\pi}{7}, tg\frac{4\pi}{7}\right), \left(tg\frac{2\pi}{7}, tg\frac{4\pi}{7}, tg\frac{\pi}{7}\right),$$

$$\left(tg\frac{3\pi}{7}, tg\frac{6\pi}{7}, tg\frac{5\pi}{7}\right), \left(tg\frac{4\pi}{7}, tg\frac{\pi}{7}, tg\frac{2\pi}{7}\right),$$

$$\left(tg\frac{5\pi}{7}, tg\frac{3\pi}{7}, tg\frac{6\pi}{7}\right), \left(tg\frac{6\pi}{7}, tg\frac{5\pi}{7}, tg\frac{3\pi}{7}\right)$$

Bài 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - y^2}{1 + y^2} \\ y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} \end{cases}$$

Lời giải

Nhận xét rằng: $-1-y^2<1-y^2\le 1+y^2$ suy ra

$$-1<\frac{1-y^2}{1+y^2}\le 1\ \Rightarrow -1<x\le 1\ \Rightarrow 0\le y=\frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1$$

Tương tự ta có $-1<y\le 1\ \Rightarrow 0\le x=\frac{1-y^2}{1+y^2}\le 1$

Đặt $x=tgt; y=tgz$, từ điều kiện trên thì $0\le t,z\le\frac{\pi}{4}$

Hệ phương trình đã cho có thể viết:

$$\begin{cases} tgt=\cos 2z\\ tgz=\cos 2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin t=\cos t\cos 2z\\ \sin z=\cos z\cos 2t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin t\cos t=2\cos^2 t\cos 2z\\ 2\sin z\cos z=2\cos^2 z\cos 2t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2t=\left(1+\cos 2t\right)\cos 2z\\ \sin 2z=\left(1+\cos 2z\right)\cos 2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2t-\sin 2z=\cos 2z-\cos 2t\\ \sin 2z=\cos 2t+\cos 2t\cos 2z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2t+\cos 2t=\sin 2z+\cos 2z\\ \sin 2z=\cos 2t+\cos 2t\cos 2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2z+\frac{\pi}{4}\right)(1)\\ \sin 2z=\cos 2t+\cos 2t\cos 2z\quad (2)\end{cases}$$

Từ phương trình (1) của hệ phương trình cuối cùng trên đây ta có:

$$\left[\begin{array}{l}2t+\frac{\pi}{4}=2z+\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2t+\frac{\pi}{4}=\pi-\left(2z+\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

a) với $2t+\frac{\pi}{4}=2z+\frac{\pi}{4}+k2\pi\ \Rightarrow t=z+k\pi\Rightarrow tgt=tgz$ hay $x=y$

Thay vào hệ phương trình đầu ta được

$$\begin{cases}x=\frac{1-y^2}{1+y^2}\\ y=\frac{1-x^2}{1+x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2+x-1=0\\ y^3+y^2+y-1=0\end{cases}$$

Hệ phương trình cuối vừa mới nhận được chứng tỏ x và y có vai trò như nhau và là nghiệm cua phương trình $x^3+x^2+x-1=0$ (3) nếu phương trình này có nghiệm. Do điều kiên ban đầu $0\le x\le 1$,để xét số nghiệm của phương trình (3) ta xét hàm số $f(x)=x^3+x^2+x-1$ trên đoạn $0\le x\le 1$.

Bởi vì với $0\le x_1\le x_2\le 1$ thì

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^{\ 3}+x_2^{\ 2}+x_2-x_1^{\ 3}-x_1^{\ 2}-x_1$$
$$=(x_2-x_1)(x_2^{\ 2}+x_2x_1+x_1^{\ 2}+x_2+x_1+1)>0$$

Tức là $f(x)$ đồng biến trên đoạn $0\le x\le 1$. Ta lại nhận thấy

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}<0 \quad ; \quad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{11}{27}>0 \ .$$

Vậy chắc chắn có giá trị x_0 với $\frac{1}{2}<x_0<\frac{2}{3}$ làm triệt tiêu $f(x)$.

Giá trị x_0 chính là nghiệm của phương trình (3). Thử ta thấy $x_0 \approx \frac{6}{11}$

b) Với $2t+\frac{\pi}{4}=\pi-\left(2z+\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$$\sin 2z=\sin 2z+\sin 2z\cos 2z \Leftrightarrow \sin 4z=0 \Leftrightarrow z=m\frac{\pi}{4}$$

Kết hợp với điều kiện $0\le z\le\frac{\pi}{4}$ ta được:

$$z=0 \text{ và } z=\frac{\pi}{4}$$

Với $z=0 \Rightarrow y=0$ và $x=1$

Với $z=\frac{\pi}{4}\Rightarrow y=1$ và $x=0$

Tóm lại hệ phương trình đã cho có ba nghiệm

$$\begin{cases}x=x_0\\ y=x_0\end{cases} ; \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases} ; \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases} \quad \text{với } x_0\approx\frac{6}{11}$$

Bài 5:

Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a\\ x+y-\sqrt{xy}=a\end{cases} \qquad (1)$$

Lời giải

Điều kiện $x\ge 0, y\ge 0$. Từ phương trình thứ nhất ta thấy nếu $a<0$ thì hệ vô nghiệm. Nếu $a=0$ ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=0\\ x+y-\sqrt{xy}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

Nếu $a>0$ thì $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{a}+\frac{\sqrt{y}}{a}=1$

Đặt $\frac{\sqrt{x}}{a}=\cos^2 t, \frac{\sqrt{y}}{a}=\sin^2 t$, với $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Khi đó từ phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được:

$$a^2\cos^4 t+a^2\sin^4 t-a^2\sin^2 t\cos^2 t=a \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow a^2\left[1-\frac{3}{4}\sin^2 2t\right]=a \Leftrightarrow a\left[1-\frac{3}{8}(1-\cos 4t)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 4t=\frac{8-5a}{3a}$$

Với $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ thì $-1 \le \cos 4t \le 1$, do đó phải có điều kiện

$$-1 \le \frac{8-5a}{3a} \le 1 \Leftrightarrow 1 \le a \le 4.$$

Từ (2) ta có:

$$\cos^4 t + \left(1-\cos^2 t\right)^2 - \left(1-\cos^2 t\right)\cos^2 t = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^4 t - 3\cos^2 t + \frac{a-1}{a} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{3 \pm \sqrt{\dfrac{12-3a}{a}}}{6}$$

$$\Rightarrow x = a^2\cos^4 t = \frac{\left[3a \pm \sqrt{3a\left(4-a\right)}\right]^2}{36}, y = \frac{\left[3a \mp \sqrt{3a\left(4-a\right)}\right]^2}{36}$$

Tóm lại: Nếu $0 \ne a \le 1$ hoặc $a > 4$ thì hệ (1) vô nghiệm.

Nếu $a = 0$ thì hệ (1) có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Nếu $1 \le a \le 4$ thì hệ (1) có hai nghiệm:

$$\left(\frac{\left[3a+\sqrt{3a\left(4-a\right)}\right]^2}{36}, \frac{\left[3a-\sqrt{3a\left(4-a\right)}\right]^2}{36}\right); \left(\frac{\left[3a-\sqrt{3a\left(4-a\right)}\right]^2}{36}, \frac{\left[3a+\sqrt{3a\left(4-a\right)}\right]^2}{36}\right)$$

Bài 6:

Giải hệ phương trình

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = \left(x-b\right)^2 + \left(y-a\right)^2$$

Lời giải

Đặt $a^2 + x^2 = R^2 \Rightarrow \begin{cases} |a| \le |R| \\ |x| \le |R| \end{cases}$ nên ta có thể đặt

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ \text{a=Rsin}\alpha \end{cases} \text{ với } \alpha \in \left[0^0;180^0\right]$$

Ta cũng được : $b^2 + y^2 = R^2$ nên tương tự $\begin{cases} y = R\cos\beta \\ \text{b=Rsin}\beta \end{cases}$ với $\beta \in \left[0^0;180^0\right]$

$$\Rightarrow R^2 = \left(x-b\right)^2 + \left(y-a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left(R\cos\alpha\text{-Rsin}\beta\right)^2 + \left(R\cos\beta\text{-Rsin}\alpha\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin\left(\alpha+\beta\right) = \frac{1}{2} = \sin 30^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha+\beta = 30^0 \\ \alpha+\beta = 150^0 \end{array}\right.$$

Với $\alpha + \beta = 30^0 \Rightarrow \beta = 30^0 - \alpha$

$$\Rightarrow y = R\cos\left(30^0 - \alpha\right)$$

$$= R\left(\cos 30^0 \cos\alpha + \sin 30^0 \sin\alpha\right)$$

$$= \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} \qquad (1)$$

$b = R\sin = R\sin\left(30^0 - \alpha\right) = R\left(\sin 30^0\cos\alpha\text{-}\sin\alpha\cos 30^0\right)$

$= \frac{x}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra nghiệm của hệ là

$x = 2b + a\sqrt{3}$, $y = 2a + b\sqrt{3}$

Với $\alpha + \beta = 150^0 \Rightarrow \beta = 150^0 - \alpha$

$y = R\cos\left(150^0 - \alpha\right) R\cos 150^0.\cos\alpha + R\sin 150^0.\sin\alpha$

$= -\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}$ (3)

$b = R\sin\left(150^0 - \alpha\right) = R\sin 150^0.\cos\alpha - R\sin\alpha.\cos 150^0$

$= \frac{x}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) ta suyra nghiệm của hệ là:

$x = 2b - a\sqrt{3}$, $y = 2a - b\sqrt{3}$

Nhận xét: phương trình trên giải bằng cánh đặt $R^2 = \left(x - b\right)^2 + \left(y - a\right)^2$

để suy ra dạng lượng giác $\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ a = R\sin\alpha \end{cases}$ và $\begin{cases} y = R\cos\beta \\ b = R\sin\beta \end{cases}$

Bài 7:

Giải và biện luận theo m hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = m \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = m^2 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x + y \ge 0 \\ x - y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge |y|$

Với $m = 0$ ta thấy hệ phương trình có nghiệm $x = y = 0$

Với $m \ne 0$ ta có

- Nếu $m > 0$ thì $x + y > x - y \Leftrightarrow y > 0$
- Nếu $m < 0$ thì $x + y < x - y \Leftrightarrow y < 0$

Kết quả trên chứng tỏ y và m luôn cùng dấu

Đặt $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \begin{cases} |x| \le R \\ |y| \le R \end{cases}$ với $R > 0$

Nên ta có thể đặt

$x = R\cos\alpha$, $y = R\sin\alpha$ $(R>0)$

$\Rightarrow$ y và m cùng dấu nên $\sin\alpha$ và m cùng dấu

$x \ge |y| \ge 0$ nên $\cos\alpha \ge |\sin\alpha|$

Do đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{R}\left(\sqrt{\cos\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\cos\alpha\text{-}\sin\alpha}\right)=m & (1) \\ R\left(1+\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right)=m^2 & (2) \end{cases} \qquad (m\neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2R\left(\cos\alpha\text{-}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right)=m^2 \\ R\left(1+\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right)=m^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{2\cos^2\alpha-1}=2\left(\cos\alpha\text{-}\sqrt{2\cos^2\alpha-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha\text{-}1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\alpha\text{-}1\geq 0 \\ 9\left(2\cos^2\alpha-1\right)=4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha\geq\dfrac{1}{2} \\ 7\cos^2\alpha+2\cos\alpha\text{-}5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha=\text{-}1 \quad \text{(loại)} \\ \cos\alpha=\dfrac{5}{7} \end{array}\right.$$

Ta nhận $\cos\alpha=\dfrac{5}{7}\Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{24}{49}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{7} & \text{nếu } m>0 \\ \sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{6}}{7} & \text{nếu } m<0 \end{array}\right.$$

(điều kiện $\cos\alpha\geq\left|\sin\alpha\right|$ được thỏa)

Từ (2) $\Rightarrow R\left(1+\dfrac{1}{7}\right)=m^2\Rightarrow R\dfrac{7m^2}{8}$ do đó:

$$x=R\cos\alpha=\frac{7\text{m}^2}{8}.\frac{5}{7}=\frac{5m^2}{8}$$

$$y=R\sin\alpha=\left[\begin{array}{ll} \dfrac{7m^2}{8}.\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=\dfrac{\sqrt{6}m^2}{4} & \text{nếu } m>0 \\ -\dfrac{7m^2}{8}.\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=-\dfrac{\sqrt{6}m^2}{4} & \text{nếu } m<0 \end{array}\right.$$

BÀI 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Bài 1: (Tạp chí Toán học và tuổi trẻ)

Tìm giá trị lớn nhất của

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+bc}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}$$

$a,b,c\in \mathbb{R}^{+}$ và thỏa mãn $a+b+c=1$

Lời giải:

Trước hết ta có nhận xét

$$A=\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+bc}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}=\frac{1}{1+\frac{bc}{a}}+\frac{1}{1+\frac{ca}{b}}+\frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{1+\frac{ab}{c}}$$

Đặt $\frac{bc}{a}=tg^2\frac{\alpha}{2}$; $\frac{ac}{b}=tg^2\frac{\beta}{2}$; $0<\alpha,\beta<\pi$

Chú ý: $1=a+b+c$

$$=\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}.\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

Suy ra: $\sqrt{\frac{ab}{c}}=\dfrac{1-tg\frac{\alpha}{2}.tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}=\cot g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Do đó: $\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$ và $\sqrt{\frac{ab}{c}}=tg\gamma$

$(\gamma=\pi-(\alpha+\beta)\in(0,\pi))$

Bởi vậy: $A=\dfrac{1}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1}{1+tg^2\frac{\beta}{2}}+\dfrac{tg\frac{\gamma}{2}}{1+tg^2\frac{\gamma}{2}}$

$$=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}=1+\frac{1}{2}\left(\cos\alpha+\cos\beta+\sin\gamma\right)$$

Mà ta lại có: $\cos\alpha+\cos\beta+\sin\gamma+\sin\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}+2\sin\dfrac{\gamma+\frac{\pi}{3}}{2}.\cos\dfrac{\gamma-\frac{\pi}{3}}{2}$

$$\le 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma-\frac{\pi}{3}}{2}$$

$$\le 4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\frac{\pi}{3}}{4}=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$$

Vậy $A\le 1+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Đẳng thức xảy ra lhi và chỉ khi

$\alpha = \beta, \gamma = \frac{2\pi}{3}$ tức là

$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \sqrt{\frac{ca}{b}} = tg\frac{\pi}{12}2 - \sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{ab}{c}} = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow a = b = 2\sqrt{3} - 3; c = 7 - 4\sqrt{3}$

Bài 2: Cho 13 số thực $a_1, a_2, ..., a_{13}$ khác nhau từng đôi một. chứng minh răng tồn tại a_j và

a_k, $1 \le j, k \le 13$ sao cho $0 < \frac{a_j - a_k}{1 + a_j a_k} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Lời giải

Đặt $a_i = tgx_i; i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right): i = 1, ..., 13$ .Không mất tổng quát, giả sử $a_1 < a_2 < ... < a_{13}$

Khi đó $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < ... < x_{13} < \frac{\pi}{2} < x_1 + \pi$.Đoạn $[x_1, x_1 + \pi]$ được chia thành 13 đoạn bởi các điểm $x_2, x_3, ..., x_{13}$ .Vậy tồn tại đoạn có độ dài $\le \frac{\pi}{13}$

Nếu $0 < x_i - x_{i-1} \le \frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{12}\left(i \in \{2, ..., 13\}\right)$ thì

$0 < tg\left(x_i - x_{i-1}\right) < tg\frac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{tgx_i - tgx_{i-1}}{1 + tgx_i.tgx_{i-1}} < tg\frac{\pi}{12}$ (1)

Nếu chỉ có $0 < (x_1 + \pi) - x_{13} \le \frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{12}$ thì

$0 < tg\left(x_1 + \pi - x_{13}\right) < tg\frac{\pi}{12}$ $\Leftrightarrow 0 < \frac{a_i - a_{i-1}}{1 + a_i a_{i-1}} < tg\frac{\pi}{12}$ (2)

Mặt khác $tg\frac{\pi}{12} = tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.

Bài 3:

Cho $x + y + z = xyz$ chứng minh rằng:

$$x\left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right) + y\left(z^2 - 1\right)\left(x^2 - 1\right) + z\left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right) = 4xyz$$

Lời giải:

Xét hai khả năng sau:

1. Nếu $xyz = 0 \Rightarrow$ ít nhất một trong ba số $x, y, z = 0$.

Giải sử $x = 0$, khi đó từ giả thiết suy ra $y + z = 0$

Lúc này

$VT = y\left(1-z^2\right)+z\left(1-y^2\right)=0=VP$

Vậy đẳng thức đúng trong trường hợp này

2. Nếu $xyz \neq 0$. Khi ấy đưa đẳng thức cần chứng minh về dạng tương đương sau

$$\frac{y^2-1}{2y}\frac{z^2-1}{2z}+\frac{x^2-1}{2x}\frac{z^2-1}{2z}+\frac{x^2-1}{2x}\frac{y^2-1}{2y}=1 \qquad (1)$$

Đặt $x=tg\alpha, y=tg\beta, z=tg\gamma$. Từ giả thiết suy ra

$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$

Suy ra $\alpha+\beta+\gamma=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 2\alpha+2\beta+2\gamma=2k\pi \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra:

$$\cot g2\alpha\cot g2\beta+\cot g2\beta\cot g2\gamma+\cot g2\gamma\cot g2\alpha=1 \qquad (3)$$

Chú ý là $\cot g2\alpha=\dfrac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}=\dfrac{1-x^2}{2x}$;

$\cot g2\beta=\dfrac{1-tg^2\beta}{2tg\beta}=\dfrac{1-y^2}{2y}$:

Và $\cot g2\gamma=\dfrac{1-tg^2\gamma}{2tg\gamma}=\dfrac{1-z^2}{2z}$

Từ (3) suy ra (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 4 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{2+\sin x-\cos x}{2-\sin x+\cos x}$$

Lời giải

Viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y=\frac{2\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{3\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}}$$

1) Khi $\cos\frac{x}{2}=0$ thì $y=3$

2) Khi $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, viết hàm số dưới dạng

$$y=\frac{3t^2+2t+1}{t^2-2t+3}, \quad t=tg\frac{x}{2}.$$

Xác định y để phương trình

$$\frac{3t^2+2t+1}{t^2-2t+3}=y \text{ có nghiệm.}$$

$\Leftrightarrow (y-3)t^2 - 2(y+1)t + 3y - 1 = 0$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow \Delta' = (y+1)^2 - (y-3)(3y-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -2y^2 + 12y - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 6y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq y \leq 3 + 2\sqrt{2}$

Vậy $\max y = 3 + 2\sqrt{2}$ khi $tg\frac{x}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$

$\min y = 3 - 2\sqrt{2}$ khi $tg\frac{x}{2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$

Bài 5:

Chứng minh rằng với mọi cặp số thực x,y ta đều có:

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{\left[(1+x^2)(1+y^2)\right]^2} \leq \frac{1}{4}$$

Lời giải

Đặt $x = tgu, y = tgv$ với $-\frac{\pi}{2} < u, v < \frac{\pi}{2}$ thì biểu thức

$$A = \frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{\left[(1+x^2)(1+y^2)\right]^2} = \frac{(tg^2u - tg^2v)(1-tg^2u\,tg^2v)}{(1+tg^2u)^2(1+tg^2v)^2}$$

$$= \cos^4u.\cos^4v\left(\frac{\sin^2u}{\cos^2u} - \frac{\sin^2v}{\cos^2v}\right)\left(1 - \frac{\sin^2u\sin^2v}{\cos^2u\cos^2v}\right)$$

$$= (\sin^2u\cos^2v - \sin^2v\cos^2u)(\cos^2u\cos^2v - \sin^2u\sin^2v)$$

$$= (\sin u\cos v + \sin v\cos u)(\sin u\cos v - \sin v\cos u)(\cos u\cos v + \sin u\sin v)(\cos u\cos v - \sin u\sin v)$$

$$= \sin(u+v)\sin(u-v)\cos(u-v)\cos(u+v)$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2(u+v)\sin 2(u-v)$$

Suy ra $|A| = \frac{1}{4}|\sin 2(u+v)||\sin 2(u-v)| \leq \frac{1}{4}$. Tức $\frac{-1}{4} \leq A \leq \frac{1}{4}$

Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi

$$\begin{cases} \sin 2(u+v) = 1 \\ \sin 2(u-v) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(u+v) = \frac{\pi}{2} \\ 2(u-v) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\pi}{4} \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Hoặc $\begin{cases} \sin 2(u+v) = -1 \\ \sin 2(u-v) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(u+v) = \frac{-\pi}{2} \\ 2(u-v) = \frac{-\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-\pi}{4} \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

Biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$ khi

$$\begin{cases}\sin 2(u+v)=-1\\ \sin 2(u-v)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(u+v)=\frac{\pi}{2}\\ 2(u-v)=-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\ v=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$$

Hoặc $\begin{cases}\sin 2(u+v)=-1\\ \sin 2(u-v)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(u+v)=\frac{-\pi}{2}\\ 2(u-v)=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\ v=\frac{-\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$

Bài 6: Cho phương trình bậc ba

$$x^3-px^2+qx-p=0 \qquad (1)$$

Với $p>0$, $q>0$. Chứng minh rằng phương trình (1) có 3 nghiệm ≥ 1 thì

$$p\geq\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)(q+3) \qquad (2)$$

Lời giải

Giả cử (1) có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 $(x_1\leq x_2\leq x_3)$ thì

$x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3=p$; $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q$ suy ra tồn tại $\triangle ABC$ sao cho

$x_1=tgA, x_2=tgB, x_3=tgC$ $\left(\frac{\pi}{4}\leq A,B,C<\frac{\pi}{2}\right)$ và hai có dạng (2)

$$tgAtgBtgC\geq\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)(tgAtgB+tgBtgC+tgCtgB+3)$$

$$\Leftrightarrow 8-4\sqrt{2}\geq\cot gA+\cot gB+\cot gC+3\cot gA\cot gB\cot gC \qquad (3)$$

Gọi vế phải của (3) là T . Khi đó:

$$T=\cot gA+\frac{2\sin A}{\cos(B\text{-}C)+\cos A}+3\cot gA\frac{\cos(B\text{-}C)-\cos A}{\cos(B\text{-}C)+\cos A}$$

$$\leq\cot gA+\frac{2\sin A}{\cos(B\text{-}C)+\cos A}+3\cot gA\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

Hay $T\leq\frac{1}{2tg\frac{A}{2}}+3tg\frac{A}{2}-\frac{3}{2}tg^3\frac{A}{2}$

Đặt $tg\frac{A}{2}=t$ thì $\sqrt{2}-1\leq t\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$ (do $\frac{\pi}{4}\leq A\leq B\leq C$)

Xét hàm số: $f(x)=\frac{1}{2t}+3t-\frac{3}{2}t^3$

Ta thấy $f'(t)\leq 0$ trong đoạn $\left[\sqrt{2}-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Từ đó, $f(x)$ và ta có ngay đpcm.

CHƯƠNG 2: ĐA THỨC CHEBYSHEV

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT ĐA THỨC CHEBYSHEV:

1. Định nghĩa:

*Các đa thức $T_n(x)$, $n \in$ N xác định như sau:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

Gọi là các đa thức Chebyshev loại I.

* Các đa thức Tn(x), $n \in$ N xác định như sau:

$$\begin{cases} U_0(x) = 0, U_1(x) = 1 \\ U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \forall n \ge 1 \end{cases}$$

Gọi là các đa thức Chebyshev loại II

2. Các tính chất của đa thức loại I:

Đa thức Chebyshev có nhiều tính chất hay, được sử dụng rất nhiều trong việc giải quyết các bài toán đa thức.

Sau đây xin được nêu một số tính chất quan trọng (việc chứng minh rất dễ dàng)

-Tính chất 1: $\forall x \in [-1,1]$,ta có $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

-Tính chất 2: $T_n(x)$ là đa thức bậc $n, n \in$,hệ số cao nhất là 2^{n-1}

-Tính chất 3: $T_n(x)$ là hàm chẵn khi x chẵn và là hàm lẻ khi x lẻ.

-Tính chất 4: Đa thức $T_n(x)$ có đúng n nghiệm phân biệt trong $[-1,1]$:

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, (k = 1, 2, ..., n-1)$$

-Tính chất 5: a) $|T_n(x)| \le 1, \forall x \in [-1,1]$

b) $|T_n(x)| = 1$ chỉ tại n+1 điểm khác nhau trong $[-1,1]$ là

$$\overline{x_k} = \cos\frac{k\pi}{n}(k = 1, 2, ..., n)$$

Chú ý là: $T_n(\overline{x_k}) = (-1)^k$

Các điểm $\overline{x_k}$ gọi là điểm luân phiên Chebyshev.

-Tính chất 6: $\forall P(x)$ bậc n, hệ số cao nhất bằng 1, ta có

$$\max|P(x)| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P(x) = T_n{}^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$

3. Các tính chất của đa thức loại II:

-Tính chất 1: $\forall x \in (-1,1)$ ta có

$$U_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

-Tính chất 2: $U_n(x) = \frac{1}{n} T_n{}'(x)$

-Tính chất 3: a/. $U_n(x)$ là đa thức hệ số nguyên, bậc n -1, hệ số cao nhất là 2^{n-1}

b/. $U_n(x)$ là hàm chẵn nếu x lẻ và là hàm lẻ nếu x chẵn.

-Tính chất 4: $|U_n(x)| \le n, \forall x \in (-1,1)$

-Tính chất 5: Đa thức $U_n(x)$ có đúng n-1 nghiệm phân biệt khác nhau trong $[-1,1]$

Đặc biệt: Từ tính chất 2 và 4, ta có:

$$|T_n{}'(x)| \le n^2, \forall x \in (-1,1)$$

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA:

<u>**Bài 1**</u>: Chứng minh rằng mọi đa thức $f(x)$ bậc $n \ge 1$ đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x), a_n \ne 0$$

Và cách biểu diễn này là duy nhất.

<u>**Lời giải**</u>

Ta có $T_n(x)$ là đa thức bậc n có hệ số cao nhất là 2^{n-1} nên ta có thể viết

$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \varphi(x)$ với $\varphi(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn n.

Suy ra $x^n = \frac{1}{2^{n-1}} T(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \varphi(x)$

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$f(x) = a_0 + a_1 T(x) + a_2 T_2(x) + ... + a_n T_n(x)$$

Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất của cách biểu diễn này

Giả sử

$$f(x) = a_0 + a_1 T(x) + a_2 T_2(x) + ... + a_n T_n(x) = a'_0 + a'_1 T(x) + a'_2 T_2(x) + ... + a'_n T_n(x)$$

Khi đó $\sum_{i=0}^{n} (a_i - a'_i) T_i(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $a_0 - a'_0 = a_1 - a'_1 = ... = a_n - a'_n = 0$

Hay $a_0 = a'_0, a_1 = a'_1, ..., a_n = a'_n$

Một trong những dấu hiệu để nhận biết bài toán đa thức có sử dụng tính chất đa thức Chebyshev hay không đó là miền giá trị đa thức. Các bài toán trên miền $[-1,1]$ đều gợi ra cách giải bằng phương pháp này.

Ta xét thêm một số ví dụ:

Bài 2: Cho đa thức hệ số thực $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \alpha > 0$ Biết rằng $\forall x \in [-1,1]$ ta có $|f(x)| \le \alpha$ .Tìm max của $|a|,|b|,|c|,|d|$

Nhận xét: Ta sẽ lưu ý cách chọn điểm luân phiên trong đa thức Chebyshev.

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} A = f(-1) = -a + b - c + d \\ B = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d \\ C = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d \\ D = f(1) = a + b + c + d \\ E = f(0) = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3}A + \frac{4}{3}B - \frac{4}{3}C + \frac{2}{3}D \\ b = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D - E \\ c = \frac{1}{6}A - \frac{8}{6}B + \frac{8}{6}C - \frac{1}{6}D \\ d = E \end{cases}$

Từ giả thiết: $\begin{array}{l} |a| \le 4\alpha \\ |b| \le 2\alpha \\ |c| \le 3\alpha \\ |d| \le \alpha \end{array}$

Bằng cách xét: $f(x) = \alpha(4x^3 - 3x)$

và $g(x) = \alpha(2x^2 - 1)$

Thì ta có dấu đẳng thức xảy ra. Vậy:

$\max|a| = 4\alpha,$

$\max|b| = 2\alpha,$

$\max|c| = 3\alpha,$

$\max|d| = \alpha$

Chú ý: f(x),g(x) là xét dự trên cơ sở cos2x,cos3x.

Bài 3: Cho đa thức $P_{n-1}(x)$ bậc không vượt quá $n-1$ có hệ số bậc cao nhất a_0, thỏa mãn điều kiện: $\sqrt{1-x^2}\,|P_{n-1}(x)| \le 1, \forall x \in [-1,1]$

Chứng minh rằng $|a_0| \le 2^{n-1}$

Lời giải

Ta viết đa thức đã cho dưới dạng nội suy Lagrange theo các nút nội suy $x_j = \cos\frac{2j-1}{2n}\pi$ là các nghiệm của đa thức Chebyshev $T_n(x)$

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}P_{n-1}(x_j)\frac{T_n(x)}{x-x_j}$$

Suy ra $$a_0 = \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}P(x_j)$$

Vậy nên $$|a_0| \le \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sqrt{1-x_j^2}P(x_j)\right| \le \frac{2^{n-1}}{n}.n = 2^{n-1}$$

<u>Bài 4</u>: Giả thiết rằng đa thức $P_{n-1}(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Bài 1. Chứng minh rằng $|P_{n-1}(x)| \le n, \forall x \in [-1,1]$

<u>Lời giải</u>:

Với các x_j được chọn như ở bài toán trên thì do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trong $(0;\pi)$ nên $-1 < x_n < x_{n-1} < ... < x_2 < x_1 < 1$. Nếu $x_1 < x < 1$ thì

$$|P_{n-1}(x)| \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sqrt{1-x_j^2}P_{n-1}(x_j)\right|\frac{|T_n(x)|}{|x-x_j|} \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{T_n(x)}{(x-x_j)} \quad (2)$$

(do $x - x_j > 0$ và $T_n(x)$ có dấu không đổi trên $(x_1;1]$)

Mặt khác thì $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$

Nên ta có $$T_n'(x) = 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)}{(x-x_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_k} \quad (3)$$

Lại có $$\frac{|T_n'(x)|}{n} = |U_n(x)| \le n$$

Nên từ (2) và (3) suy ra

$$|P_{n-1}(x)| \le n, \forall x \in (x_1;1]$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$|P_{n-1}(x)| \le n, \forall x \in [-1, x_n)$$

Xét $x_n \le x \le x_1$ .Khi đó ta có

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-x_1^2} = \sin\left(\arccos x_1\right) = \sin\frac{\pi}{2n}$$

Do $\quad 1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$

$\sin\frac{\pi}{2n} \geq \frac{\pi}{2n}.\frac{2}{n} = \frac{1}{n}$ và $\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{n}$.Suy ra:

$$\left|P_{n-1}(x)\right| \leq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

Tóm lại ta đã chứng minh được rằng $\left|P_{n-1}(x)\right| \leq n, \forall x \in [-1,1]$

Bài 5: Cho đa thức lượng giác

$$P(t) = a_1\sin t + a_2\sin 2t + ... + a_n\sin(nt)$$

Thỏa mãn điều kiện $\left|P(t)\right| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$

Chứng minh rằng $\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq n, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$

Lời giải:

Nhận xét rằng $\frac{P(t)}{\sin t} = P_{n-1}(\cos t)$ với $P_{n-1}(x)$ là đa thức dạng (1). Đặt $\cos t = x$. Khi đó $|x| \leq 1$ và

$$P(t) = \sin P_{n-1}(\cos t) = \sqrt{1-x^2}P_{n-1}(x)$$

Ta thấy $P(x)$ thỏa mãn điều kiện của Bài 2 nên

$$\left|P_{n-1}(x)\right| \leq n, \forall x \in [-1,1]$$

Do đó

$$\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq n, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$$

Bài 6: Cho đa thức lượng giác

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n}\left(a_j\cos jx + b_j\sin jx\right)$$

Thỏa mãn điều kiện $\left|P(x)\right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng $\left|P'(x)\right| \leq n, \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải:

Cho x_0 tuỳ ý. Do

$$\cos(x_0 - x) - \cos(x_0 + x) = 2\sin x_0 \sin x$$
$$\sin(x_0 + x) - \sin(x_0 - x) = 2\cos x_0 \sin x$$

nên $$g(x) = \frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2} = \sum_{j=0}^{n} c_j \sin jx$$

Suy ra $$g'(x) = \frac{P'(x_0 + x) + P'(x_0 - x)}{2}$$

Và $g'(0) = P'(x_0)$.Ta chứng minh rằng $|g'(0)| \le n$ .Thật vậy, $g(x)$ là đa thức lượng giác chứa thuần sin như trong Bài 3 và

$$|g(x)| = \left|\frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2}\right| \le \frac{|P(x_0 + x)| + |P(x_0 - x)|}{2} \le 1$$

Nên theo kết quả của bài 3 thì $\left|\frac{g(x)}{\sin x}\right| \le n \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$ (4)

Nhưng $g(0) = 0$ suy ra

$$\left|\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin x}\right| \le n \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$$

Nên khi $x \to 0$: $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \to g'(0)$ $\frac{x}{\sin x} \to 1$

Ta nhận được $|g'(0)| \le n$

Từ đó ta có $|P'(x_0)| \le n$ .Nhưng x_0 được chọn tùy ý nên suy ra $|P'(x)| \le n \ \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 7 ***(Định lý Berstein-Markov)***

Cho đa thức

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

Thỏa mãn điều kiện $|P_n(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$

Chứng minh rằng khi đó : $|P'_n(x)| \le n^2, \forall x \in [-1;1]$ (5)

Lời giải:

Đặt $x = \cos a$ .Khi đó theo giả thiết thì $|P_n(\cos a)| \le 1$ .Do $P_n(\cos a)$ có dạng

$$P_n(\cos a) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos j\alpha + b_j \sin j\alpha)$$

Nên ta có thể áp dụng kết quả của Bài 4. Ta được

$$\left|\sin\alpha.P'_n(\cos\alpha)\right| \le n \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\left|\frac{P'_n(x)}{n}\right| \le 1$$

Cũng theo Bài 4, ta có $\left|\frac{P'_n(x)}{n}\right| \le n$ .Suy ra: $\left|P'(x)\right| \le n^2$

Nhận xét : Dựa vào kết quả của Định lý Berstein-Markov, sau khi áp dụng liên tiếp kết quả của định lí này, ta sẽ thu được kết quả sau:

Nếu $\left|P_n(x)\right| \le 1, \forall x \in [-1;1]$ thì $\left|P^{(k)}(x)\right| \le \left[n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\right]^2, \forall x \in [-1;1]$

Bài 8: Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0.

a/. Chứng minh rằng phương trình $x^n - a_1x^{n-1} - ... - a_{n-1}x - a_n = 0$ (6)

có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b/. Giả sử R là nghiệm dương của phương trình (6) và

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j, B = \sum_{j=1}^{n} ja_j$$

Chứng minh rằng khi đó $A^A \le R^B$

Lời giải:

a) Do $x > 0$ nên $(6) \Leftrightarrow 1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n}$

Đặt $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n}$. Nhận xét rằng $f(x)$ liên tục và $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0, +\infty)$ nên tồn tại duy nhất $R > 0$ sao cho $f(R) = 1$.

b) Đặt $c_j = \frac{a_j}{A}$ .Suy ra $c_j \ge 0$ và $\sum_{j=1}^{n} c_j = 1$ .Do hàm số y = -lnx lõm trong khoảng $(0, +\infty)$ nên teo BĐT Jensen thì $\sum_{j=1}^{n} c_j - \ln\frac{A}{R^j} \ge -\ln\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{A}{R^j}\right) = -\ln\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{R^j}\right) = -\ln f(R) = -\ln 1 = 0$

Suy ra $\sum_{j=1}^{n}\left(c_j \ln R^j - c_j \ln A\right)$

Và $(\ln A)\sum_{j=1}^{n} c_j \le (\ln R)\sum_{j=1}^{n} jc_j$

Hay $\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n} a_j(\ln A) \le \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n} ja_j(\ln R)\left(doc_j = \frac{a_j}{A}; A > 0\right)$

Vậy nên $\ln\left(A^A\right) \le \ln\left(R^B\right) \Rightarrow A^A \le R^B$

CHƯƠNG 3:
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TỔNG LƯỢNG GIÁC

Bài toán tính tổng là dạng bài quen thuộc nhưng không hề đơn giản trong giải toán lượng giác. Thường thì dạng tóan này được lồng ghép vào một bài tóan nào đó và chỉ là bước trung gian. Tuy vậy, nó cũng chẳng phải là một bước dễ dàng.

Trong phần sau đây, xin được đề cập những phương pháp mấu chốt nhất để giải những dạng tóan này: đó là phương pháp sai phân, phương pháp đại số, phương pháp số phức và phương pháp đạo hàm. Như vậy, ta sẽ thấy một bài tóan sẽ có thể giải bằng nhiều cách khác nhau.

I. PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN.

1. Cơ sở:

- Phương pháp này xoay quanh việc chuyển từ số a_k về dạng $a_k = f(k+1) - f(k)$, nói cách khác là biểu diễn số hạng bằng biểu thức sai phân.

- Ta sẽ có: $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \left[f(i+1) - f(i) \right] = f(n+1) - f(1)$

Để có thể sử dụng phương pháp này ta có cần nhớ khá nhiều tính chất của lượng giác. Cụ thể được thống kê ở bảng sau:

1) $2\sin a.\sin b = \cos(\text{a-b}) - \cos(a+b)$

2) $2\sin a.\cos b = \sin(\text{a+b}) + \sin(a-b)$

3) $\dfrac{1}{4.\cos^2\dfrac{x}{2}} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{4.\sin^2\dfrac{x}{2}}$

4) $\dfrac{1}{\sin 2x} = \cot g2x - \cot gx$

5) $tgx = \cot gx - 2\cot g2x$

Với a_k là cấp số cộng, công sai *d*:

6) $\dfrac{1}{\sin a_n.\sin_{n+1}} = \dfrac{1}{\sin d}\left(\cot ga_n - \cot ga_{n+1}\right)$

7) $tga_{n+1} - tga_n = \dfrac{1}{\sin d}\left(tga_{n+1} - tga_n\right)$

2. Các bài tóan:

Bài 1: Cho cấp số cộng, công sai *d*. Tính:

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin a_k$

b) $T_k = \sum_{k=1}^{n} \cos a_k$

Giải:

Dạng bài này có lẽ quá quen thuộc. Ta sẽ áp dụng tính chất 1 ở trên.

a) Ta có:

$$2\sin a_k.\sin\frac{d}{2} = 2\sin\left[a_1+(k-1)d\right].\sin\frac{d}{2} = \cos\left[a_1+\left(k-\frac{3}{2}\right)d\right]-\cos\left[a_1+\left(k-\frac{1}{2}\right)d\right]$$

Xét: $g(k)=\cos\left[a_1+\left(k-\frac{3}{2}\right)d\right]$

Ta có: $2\sin a_k.\sin\frac{d}{2} = g(k)-g(k+1)$

Vậy: $2\sin\frac{d}{2}.S_n = g(1)-g(n+1) = -2\sin\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right)\sin\left(\frac{-n}{2}d\right)$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\sin\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right).\sin\left(\frac{n}{2}d\right)}{\sin\frac{d}{2}}$$

b) Tương tự như a), sử dụng tính chất 2:

<u>Nhận xét</u>:

-Ta thường sử dụng hệ quả của bài tóan trên dưới dạng:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

-Với $n = 2$, chọn $x=\frac{\pi}{5}$ ta có: $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$

-Với $n = 3$, chọn $x=\frac{\pi}{7}$ ta có: $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$

-Với $n = 4$, chọn $x=\frac{\pi}{9}$ ta có: $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$

Bài 2: Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ công sai *d*. Tính:

a) $S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}.tg\frac{a}{2^i}$

b) $T_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4^i.\cos^2\frac{a}{2^i}}$

Giải:

a) Ta sẽ áp dụng tính chất 5:

$$\frac{1}{2^k}.tg\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^k}.\cot g\frac{a}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}}.\cot g\frac{a}{2^{k-1}}$$

Đặt: $f(k)=\frac{1}{2^k}.\cot g\frac{a}{2^k}$

Khi đó: $S_n = f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+...+f(n)-f(n-1)$

$$=f(n)-f(1)=\frac{1}{2^n}.\cot g\frac{a}{2^n}-\cot ga$$

b) Ta áp dụng tính chất 3, giải tương tự.

Nhận xét:

Bằng việc áp dụng các tính chất đã nêu, ta hòan tòan có thể tính các tổng sau:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin a_k.\sin na_{k+1}},\{a_k\}\text{ là cấp số cộng}$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos a_k.\cos a_{k+1}$$

Sau đây xin xét một bài tóan không sử dụng các tính chất đã nêu.

Bài 3: Tính tổng: $S_n=\sum_{k=1}^{n}arctg\frac{2k}{1+k^2+k^2}$

Nhận xét:

Ta cần chú ý đẳng thức sau: $arctg\frac{a+b}{1-ab}=arctga+arctgb$

Quan sát đề bài, ta cần chọn *x, y* sao cho: $\begin{cases}1+n^2+n^4=-xy\\2n=x+y\end{cases}$

Ta giải hệ phương trình này và có: $\begin{cases}x=n^2+n+1\\y=-\left(n^2-n+1\right)\end{cases}$

Giải:

Áp dụng phép đặt như trên:

$$\Rightarrow arctg\frac{2n}{1+n^2+n^4}=arctg\frac{x+y}{1-xy}=arctgx+arctgy$$

$$\Leftrightarrow arctg\frac{2n}{1+n^2+n^4}=arctg\left(n^2+n+1\right)-arctg\left(n^2-n+1\right)\text{ (Vì } xy<1\text{)}$$

Vậy:

$$S_n=arctg3-arctg1+arcgt7-arctg3+...+arctg\left(n^2+n+1\right)-arctg\left(n^2-n+1\right)$$

$$=arctg\left(n^2+n+1\right)-\frac{\pi}{4}\backslash$$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ:

a. Cơ sở:

Cơ sở của phương pháp này là dựa trên phép biến đổi Abel.

Định lý này được phát biểu như sau:

Định lý:

Cho hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Xét hai dãy số $\{B_n\}$ và $\{S_n\}$ trong đó:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_n \quad ; \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Thế thì: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_{n+1}.B_n$

Chứng minh:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k - a_{k+1}\right).B_k + a_{n+1}.B_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}.B_k + a_{n+1}.B_n$$

$$= a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}.B_k$$

$$= a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right)$$

$$= a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n$$

Hệ quả:

Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d và cấp số nhân $\{b_n\}$ với công bội $q \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left[\left(1-q^n\right)a_1 + \frac{q}{1-q}\left(1 - nq^{n-1} + \left(n-1\right)q^n\right)d\right]\frac{b_1}{1-q}$$

Ngòai ra ta nhắc lại kiến thức về đa thức.

Định lý Viét:

Nếu đa thức: $P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \left(a \neq 0\right)$, có n nghiệm $x_1, x_2,..., x_n$ thì ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{-a_1}{a_o}$$

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} x_i x_j = \frac{a_2}{a_0}$$

...

$$x_1 x_2 ... x_n = \left(-1\right)^n \frac{a_n}{a_0}$$

b. Các bài tóan:

Bài 1: Cho $\{a_k\}$ là cấp số cộng. Tính:

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k.\sin a_k$

b) $T_n = \sum_{k=1}^{n} k.\cos a_k$

Giải:

a) Trước hết ta lưu ý đến hai công thức đã chứng minh sau:

Áp dụng định lý Abel:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left[k-(k+1)\right].B_n-n.B_n=-\sum_{k=1}^{n-1}B_k+n.B_n=$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\left(a_1-\frac{d}{2}\right)-\cos\left[a_1+\left(k-\frac{1}{2}\right)d\right]}{2\sin\frac{d}{2}}+n.\frac{\sin\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right).\sin\left(\frac{n}{2}d\right)}{\sin\frac{d}{2}}$$

b) Giải tương tự.

Nhận xét:

Ta hoàn toàn có thể tổng quát hóa bài toán.

Tính:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.\sin b_k \text{ và } T_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.\cos b_k$$

Với $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ là cấp số cộng, công sai lần lượt là d và d_1. Bằng phương pháp tương tự, ta sẽ có: $S_n=(a_1-d)\sum_{k=1}^{n}\sin b_k+d\sum_{k=1}^{n}k.\sin b_k$

Bài 2: Tính:

$$S=tg^2\frac{\pi}{18}+tg^2\frac{5\pi}{18}+tg^2\frac{7\pi}{18}$$

Nhận xét:

Ta cần tìm phương trình phù hợp để áp dụng định lý Viét như đề cập.

Ta sẽ bắt đầu đi tìm phương trình đó.

Giải:

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{18}\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{6}(2k+1)=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (tg3x)^2=\left[tg\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)\right]^2=\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\frac{3tgx-tg^3x}{1-3tg^2x}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3tg^6x-27tgx+33tg^2x-1=0$$

Đặt $t=tg^2x$, ta có:

Phương trình: $3t^3-27t^2+33t-1=0$ có các nghiệm $tg^2\frac{3\pi}{18}$, $tg^2\frac{5\pi}{18}$, $tg^2\frac{7\pi}{18}$

Theo Viét: $tg^2\frac{\pi}{18}+tg^2\frac{5\pi}{18}+tg^2\frac{7\pi}{18}=9$

Bài 3: Tính tổng:

$$S=\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}+...+\cos\frac{9\pi}{10}$$

Nhận xét: Ta thấy bài này có dạng $x=\frac{(2k+1)\pi}{10}$. Vậy nếu chọn $\cos 5x$ thì rõ ràng thay năm giá trị trên vào ta đều có $\cos 5x=0$

Giải:

Bây giờ ta sẽ tìm công thức cho $\cos 5x$

Đặt: $\cos 5x = A\cos^5 x + B\cos^3 x + C\cos x$

thay $x = 0, x = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{\pi}{3}$ ta giải hệ phương trình theo A, B, C ta có

A = 16, B = -20, C = 5

Vậy: $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

Vậy các giá trị $\cos\dfrac{\pi}{10}, \cos\dfrac{5\pi}{10}, \cos\dfrac{7\pi}{10}, \cos\dfrac{9\pi}{10}$ là các nghiệm của đa thức:

$$P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Vậy theo Viét ta có: $S = 0 \Rightarrow arctg\dfrac{2n}{1+n^2+n^4} = arctg\dfrac{x+y}{1-xy} = arctgx + arctgy$

III.PHƯƠNG PHÁP SỐ PHỨC

a. Cơ sở:

Phương pháp này chủ yếu dựa trên hai công thức:

1.Công thức Moivre:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

2.Công thức Euler: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

***Hệ quả:**

Ta có: $1 - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left[e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}\right] = -2i\sin\dfrac{\alpha}{2}.e^{i\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\dfrac{\alpha}{2}.e^{i\frac{\alpha}{2}}$

Bây giờ ta xét một số bài tóan.

Bài 1: Tính:

a. $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}.\cos kx$ b. $T_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}.\sin kx$

Giải:

Ta xét tổng:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}.\cos kx + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}.\sin kx = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}.(\cos x + i\sin x)^n$$

$$=(\cos x + i\sin x).\frac{1-(-1)^n(\cos x + i\sin x)^n}{1+(\cos x + i\sin x)}$$

$$=\frac{\left[\cos x - (-1)^n\cos(n+1)x\right] + \left[\sin x - (-1)^n\sin(n+1)x\right]i}{(1+\cos x) + i\sin i}$$

$$=\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}\left[\left(\cos x-(-1)^n\cos(n+1)x\right)(1-\cos x)+\sin x\left(\sin x-(-1)^n\sin(n+1)x\right)\right]+$$

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}\left[(1+\cos x)\left(\sin x-(-1)^n\sin(n+1)x\right)-\sin x\left(\cos x-(-1)^n\cos(n+1)x\right)\right]i$$

$$=\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}\left[1+\cos x-(-1)^n.2\cos\frac{2n+1}{2}x.\cos\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}\left[\sin x-(-1)^n\sin\frac{2n+1}{2}x.cox\frac{x}{2}\right]i$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-(-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{x}{2}}+\frac{\sin\frac{x}{2}-(-1)^n\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{x}{2}}i$$

Từ đó suy ra:

a. Với n chẵn: $S_n=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x.\sin\frac{n}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}$; Với n lẻ: $S_n=\dfrac{+cos\frac{n+1}{2}x.\sin\frac{n}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}$

b. Với n chẵn: $T_n=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x.\sin\frac{n}{2}x}{c\tilde{a}\frac{x}{2}}$; Với n lẻ: $T_n=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x.cos\frac{n}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}$

Ta sẽ tiến hành tổng quát hóa bài tóan 1.

Bài 2: Tính:

a. $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(a_k)$ b. $T_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(a_k)$

Với *{a_i}* là cấp số cộng, công sai d.

Nhận xét:

Trước khi tiến hành giải, ta chú ý đến tiến trình giải tóan dạng này.

- Đôi khi gộp S_n và T_n , nhóm hạng tử và dùng công thức Moivre.
- Sử dụng tính chất cấp số nhân để biến đổi.
- Cuối cùng, tách phần thực và phần ảo.

Để giải bài này ta chú ý hai kết quả:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x.\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x.\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

Giải:

a. Ta có:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \cos a_0 + \cos(a_o + d) + ... + \cos(a_0 + nd)$$

$$= \cos a_0 + (\cos a_0 . \cos d - \sin a_0 . \sin d) + (\cos a_0 . \cos nd - \sin a_0 . \sin nd)$$

$$= \cos a_0 (1 + \cos d + ... + \cos nd) + \sin a_0 (\sin d + ... + \sin nd)$$

$$= \cos a_0 . \frac{\sin \frac{n+1}{2} d . \cos \frac{n}{2} d}{\sin \frac{d}{2}} - \sin a_0 \frac{\sin \frac{n+1}{2} d . \sin \frac{n}{2} d}{\sin \frac{d}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} d . \cos\left(a_0 + \frac{n}{2} d\right)}{\sin \frac{d}{2}}$$

b. Hòan tòan tương tự.

Bài 3: Tính:

a. $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . \cos\left[(k+1)x\right]$ b. $T_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . \sin\left[(k+1)x\right]$

<u>Nhận xét</u>:

Ta cần nhớ lại công thức nhị thức Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k . a^k b^{n-k}$$

Kết hợp với công thức Moivre, ta sẽ giải được bài tóan này.

Ngòai ra cần chú ý đường lối giải bằng phương pháp này (được nêu ở bài 2)..

Giải:

Ta có: $S_n + iT_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\cos(k+1)x + \sin(k+1)x\right]$

Áp dụng Moivre: $S_n + iT_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\cos x + i \sin a\right]^{k+1}$

Do vậy nếu đặt $t = \cos x + i \sin x$

$$\Rightarrow S_n + iT_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . t^{k+1} = t(t+1)^n$$

$$= (\cos x + i \sin x)(\cos x + 1 + i \sin x)^n$$

$$= 2^n . \cos \frac{nx}{2} (\cos x + i \sin x)\left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}\right)$$

$$= 2^n . \cos \frac{nx}{2}\left(\cos \frac{n+2}{2} x + i \sin \frac{n+2}{2} x\right)$$

Từ đây suy ra:

a. $S_n = 2^n . \cos \frac{nx}{2} . \cos \frac{n+2}{2} x$

b. $T_n = 2^n . \cos \frac{nx}{2} . \sin \frac{n+2}{2} x$

VI. PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM:

a. Cơ sở :

- Phương pháp sử dụng đạo hàm để tính tổng dựa trên nguyên lý sau :

Nếu bằng cách nào đó đã biết trước một tổng *P(x)* nhận giá trị m . Mặt khác tổng *S(x)* cần tính là đạo hàm cấp *k* hay có dạng liên quan thì ta sẽ có :

$$P = m\ ;\ S = P^{(k)} \Rightarrow S = m^{(k)}$$

Với và là đạo hàm cấp *k* của P_n và giá trị của đạo hàm cấp đó.

Các dạng thường gặp là:

$$S(x) = P'(x)$$

$$S(x) = (xP(x))'$$

$$S(x) = (\ln|P(x)|)'$$

$$S(x) = \left[f(P(x))\right]' \Rightarrow S(x) = P'(x).f'(x)$$

Dạng tổng nên áp dụng phương pháp này: f(x): hàm lượng giác cơ bản.
Khi giải ta nên xét các khả năng có thể xảy ra để đạo hàm có nghĩa.
Bây giờ ta đi vào bài tóan cụ thể.

Bài 1: Tính các tổng:

a. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\sin kx$

b. $T_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx$

Giải:

a. Như đã nói ở trên, ta cần biết kết quả sau để tiến hành giải bài tóan bằng phương pháp này:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right).\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right).\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

a. Chú ý rằng:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\sin kx\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[-(\cos kx)'\right] = -\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)'$$

$$\Rightarrow S_n = -\left[\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right).\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]'$$

b.Tương tự

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\cos kx\right) = \sum_{k=1}^{n}(\sin kx)' = \left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)'$$

<u>Nhận xét</u>:

Bài này có hai hướng tổng quát:

<u>Hướng 1</u>: Tính tổng:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \qquad \text{và} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$$

với $\{a_k\}$ là cấp số cộng.

Ta sẽ giải bài này bằng nhận xét rằng:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx = \sum_{k=1}^{n}\left[a_1 + (k-1)d\right]\sin kx$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(a_1 - d) + kd\right]\sin kx$$

$$= (a_1 - d)\sum_{k=1}^{n}\sin kx + d\sum_{k=1}^{n} k\sin kx$$

Rồi áp dụng bài tóan trên cho tổng $\sum_{k=1}^{n} k\sin kx$. Giải tương tự với hàm *cos*.

<u>Hướng 2</u>: Tính:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^m \sin kx \qquad \text{và} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} k^m \cos kx$$

Ta sẽ giải cách này bằng cách dùng đạo hàm cấp *k*, với chú ý sau:

-Nếu $m \equiv 0 \pmod 4$ thì $x^m \sin kx = (\sin kx)^{(m)}$

-Nếu $m \equiv 1 \pmod 4$ thì $x^m \sin kx = -(\cos kx)^{(m)}$

-Nếu $m \equiv 2 \pmod 4$ thì $x^m \sin kx = -(\sin kx)^{(m)}$

-Nếu $m \equiv 3 \pmod 4$ thì $x^m \sin kx = -(\cos kx)^{(m)}$

Bài 2: Cho $x \neq k\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ với $k \in \mathbb{Z}$, $n \in N^+$. Hãy tính tổng sau: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{2^i}{tg(2^i x)\sin(2^i x)}$

<u>Nhận xét</u>:

Bài tóan cho ta cảm giác có liên quan đến tổng sau (đã đề cập ở phần sai phân)

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin(2^i x)} = \cot gx - \cot g(2^n x)$$

Ta sẽ khai thác đẳng thức trên trong lời giải bài này

Giải:

Ta để ý: $\left[\dfrac{1}{\sin(2^k x)}\right]' = \dfrac{-2^k}{tg(2^k x)\sin(2^k x)}$

Vậy: $S_n = -(T_n)'$

Suy ra: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{tg\left(2^k x\right)\sin\left(2^k x\right)} = -\left(\cot gx - \cot g2^n x\right)' = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2^n}{\sin^2\left(2^n x\right)}$

Bài 3: Cho $x \neq \frac{k\pi}{2^{n+1}}, \left(k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+\right)$. Hãy tính tổng: $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k tg\left(2^k x\right)$

Giải:

Đây thực sự là bài tóan khó khi sử dụng phương pháp này, bởi vì phép đặt sau là rất đặc biệt và cho kết quả bất ngờ.

Đặt: $T_n = \cos x.\cos 2x.\cos\left(2^2 x\right)...\cos\left(2^n x\right) = \prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x$

Theo giả thiết $x \neq \frac{k\pi}{2^{n+1}}, \left(k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+\right)$, suy ra $T_n \neq 0$

Ta sẽ có:

$T_n' = -\sin x.\cos 2x...\cos\left(2^n x\right) - 2\cos x.\sin 2x....\cos\left(2^n x\right)... -2^n \cos x...\sin 2^n x$

Do $T_n \neq 0$, nên: $\frac{T_n'}{T_n} = -tgx - 2tg2x - ...2^n\left(tg2^n x\right) = -S_n$

Vậy: $S_n = \frac{T_n'}{T_n}$

Đến đây ta chú ý đến đẳng thức quen thuộc:

$$T_n = \prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x = \frac{\sin\left(2^{n+1} x\right)}{2^{n+1}\sin x}$$

Suy ra: $T_n' = \frac{2^{n+1}\sin x.\cos(2^{n+1}x) - \cos x.\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin^2 x}$

Vậy ta sẽ có: $S_n = \cot gx - 2^{n+1}.\cot g\left(2^{n+1} x\right)$

Bài 4: Tính tổng sau: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} tg\frac{x}{2^k}$

<u>Nhận xét</u>:

Bài tóan có vẻ đơn giản, nhưng đó chỉ là vẻ bề ngòai. Để áp dụng phương pháp này, nhất thiết phải tìm ra hàm số gốc của S_n. Vậy nó là gì? Từ đầu bài viết chúng ta chưa đề cập đến dạng:

$$S(x) = \left(\ln\left|(x)\right|\right)'$$

Vậy ta hãy thử dạng này với chú ý: (Ta sử dụng tích phân để có được hàm số gốc)

$$\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)' = \frac{-1}{2}tg\frac{x}{2}$$

Giải:

Áp dụng công thức vừa nêu, ta có:

$$\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|\right)' = \frac{-1}{2^k}tg\frac{x}{2^k}$$

(với $k = 1, 2, ..., n$)

Vì thế nếu đặt: $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$ thì $S_n = -\left(\ln|P_n|\right)'$

Chú ý rằng: $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \dfrac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}.2^n}$

Do vậy, ta có: $S_n = -\left(\ln\left|\dfrac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}.2^n}\right|\right) = \left(-\ln|\sin x| + \ln\left|\sin\frac{x}{2^n}\right| + n\ln 2\right)$

$$= -\cot gx + \frac{1}{2^n}.\cot g\frac{x}{2^n}$$

V. NHÌN LẠI CÁC PHƯƠNG PHÁP:

Có thể nói, tính tổng các giá trị lượng giác là phần quyết định của nhiều bài tóan. Chẳng hạn là bài tóan trong kì kiểm tra chuyên của lớp $11A_1$ vừa qua:

Giải phương trình: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sin\left(2^i x\right)} = \dfrac{1}{\sin x}$

Nhưng có thể tính được tổng các giá trị lượng giác thì cần áp dụng một hay tổng hợp các phương pháp đã nêu.

-Đối với phương pháp sai phân: ưu điểm là chỉ sử dụng kiến thức rất cơ bản, dễ thực hiện nhưng cần nhớ nhiều công thức và đẳng thức.

-Đối với phương pháp đại số: khai triển Abel tuy mạnh nhưng lại dựa trên một số tổng có sẵn và áp dụng lại, còn áp dụng Viét thì chỉ tính hữu hạn giá trị, không thể tính cho trường hợp tổng quát.

-Đối với phương pháp số phức: chứng minh khá độc đáo, hấp dẫn nhưng lại vượt ngòai chương trình phổ thông nên chỉ nên dùng trong việc tìm hiểu thêm về tóan học. Đây là một phương pháp tham khảo nên ở phần trên ta không đi sâu.

-Đối với phương pháp đạo hàm: tương tự như phương pháp đại số, nó dựa trên các tổng cơ bản có sẵn. Ưu điểm là nhanh, trình bày gọn gẽ, nhưng điểm yếu là sử dụng lại một số đẳng thức quen thuộc.

Tóm lại các phương pháp đã nêu không có phương pháp nào là hòan thiện. Ta cần kết hợp các phương pháp khéo léo thì mới giải quyết trọn vẹn bài tóan. Một đề nghị nhỏ là nên sử dụng phương pháp sai phân hay số phức tính tổng đơn giản, rồi lấy đó làm cơ sở cho hai phương pháp còn lại, thì hiệu quả rất cao.