Một số cách chứng minh
BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT

1. Bất đẳng thức Nesbitt: *Nếu* a,b,c *là các số dương thì ta có bất đẳng thức*

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

2. Một số cách chứng minh.

Cách 1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì theo **AM – GM** :

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

và

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức này ta có điều phải chứng minh. □

Cách 2. Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$2a(a+b)(c+a)+2b(b+c)(a+b)+2c(c+a)(b+c)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2\geq 0$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 3. Đặt $x=b+c, y=c+a, z=a+b$ thì $a=\frac{y+z-x}{2}, b=\frac{z+x-y}{2}, c=\frac{x+y-z}{2}$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 6$$

luôn đúng theo bất đẳng thức **AM – GM**. □

Cách 4. Đặt $Q=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}, R=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$ thì theo **AM – GM** ta có

$$P+Q=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3, P+R=\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+b}{a+b}\geq 3$$

Suy ra $2P+Q+R\geq 6$, mà $Q+R=3$, nên $P\geq\frac{3}{2}$. □

Cách 5. Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$P=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Cách 6. Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$, thế thì $\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}$. Áp dụng bất đẳng thức **Chebyshev** cho hai dãy đơn điệu cùng chiều ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\right)$$

Hay $P\geq\frac{1}{3}(P+3)$, nghĩa là $P\geq\frac{3}{2}$. □

Cách 7. Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge a,\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\ge b,\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge c$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta được
$$\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.\ \square$$
Cách 8. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Xét hàm $f(x)=\frac{x}{3-x}$ trên khoảng (0,3). Ta có $f''(x)=\frac{6}{(3-x)^3}>0$, suy ra $f(x)$ là hàm lõm trên (0,3) nên áp dụng bất đẳng thức **Jensen** ta được
$$P=f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f(1)=\frac{3}{2}.\ \square$$

Cách 9. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Ta có
$$\frac{a}{3-a}\ge\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(a-1)\qquad(1)$$
Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow 3(a-1)^2\ge 0$ luôn đúng với mọi a dương.
Trong (1) thay a lần lượt bởi b và c rồi cộng theo vế ta được
$$P=\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(a+b+c-3)=\frac{3}{2}.\ \square$$
Cách 10. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có
$$\frac{a}{b+c}+\frac{a(b+c)}{4}\ge a,\frac{b}{c+a}+\frac{b(c+a)}{4}\ge b,\frac{c}{a+b}+\frac{c(a+b)}{4}\ge c$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta được
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}\ge a+b+c-\frac{(a+b+c)^2}{6}=\frac{3}{2}.\ \square$$
Cách 11. Ta có nhận xét rằng $\frac{a}{b+c}\ge\frac{1}{4}.\frac{8a-b-c}{a+b+c}$ (2)

Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow(2a-b-c)^2\ge 0$ luôn đúng. Tương tự ta cũng có
$$\frac{b}{c+a}\ge\frac{1}{4}.\frac{8b-c-a}{a+b+c}\ \text{ và }\ \frac{c}{a+b}\ge\frac{1}{4}.\frac{8c-a-b}{a+b+c}$$
Suy ra
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{1}{4}.\frac{(8a-b-c)+(8b-c-a)+(8c-a-b)}{a+b+c}=\frac{3}{2}.\ \square$$
Cách 12. Ta có
$$P-\frac{3}{2}=\frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}+\frac{(b-c)^2}{2(b+a)(c+a)}+\frac{(c-a)^2}{2(c+b)(a+b)}\ge 0.\ \square$$
Cách 13. Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, ta có
$$P-\frac{3}{2}=\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{a+b-2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c)\ge 0.\ \square$$

Cách 14. Đặt $f(a,b,c)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ và $t=\frac{a+b}{2}$ ta có

$$f(a,b,c)-f\left(t,t,c\right)=\frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b+2c)}\ge 0$$

và

$$f\left(t,t,c\right)-\frac{3}{2}=\frac{2t}{c+t}+\frac{c}{2t}-\frac{3}{2}=\frac{(c-t)^2}{2t(c+t)}\ge 0$$

Suy ra $f(a,b,c)\ge f\left(t,t,c\right)\ge\frac{3}{2}$. □

Cách 15. Đặt $f(a,b,c)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ và $t=\sqrt{ab}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, ta có $t\ge c$ và

$$f(a,b,c)-f(a,b,t)=\frac{a(t-c)}{(b+c)(b+t)}+\frac{b(t-c)}{(c+a)(t+a)}+\frac{c-t}{a+b}$$
$$\ge\frac{t-c}{a+b}\left(\frac{a}{b+t}+\frac{b}{t+a}-1\right)=\frac{t-c}{a+b}.\frac{(a-b)^2}{(b+t)(t+a)}\ge 0$$

Mặt khác ta lại có

$$f(a,b,t)-\frac{3}{2}=\frac{(a-b)^2}{2(b+t)(t+a)}+\frac{(a-t)^2}{2(b+t)(a+b)}+\frac{(t-b)^2}{2(a+b)(t+a)}\ge 0$$

Suy ra $f(a,b,c)\ge f(a,b,t)\ge\frac{3}{2}$. □

Cách 16. Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\right)=\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+b}$$
$$\ge\frac{a-b}{a+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+c}=\frac{a-b+b-c+c-a}{a+c}=0.$$

Suy ra

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$

Nên

$$2P=\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$
$$=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\ge 3\quad(\mathbf{AM-GM})$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 17. Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** cho ba số dương ta có

$$P+\frac{3}{2}=\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}+\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}+\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right)}$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right)\ge 1$$
$$\Leftrightarrow(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)\ge 8(a+b)(b+c)(c+a)$$

Lại sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** thì

$$2a+b+c=(a+b)+(a+c)\ge 2\sqrt{(a+b)(a+c)}$$

Tương tự với hai bất đẳng thức còn lại rồi nhân theo vế ta được điều phải chứng minh. □

Cách 18. Tương tự ***cách 17***, sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** thì

$$P+3=\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}+1\right)\left(\frac{b}{c+a}+1\right)\left(\frac{c}{a+b}+1\right)}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{a}{b+c}+1\right)\left(\frac{b}{c+a}+1\right)\left(\frac{c}{a+b}+1\right)\ge\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3\ge 27(a+b)(b+c)(c+a)$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì theo **AM – GM** :

$$8(a+b+c)^3=[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^3\ge 27(a+b)(b+c)(c+a)\,.\ \square$$

Cách 19. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng tương đương sau

$$\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}+\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}+\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a-b-c}{b+c}+\frac{2b-c-a}{c+a}+\frac{2c-a-b}{a+b}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$, thế thì

$$\begin{cases}2a-b-c\ge 2b-c-a\ge 2c-a-b\\ \dfrac{1}{b+c}\ge\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{1}{a+b}\end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$\frac{2a-b-c}{b+c}+\frac{2b-c-a}{c+a}+\frac{2c-a-b}{a+b}$$

$$\ge\frac{1}{3}\left[(2a-b-c)+(2b-c-a)+(2c-a-b)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=0$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 20. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Ta có

$$3(a-1)^2\ge 0\Leftrightarrow 4a\ge 10a-3a^2-3=(3-a)(3a-1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{3-a}\ge\frac{3a-1}{4}\qquad (3)$$

Trong (3) thay a bởi b,c rồi cộng lại theo vế ta được

$$P=\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3a-1}{4}+\frac{3b-1}{4}+\frac{3c-1}{4}=\frac{3}{2}.\ \square$$

Cách 21. Đặt $\frac{b}{c}=x,\frac{c}{a}=y,\frac{a}{b}=z$ ta có $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{1+zx}+\frac{y}{1+xy}+\frac{z}{1+yz}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right)\ge x+y+z+xy+yz+zx$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** cho ba số ta có

$$\frac{x}{z}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}=3x$$

Từ đó dễ dàng suy ra $\quad\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\ge x+y+z$

Chứng minh tương tự cho $\quad\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\ge xy+yz+zx$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 22. Đặt $x=\dfrac{a}{b+c}, y=\dfrac{b}{c+a}, z=\dfrac{c}{a+b}$ thì $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=2 \quad (4)$

Ta sẽ chứng minh $x+y+z\geq\dfrac{3}{2}$.

Thật vậy, giả sử $x+y+z<\dfrac{3}{2}$, thế thì theo bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\geq\frac{9}{3+x+y+z}>\frac{9}{3+\frac{3}{2}}=2 \text{ (mâu thuẫn với (4))}$$

Vậy $x+y+z\geq\dfrac{3}{2}$, đó là điều phải chứng minh. □

Cách 23. Đặt $x=\dfrac{a}{b+c}, y=\dfrac{b}{c+a}, z=\dfrac{c}{a+b}$ thì $P=x+y+z$.

Suy ra $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=2$ hay $xy+yz+zx+2xyz=1$.

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$xy+yz+zx+2xyz\leq\frac{1}{3}P^2+\frac{2}{27}P^3$$

Nên $$1\leq\frac{1}{3}P^2+\frac{2}{27}P^3\Leftrightarrow(2P-3)(P+3)^2\geq 0\Leftrightarrow P\geq\frac{3}{2}. \ \square$$

Cách 24. Đặt $x=\dfrac{a}{b+c}, y=\dfrac{b}{c+a}, z=\dfrac{c}{a+b}$. Xét hàm $f(t)=\dfrac{t}{t+1}$ với $t>0$ ta có

$$f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}>0 \text{ và } f''(t)=-\frac{2}{(t+1)^3}<0 \text{ với mọi } t\in(0;+\infty)$$

Suy ra $f(t)$ là hàm lõm nên theo bất đẳng thức **Jensen** thì

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}=\frac{1}{3}=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Mà hàm f tăng ngặt trên $(0;+\infty)$ nên ta có

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow P=x+y+z\geq\frac{3}{2}. \ \square$$

Cách 25. Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$. Đặt $f(a)=\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

Ta có $f'(a)=\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{b}{(c+a)^2}-\dfrac{c}{(a+b)^2}\geq\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{b}{(c+b)^2}-\dfrac{c}{(c+b)^2}=0$

Suy ra $f(a)\geq f(b)=\dfrac{2b}{b+c}+\dfrac{c}{2b}=g(b)$

Lại có $g'(b)=\dfrac{2c}{(b+c)^2}-\dfrac{c}{2b^2}\geq\dfrac{2c}{(b+b)^2}-\dfrac{c}{2b^2}=0$

Suy ra $g(b)\geq g(c)=\dfrac{2c}{c+c}+\dfrac{c}{2c}=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $P=f(a)\geq g(b)\geq g(c)=\dfrac{3}{2}$. □

Cách 26. Đặt $x=\dfrac{a}{c}, y=\dfrac{b}{c}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$, ta có $x\geq y\geq 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{3}{2}$$

Theo bất đẳng thức **AM – GM** thì

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{x+1}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\geq 2-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$2-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{y+1}\ge\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow\frac{y-1}{2(y+1)}\ge\frac{y-1}{(x+1)(x+y)}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $x\ge y\ge 1$ nên $y-1\ge 0$ và $2(y+1)\le(x+1)(x+y)$. □

Cách 27. Làm như ***cách 24***, ta cần chứng minh

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{3}{2}\quad \text{với } x\ge y\ge 1.$$

Đặt $A=x+y$ và $B=xy$, bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{x^2+y^2+x+y}{(x+1)(y+1)}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{3}{2}$$

Hay

$$\frac{A^2-2B+A}{A+B+1}+\frac{1}{A}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2A^3-A^2-A+2\ge B(7A-2)$$

Để ý rằng $7A-2>0$ và $A^2\ge 4B$, suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$4(2A^3-A^2-A+2)\ge A^2(7A-2)\Leftrightarrow(A-2)^2(A+2)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có điều phải chứng minh. □

Cách 28. Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$a+\frac{b+c}{2}+\frac{b+c}{2}\ge 3\sqrt[3]{a\frac{(b+c)^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge\frac{27}{4}a(b+c)^2\Leftrightarrow\sqrt{(a+b+c)^3}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a\sqrt{a}.\frac{b+c}{a}$$

Suy ra $\dfrac{a}{b+c}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}$.

Từ đó ta chứng minh được $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Ta chỉ cần chứng minh $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\ge 3$.
Thật vậy, theo bất đẳng thức **AM – GM** thì

$$\begin{cases}a\sqrt{a}+a\sqrt{a}+1\ge 3a\\ b\sqrt{b}+b\sqrt{b}+1\ge 3b\\ c\sqrt{c}+c\sqrt{c}+1\ge 3c\end{cases}$$

Suy ra $2(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})+3\ge 3(a+b+c)=9$,hay $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\ge 3$. □

Cách 29. Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$2a+(b+c)\ge 2\sqrt{2a(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow(2a+b+c)^2\ge 8a^2.\frac{b+c}{a}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}\ge\frac{8a^2}{(2a+b+c)^2}$$

Từ đó ta chứng minh được $P\ge\dfrac{8a^2}{(2a+b+c)^2}+\dfrac{8b^2}{(2b+c+a)^2}+\dfrac{8c^2}{(2c+a+b)^2}$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$,ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2}{(a+3)^2}+\frac{b^2}{(b+3)^2}+\frac{c^2}{(c+3)^2}\ge\frac{3}{16}$$

Để ý rằng $\dfrac{a^2}{(a+3)^2}\ge\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{32}(a-1)\qquad(5)$

Thật vậy, $(5)\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}(a-1)^2(a-3)\le 0$ luôn đúng vì $0<a<3$.

Trong (5) thay a lần lượt bởi b,c rồi cộng theo vế các bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^2}{(a+3)^2}+\frac{b^2}{(b+3)^2}+\frac{c^2}{(c+3)^2}\ge\frac{3}{16}+\frac{3}{32}(a+b+c-3)=\frac{3}{16}.\ \square$$

Cách 30. Trước hết ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} \ge \frac{3}{2}\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}} \qquad (6)$$

Thật vậy, (6) $\Leftrightarrow 2(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}) \ge 3\sqrt{a}(b+c)$ (7)

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{b^3} \ge 3b\sqrt{a} \\ \sqrt{a^3}+\sqrt{c^3}+\sqrt{c^3} \ge 3c\sqrt{a} \end{cases}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức này cho ta (7).

Xây dựng thêm hai bất đẳng thức tương tự dạng (6) rồi cộng chúng theo vế ta được

$$P \ge \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}+\frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}+\frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}\right)=\frac{3}{2}. \ \square$$

Cách 31. Ta có

$$\begin{aligned} 2P &= \frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} \\ &= \frac{(a+b)+(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)+(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)+(c+b)}{a+b}-3 \\ &= \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}-3 \\ &\ge 6-3=3 \qquad (\textbf{AM – GM} \text{ cho 6 số}) \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 32. Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Thế thì

$$\frac{1}{b+c} \ge \frac{1}{c+a} \ge \frac{1}{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức **hoán vị** ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b} \end{cases}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$2P \ge \frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{c+a}+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=3$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 33. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{a(a+b+c)}{b+c} \ge \frac{3(a+b+c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Suy ra

$$a^2 \ge b^2 \ge c^2 \quad \text{và} \quad \frac{1}{b+c} \ge \frac{1}{c+a} \ge \frac{1}{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức **hoán vị** ta có

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b} \\ \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b} \end{cases}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\right)$$
$$\ge\frac{1}{4}\left[\frac{(a+b)^2}{a+b}+\frac{(b+c)^2}{b+c}+\frac{(c+a)^2}{c+a}\right]$$
$$=\frac{a+b+c}{2}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 34. Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ và $a+b+c=1$. Khi đó $a\ge\frac{1}{3}$, $c\le\frac{1}{3}$ suy ra $a+b=1-c\ge\frac{2}{3}$, nên $(a,b,c)\succ\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức **Karamata** cho hàm $y=f(x)=\frac{x}{1-x}$, lồi trên (0,1), đối với bộ trội $(a,b,c)\succ\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, ta có

$$P=f(a)+f(b)+f(c)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Cách 35. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$. Sử dụng bất đẳng thức

AM – GM ta có

$$(2-2a)(1+a)(1+a)\le\left[\frac{(2-2a)+(1+a)+(1+a)}{3}\right]^3=\frac{64}{27}$$

Do đó $\frac{a}{1-a}\ge\frac{27}{32}a(1+a)^2$. Tương tự

$$\frac{b}{1-b}\ge\frac{27}{32}b(1+b)^2,\frac{c}{1-c}\ge\frac{27}{32}c(1+c)^2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và sử dụng kết quả quen biết $\frac{x^n+y^n+z^n}{3}\ge\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n$ với mọi $x,y,z\ge 0,n\ge 1$ ta được

$$P=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\ge\frac{27}{32}\left[(a^3+b^3+c^3)+2(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)\right]$$
$$\ge\frac{27}{32}\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^3+6\left(\frac{1}{3}\right)^2+1\right]=\frac{3}{2}.\ \square$$

Cách 36. t tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Hiển nhiên là

$$(a-1)^2\ge 0\Leftrightarrow a+1\ge a(3-a)$$
$$\Leftrightarrow\frac{a}{3-a}\ge\frac{a^2}{a+1}\quad(\text{ vì } a,b,c\in(0,3))$$

Hoàn toàn tương tự, ta có $\frac{b}{3-b}\ge\frac{b^2}{b+1}$ và $\frac{c}{3-c}\ge\frac{c^2}{c+1}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta được

$$P=\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3}=\frac{3}{2}.\ \square$$

Cách 37. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Trước hết ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\ge 2$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** với chú ý $a+b+c=1$, ta có

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}$$
$$\geq (a+b)+(b+c)+(c+a)=2.$$

Trở lại bài toán, sử dụng bất đẳng thức quen biết $\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}$ với mọi $x,y\geq 0$, ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 2-\frac{bc}{b+c}-\frac{ca}{c+a}-\frac{ab}{a+b}\geq 2-\frac{1}{4}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]=\frac{3}{2}$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Cách 38. Sử dụng bất đẳng thức quen biết $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ ta có

$$P^2\geq 3\left[\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\right]$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\geq\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$, bất đẳng thức trở thành

$$4[ab(1-c)+bc(1-a)+ca(1-b)]\geq 3(1-a)(1-b)(1-c)$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\geq 9abc\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo **AM – GM** và ta có điều phải chứng minh. □

Cách 39. Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{2(b+c)^2}}=\frac{9a}{3\sqrt[3]{2a(b+c)(b+c)}}\geq\frac{9a}{2(a+b+c)}$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\frac{b}{c+a}+\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\geq\frac{9b}{2(a+b+c)}\quad\text{và}\quad\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\geq\frac{9c}{2(a+b+c)}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên cho ta

$$2P+\frac{3}{2}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow P\geq\frac{3}{2}.\ \square$$

Cách 40. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$. Sử dụng bất đẳng thức

AM – GM ta có

$$\frac{a^2}{(3-a)^2}=\frac{2a^3}{2a(3-a)(3-a)}\geq\frac{2a^3}{\left[\frac{2a+(3-a)+(3-a)}{3}\right]^3}=\frac{a^3}{4}\Rightarrow\frac{a}{3-a}\geq\frac{a\sqrt{a}}{2}$$

Chứng minh tương tự

$$\frac{b}{3-b}\geq\frac{b\sqrt{b}}{2}\quad\text{và}\quad\frac{c}{3-c}\geq\frac{c\sqrt{c}}{2}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\geq\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{2}\geq\frac{3}{2}.\ \square$$

Cách 41. Ta có

$$P-\frac{3}{2}=$$
$$=\frac{2\left[a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\right]+(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Theo bất đẳng thức **Schur** thì $a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\ge 0$

và hiển nhiên $(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$

suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 42. Ta có

$$P-\frac{3}{2}=\frac{(2a+b+c)(a-b)(a-c)+(2b+c+a)(b-a)(b-c)+(2c+a+b)(c-a)(c-b)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, thế thì

$$2a+b+c\ge 2b+c+a\ge 2c+a+b$$

Sử dụng bất đẳng thức **Vornicu – Schur** (hay bất đẳng thức **Schur** suy rộng) ta được

$$(2a+b+c)(a-b)(a-c)+(2b+c+a)(b-a)(b-c)+(2c+a+b)(c-a)(c-b)\ge 0$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 43. Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$P=\frac{a^4}{a^3b+a^3c}+\frac{b^4}{b^3c+b^3a}+\frac{c^4}{c^3a+c^3b}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^3b+b^3c+c^3a)+(ab^3+bc^3+ca^3)}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$2(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)+3(ab^3+bc^3+ca^3)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Vasile Cirtoaje** quen biết sau

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Tương tự

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(ab^3+bc^3+ca^3)$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Cách 44. Nhận xét rằng vế trái của bất đẳng thức là một hàm đối xứng đối với ba biến a,b,c, nếu viết nó dưới dạng đa thức thì được một đa thức có bậc không quá 3. Theo định lí **ABC** ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong hai trường hợp:

●Trường hợp 1: Một trong ba biến a,b,c bằng 0, giả sử $c=0$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge\frac{3}{2}$$

luôn đúng theo bất đẳng thức **AM – GM**.

●Trường hợp 2: Hai trong ba biến a,b,c bằng nhau, giả sử $b=c$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a+b}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{2b(a+b)}\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Cách 45. Trước hết ta sẽ phát biểu và chứng minh một bổ đề.

Bổ đề. *Với mọi* $a,b,c>0$ *thì* $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{2(ab+bc+ca)}{3}\left[\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2}\right]$

Thật vậy, bổ đề tương đương với

$$\frac{3a}{b+c}+\frac{3b}{c+a}+\frac{3c}{a+b}\ge\frac{2ab}{(a+b)^2}+\frac{2c}{a+b}+\frac{2bc}{(b+c)^2}+\frac{2a}{b+c}+\frac{2ca}{(c+a)^2}+\frac{2b}{c+a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{2ab}{(a+b)^2}+\frac{2bc}{(b+c)^2}+\frac{2ca}{(c+a)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab+ac-2bc}{(b+c)^2}+\frac{bc+ba-2ca}{(c+a)^2}+\frac{ca+cb-2ab}{(a+b)^2}\ge 0 \qquad (8)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, thế thì

$$\begin{cases}ab+ac-2bc\ge bc+ba-2ca\ge ca+cb-2ab\\ \dfrac{1}{(b+c)^2}\ge\dfrac{1}{(c+a)^2}\ge\dfrac{1}{(a+b)^2}\end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$VT(8) \geq \left[(ab+ac-2bc)+(bc+ba-2ca)+(ca+cb-2ab)\right]\left[\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right]=0$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, sử dụng bổ đề và bất đẳng thức **Iran TST 1996**

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\geq \frac{9}{4}$$

ta có ngay điều phải chứng minh. □