SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HẢI DƯƠNG	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12 THPT-NĂM HỌC 2007-2008
ĐỀ CHÍNH THỨC	MÔN THI: TOÁN Thời gian làm bài: 180 phút *Đề thi gồm: 01 trang*

Câu 1 (*2,5 điểm*)

Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx-3}{x+m}$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

a) Khi m = 2 hàm số có đồ thị là (C). Viết phương trình đường cong (C') đối xứng với (C) qua điểm I(-2 ; -1).

b) Tìm những điểm mà (C_m) không đi qua với mọi giá trị của m.

Câu 2 (*2,5 điểm*)

a) Biết ba số $2^{x+y\log_2 3}; 3^{y+1}; 4^{x-y\log_2 3}$ theo thứ tự đó là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và cũng theo thứ tự đó là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Tìm x và y.

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ có ba điểm uốn. Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là hoành độ của ba điểm uốn đó. Tính giá trị của biểu thức

$$S=\frac{x_1+1}{x_1^2+x_1+1}+\frac{x_2+1}{x_2^2+x_2+1}+\frac{x_3+1}{x_3^2+x_3+1}$$

Câu 3 (*2 điểm*)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình lần lượt là:

(C_1): $x^2+y^2=4$

(C_2): $(x+2)^2+(y+2)^2=1$

a) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

b) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (C_1) và (C_2) đồng thời đi qua điểm M(5 ; 4).

Câu 4 (*2,0 điểm*)

a) Cho hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ thoả mãn điều kiện

$$f(x)+f(y)+2xyf(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)},\forall x,y\in\mathbb{Q}^+.$$ Tính f(2007).

ở đó $\mathbb{Q}^+$ là tập hợp các số hữu tỉ dương.

b) Giải phương trình $\sqrt{3}^{\sqrt{3}^{2x}-1}=1+2x$.

Câu 5 (*1,0 điểm*)

Cho góc tam diện Oxyz có $\widehat{xOy}=\widehat{yOz}=\widehat{zOx}=60^0$. I là điểm cố định trong góc tam diện. Một mặt phẳng (Q) thay đổi và đi qua I cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện OMNP.

........................**Hết**........................

Họ và tên thí sinh...................................Số báo danh..

Chữ ký giám thị 1 ....

Chữ ký giám thị 2 ....

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN TOÁN
ĐỀ THI HSG LỚP 12 – NĂM HỌC 2007 - 2008

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1 (2,5)	a) 1,5	$m = 2 \Rightarrow (C)$: $y = \dfrac{x^2 - 4x - 3}{x+2}$.	
		Gọi (C') là đường cong đối xứng với (C) qua I. Giả sử M'(x' ; y') Khi đó M' $\in$ (C') $\Leftrightarrow \exists$ M(x ; y) $\in$ (C) sao cho M và M' đối xứng nhau	0,25
		qua I $\Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = -4 \\ y + y' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - x' \\ y = -2 - y' \end{cases}$	0,25
		Do M $\in$ (C) nên $y = \dfrac{x^2 - 4x - 3}{x+2}$	0,25
		$\Leftrightarrow -2 - y' = \dfrac{(x'+4)^2 + 4(x'+4) - 3}{-2 - x'}$	0,25
		$\Leftrightarrow y' = \dfrac{x'^2 + 10x' + 25}{x'+2}$	0,25
		Vậy (C') có phương trình là $y = \dfrac{x^2 + 10x + 25}{x+2}$	0,25
	b) 1,0	G/sử M(x_0 ; y_0) là điểm không có (C_m) nào đi qua $\Leftrightarrow$	
		pt ẩn m $y_0 = \dfrac{x_0^2 - 2mx_0 - 3}{x_0 + m}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow$	
		$\dfrac{x_0^2 - 2mx_0 - 3 - y_0x_0 - my_0}{x_0 + m} = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow$	0,25
		TH 1. pt $x_0^2 - 2mx_0 - 3 - y_0x_0 - my_0 = 0$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y_0 + 2x_0 = 0 \\ x_0^2 - 3 - y_0x_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -2x_0 \\ x_0 \neq \pm 1 \end{cases}$	0,25
		TH 2. pt (1) có nghiệm duy nhất bằng -x_0 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y_0 + 2x_0 \neq 0 \\ x_0^2 - 3 - y_0x_0 - (-x_0)(2x_0z + y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \neq -2x_0 \\ x_0 = \pm 1 \end{cases}$	0,25
		Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là ba đường thẳng: $x = \pm 1, y = -2x$ trừ hai điểm M_1(1 ; -2), M_2(-1 ; 2)	0,25
2 (2,5)	a) 1,25	Đặt $a = 2^{x + y\log_2 3}; b = 3^{y+1}; c = 4^{x - y\log_2 3}$	
		Theo gt ta có $\begin{cases} a + c = 2b \\ ac = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2ac + c^2 = 4b^2 \\ b^2 = ac \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-c)^2 = 0 \\ b^2 = ac \end{cases} \Rightarrow a = b = c$	0,25

		$\Rightarrow \begin{cases} 2^{x+y\log_2 3} = 4^{x-y\log_2 3} \\ 2^{x+y\log_2 3} = 3^{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y\log_2 3 \\ 2^{4y\log_2 3} = 3^{y+1} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y\log_2 3 \\ 3^{4y} = 3^{y+1} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \log_2 3 \end{cases}$ Thử lại thoả mãn.	0,25 0,25 0,25
	b) 1,25	Tính được $y' = \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2}$ Tính được $y'' = \frac{2x^3+6x^2-2}{(x^2+x+1)^3}$ $y'' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^3+3x^2-1,\ g'(x) = 3x^2+6x;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$ $g(0).g(-2) = (-1).3 = -3 < 0 \Rightarrow$ g(x) = 0 và do đó $y'' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm này. Do đó đó đths có ba điểm uốn pb. Ta có $g(x_1) = x_1^3+3x_1^2-1 = 0 \Leftrightarrow (x_1^3-1)+3(x_1^2+x_1+1)-3x_1-3 = 0$ $\Leftrightarrow (x_1-1)+3-\frac{3(x_1+1)}{x_1^2+x_1+1} = 0$ $\Leftrightarrow x_1-3y_1+2 = 0\ (y_1 = \frac{x_1+1}{x_1^2+x_1+1})$ Vậy $y_1 = \frac{1}{3}(x_1+2) \Rightarrow y_1+y_2+y_3 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3+6) = \frac{1}{3}(-3+6) = 1$ (Do g(x) = 0 có ba nghiệm là x_1, x_2, x_3 nên $g(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \forall x \in \mathbb{R}$. Bằng cách đồng nhất hệ số hai đa thức bằng nhau ta thu được $x_1+x_2+x_3 = -3$)	 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
3 (2,0)	a) 1,0	(C_1) có tâm $I_1(0\ ;\ 0)$, bán kính $R_1 = 2$ (C_2) có tâm $I_2(-2\ ;\ -2)$, bán kính $R_2 = 1$ TH 1. (Δ) có pt dạng x - a = 0 (không thoả mãn) TH 2. (Δ) có pt dạng y = ax + b $\Leftrightarrow$ ax - y + b = 0. Δ là tiếp tuyến chung $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{\lvert b\rvert}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \\ \frac{\lvert -2a+2+b\rvert}{\sqrt{a^2+1}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lvert b\rvert = 2\lvert -2a+2+b\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4a-4 \\ b = \frac{4a-4}{3} \end{array}\right.$ $b = 4a-4 \Rightarrow \lvert 4a-4\rvert = 2\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow a = \frac{4\pm\sqrt{7}}{3} \Rightarrow b = \frac{4\pm 4\sqrt{7}}{3}$	0,25 0,25 0,25

		$b = \frac{4a-4}{3} \Rightarrow \lvert 4a-4 \rvert = 6\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 5a^2+8a+5=0$ (Vô nghiệm)	
		Vậy các tiếp tuyến chung là $y = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}x + \frac{4 \pm 4\sqrt{7}}{3}$	0,25
	b) 1,0	Có $\lvert R_1 - R_2 \rvert < I_1I_2 < R_1 + R_2$ nên (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt A và B	
		Toạ độ A, B thoả mãn hệ $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x^2+y^2+4x+4y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y+11=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases}$	0,25
		suy ra toạ độ A và B thoả mãn phương trình: (C): $x^2+y^2-4+m(4x+4y+11)=0$, $\forall m$	0,25
		Ta chọn m sao cho (C) đi qua M(5 ; 4) $\Rightarrow m = -\frac{37}{47}$	0,25
		Khi đó (C) có dạng $\left(x - \frac{74}{47}\right)^2 + \left(y - \frac{74}{47}\right)^2 = \frac{38917}{2209}$	0,25
4 (2,0)	a) 1,0	$f(x)+f(y)+2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}, \forall x,y \in \mathbb{Q}^+$ (1)	
		Cho y = 1 ta được $f(x)+f(1)+2xf(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)} \Leftrightarrow f(x+1) = \frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+f(1)}$ (2)	
		Đặt f(1) = a thì $f(2) = \frac{1}{4}$; $f(3) = \frac{1}{5+4a}$; $f(4) = \frac{1}{4a^2+5a+7}$	0,25
		Trong (1) cho x = y = 2 ta được $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+8f(4)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4a^2+5a+7} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-\frac{9}{4} \end{array}\right.$	
		Do a > 0 nên a = 1. Vậy f(1) = 1	0,25
		Lúc đó $f(1)=1$; $f(2)=\frac{1}{4}$; $f(3)=\frac{1}{9}$; $f(4)=\frac{1}{16}$	
		Do vậy ta có thể dự đoán $f(n) = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3)	0,25
		Chứng minh (3) bằng quy nạp (Dùng (2) với x = n) Vậy $f(2007) = \frac{1}{2007^2}$	0,25
	b) 1,0	Đặt $2y = 3^x - 1$. PT đã cho có dạng $3^y = 1 + 2x$	
		Vậy ta có hệ $\begin{cases} 3^y - 1 = 2x \\ 3^x - 1 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow (I) \begin{cases} 3^y - 1 = 2x & (1) \\ 3^y - 3^x = 2(x-y) & (2) \end{cases}$	0,25
		(2) $\Leftrightarrow x = y$ vì nếu $x \neq y$ thì hai vế khác dấu.	0,25
		Thế y = x vào (1) ta được $3^x - 1 - 2x = 0$ (3)	0,25

		Khảo sát hàm số $f(x)=3^x-1-2x$, với chú ý f(0) = f(1) = 0 Ta suy ra pt (3) chỉ có hai nghiệm là 0 và 1, và do đó pt đã cho có đúng hai nghiệm là 0 và 1	0,25
5 (1,0)		Qua I kẻ các đường thẳng song song với Ox, Oy, Oz tương ứng cắt (yOz), (zOx), (xOy) tại M_1, N_1, P_1 suy ra IM_1, IN_1, IP_1 không đổi. Gọi $M_2 = MI \cap NP \Rightarrow O, M_1, M_2$ thẳng hàng	0,25
		Ta có $\frac{IM_1}{OM}=\frac{IM_2}{MM_2}=\frac{S_{\Delta INP}}{S_{\Delta MNP}}$. (Do I nằm trong góc tam diện Oxyz nên I nằm trong miền tam giác MNP.) Tương tự cộng lại ta được $\frac{IM_1}{OM}+\frac{IN_1}{ON}+\frac{IP_1}{OP}=\frac{S_{\Delta INP}+S_{\Delta IMP}+S_{\Delta IMN}}{S_{\Delta MNP}}=1$	0,25
		Áp dụng BĐT Cô - si ta được $1=\frac{IM_1}{OM}+\frac{IN_1}{ON}+\frac{IP_1}{OP}\geq 3\sqrt[3]{\frac{IM_1.IN_1.IP_1}{OM.ON.OP}}$ $\Rightarrow OM.ON.OP \geq 27IM_1.IN_1.IP_1$ (không đổi) Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{IM_1}{OM}=\frac{IN_1}{ON}=\frac{IP_1}{OP}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$ I là trọng tâm tam giác MNP.	0,25
		Mặt khác, $V_{OMNP}=\frac{1}{3}h_P.S_{MON}=\frac{1}{3}OP.\sin\alpha.\frac{1}{2}OM.ON.\sin 60^0$ với α = góc (Oz, (xOy)); $\beta = \widehat{xOy}$. Có $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow V_{OMNP}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OM.ON.OP nhỏ nhất. Theo trên giá trị nhỏ nhất của V_{OMNP} là $\frac{9}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2}.IM_1.IN_1.IP_1=\frac{9\sqrt{2}}{4}IM_1.IN_1.IP_1$	0,25

Hình vẽ Câu 5