

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
THPT NĂM HỌC 2010- 2011

Đề chính thức

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 05 tháng 11 năm 2010

(Đề thi gồm có: 01 trang)

Câu 1 (3 điểm). Giải phương trình: $(6 \sin x - 2 \sin 3x + 1)^3 = 162 \sin x - 27$

Câu 2 (3 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2(x+2) = 3(y^3 - x) + 3 \\ y^2(y+2) = 3(z^3 - y) + 3 \\ z^2(z+2) = 3(x^3 - z) + 3 \end{cases}$$

Câu 3 (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy tăng nhưng không bị chặn trên

b) Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

Câu 4 (5 điểm)

Hình chóp n- giác đều có góc tạo bởi giữa mặt bên và mặt đáy bằng α , góc tạo bởi giữa cạnh bên và mặt đáy β . Chứng minh rằng:

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \leq \tan^2 \frac{\pi}{2n}$$

Câu 5 (3 điểm)

Xét $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $3x - 6\sqrt{2x+4} = 4\sqrt{3y+18} - 2y$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1$

Câu 6 (2 điểm)

Cho đa thức $f(x)$ có bậc là 2010 thỏa mãn: $f(n) = \frac{1}{n}$ với $n = 1, 2, 3, \dots, 2011$.

Tính $f(2012)$.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
THPT NĂM HỌC 2010 – 2011**

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN

Câu 1 (3 điểm). Giải phương trình: $(6 \sin x - 2 \sin 3x + 1)^3 = 162 \sin x - 27$ (1)

Lời giải chi tiết	Điểm
$(1) \Leftrightarrow [6 \sin x - 2(3 \sin x - 4 \sin^3 x) + 1]^3 = 27(6 \sin x - 1)$ (1)	0,5đ
$\Leftrightarrow (8 \sin^3 x + 1)^3 = 27(6 \sin x - 1)$ $\Leftrightarrow 8 \sin^3 x + 1 = 3\sqrt[3]{6 \sin x - 1}$	0,5đ
Đặt: $2 \sin x = t$ ($ t \leq 2$) Phương trình trở thành: $t^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3t - 1}$	0,5đ
Đặt: $u = \sqrt[3]{3t - 1}$. Ta có hệ: $\begin{cases} u^3 + 1 = 3t \\ t^3 + 1 = 3u \end{cases}$ Giải ra ta được $t = u$	0,5đ
Với $t = u$: ta có phương trình: $t^3 - 3t + 1 = 0$ Khi đó, theo cách đặt, ta có: $8 \sin^3 x - 6 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 3x = 1$	0,5đ
$\Leftrightarrow 2 \sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$	0,5đ

Câu 2 (3 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2(x+2) = 3(y^3-x) + 3 \\ y^2(y+2) = 3(z^3-y) + 3 \\ z^2(z+2) = 3(x^3-z) + 3 \end{cases}$$

Lời giải chi tiết	Điểm
Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{R}$ Hệ trở thành $\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 3x = 3y^3 + 3 & (1) \\ y^3 + 2y^2 + 3y = 3z^3 + 3 & (2) \\ z^3 + 2z^2 + 3z = 3x^3 + 3 & (3) \end{cases}$	0, 5 đ
Đặt: $f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$ và $g(t) = 3t^3 + 3$, $t \in \mathbb{R}$	0,5 đ

Hệ trở thành: $\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$	
Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ và $g'(t) = 9t^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ Nên f, g là 2 hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$	0,5 đ
Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ, không giảm tính tổng quát giả sử $x \geq y$ Từ (1) và (2) ta có: $g(y) \geq g(z)$ suy ra $y \geq z$ nên từ (2) và (3) ta có: $g(z) \geq g(x)$ suy ra $z \geq x$. Từ đó ta có: $x = y = z$ Thay vào hệ phương trình ta được hệ có 3 nghiệm: $(1; 1; 1); \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right); \left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	1,5 đ

Câu 3 (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy tăng nhưng không bị chặn trên

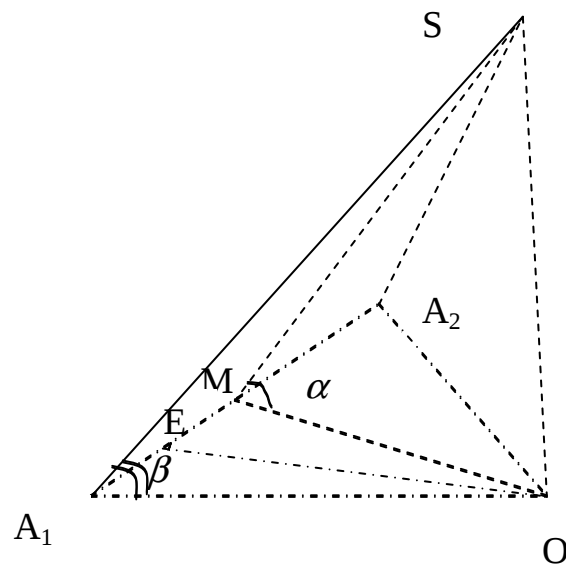
b) Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

Lời giải chi tiết	Điểm
a) + Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4) - \frac{5}{5}u_n = \frac{1}{5}(u_n - 2)^2 \geq 0; \forall n = 1, 2, \dots$ + Vậy (u_n) là dãy tăng. Từ đó, $u_n \geq u_1 = 3 \forall n = 1, 2, \dots$	0, 5 đ
+ Mặt khác nếu dãy (u_n) bị chặn trên thì nó sẽ có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \quad (a \geq 3)$ + $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4) \Rightarrow a = \frac{1}{5}(a^2 + a + 4) \Leftrightarrow a = 2$. Điều này không thể xảy ra vì $a \geq 3$. Vậy dãy (u_n) không bị chặn trên	0,5 đ
b) Theo a) Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$	0,5 đ
+ Ta có $u_{k+1} = \frac{1}{5}(u_k^2 + u_k + 4) \Leftrightarrow 5(u_{k+1} - 2) = (u_k - 2)(u_k + 3)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1} - 2} = \frac{5}{(u_k - 2)(u_k + 3)} \quad (\text{do } u_k \geq 3; \forall k \geq 1) \Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1} - 2} = \frac{1}{u_k - 2} - \frac{1}{u_{k+1} - 2}$	1,0 đ
+ Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3} = \frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2}$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$	0,5 đ

Câu 4 (5 điểm)

Hình chóp n- giác đều có góc tạo bởi giữa mặt bên và mặt đáy bằng α , góc tạo

bởi giữa cạnh bên và mặt đáy β . Chứng minh rằng: $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \leq \tan^2 \frac{\pi}{2n}$



Lời giải chi tiết	Điểm
+ Gọi hình chóp n-giác $S.A_1A_2 \dots A_n$. + Xét hình chóp $S.OA_1M$, trong đó, O là tâm của đa giác đáy, M là trung điểm cạnh A_1A_2. Khi đó, $SO \perp (OA_1M)$; $OM \perp A_1A_2$ + Góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy bằng $\angle SMO = \alpha$ + Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy bằng $\angle SA_1O = \beta$	1,0 đ
Ta có: $\angle A_1OM = \varphi = \frac{\pi}{n}$ Đặt $OA_1 = a$; $OM = b$; $OS = h$ Gọi OE là phân giác trong của góc $\angle A_1OM$	1,0 đ

Khi đó: $\sin^2 \alpha = \frac{h^2}{h^2 + b^2}; \sin^2 \beta = \frac{h^2}{h^2 + a^2}; \tan \frac{\varphi}{2} = \tan \frac{\pi}{2n} = \frac{ME}{b}$	
Do: $\frac{ME}{b} = \frac{A_1E}{a}$ nên $\frac{ME}{b} = \frac{ME + A_1E}{a + b} = \frac{MA_1}{a + b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}$	1,0 đ
Ta cần chứng minh: $\frac{h^2}{h^2 + b^2} - \frac{h^2}{h^2 + a^2} \leq \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$ $\Leftrightarrow \frac{h^2(a^2 - b^2)}{(h^2 + b^2)(h^2 + a^2)} \leq \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$ $\Leftrightarrow (h^2 + a^2)(h^2 + b^2) \geq h^2(a + b)^2$ $\Leftrightarrow (ab - h^2)^2 \geq 0$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab = h^2 \Leftrightarrow SO^2 = OA_1 \cdot OM$	2,0 đ

Câu 5 (3 điểm)

Xét $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $3x - 6\sqrt{2x + 4} = 4\sqrt{3y + 18} - 2y$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1$

Lời giải chi tiết	Điểm
Điều kiện : $x \geq -2; y \geq -6$ $3x - 6\sqrt{2x + 4} = 4\sqrt{3y + 18} - 2y$ $\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \left(\sqrt{\frac{x}{2} + 1} + \sqrt{\frac{y}{3} + 2} \right)$	0,5 đ
Đặt: $\begin{cases} \frac{x}{2} = X \\ \frac{y}{3} = Y \end{cases} (X \geq -1; Y \geq -2)$ Ta được: $X + Y = 2(\sqrt{X + 1} + \sqrt{Y + 2})$ Gọi T là tập giá trị của $P_1 = X + Y$, ta có: $a \in P_1 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$ sao cho hệ phương trình ẩn (X; Y) sau có nghiệm:	0,5 đ

$\begin{cases} X + Y = a \\ 2(\sqrt{X+1} + \sqrt{Y+2}) = a \end{cases} \quad (I)$	
Đặt: $\begin{cases} \sqrt{X+1} = u \\ \sqrt{Y+2} = v \end{cases} \quad (u, v \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} X = u^2 - 1 \\ Y = v^2 - 2 \end{cases}$ Hệ trở thành: $\begin{cases} u^2 + v^2 = a + 3 \\ u + v = \frac{a}{2} \end{cases} \quad (II)$ Ta tìm a để hệ phương trình (II) có nghiệm (u; v) với u, v ≥ 0	0,5 đ
$\Leftrightarrow$ Phương trình ẩn t: $8t^2 - 4at + a^2 - 4a - 12 = 0$ có 2 nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a - 24 \leq 0 \\ a \geq 0 \\ a^2 - 4a - 12 \geq 0 \end{cases}$	0,5 đ
$\Leftrightarrow 6 \leq a \leq 4 + 2\sqrt{10}$ Do đó: $\text{Max } P_1 = 4 + 2\sqrt{10}$; $\text{Min } P_1 = 6$ Và vì: $P = P_1 - 1$ nên:	0,5 đ
$\text{Max } P = 3 + 2\sqrt{10}$ khi: $u = v = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = u^2 - 1 \\ \frac{y}{3} = v^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 2\sqrt{10} \\ y = \frac{3(3 + 2\sqrt{10})}{2} \end{cases}$ $\text{Min } P = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 21 \end{cases}$ $\begin{cases} u = 3 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -6 \end{cases}$	0,5 đ

Câu 6 (2 điểm)

Cho đa thức f(x) có bậc là 2010 thỏa mãn: $f(n) = \frac{1}{n}$ với n = 1, 2, 3, ...2011.

Tính f(2012)

Lời giải chi tiết	Điểm
-------------------	------

Xét phương trình: $f(x) - \frac{1}{x} = 0$ Do $f(n) = \frac{1}{n}$ với $n = 1, 2, 3, \dots, 2011$ nên phương trình: $f(x) - \frac{1}{x} = 0$ có các nghiệm: $1, 2, \dots, 2011$	0,5 đ
Nhưng $f(x) - \frac{1}{x}$ không là 1 đa thức nên xét: $g(x) = x \cdot f(x) - 1$ (1) Do $\deg f(x) = 2010$ nên $\deg g(x) = 2011$ và $g(x)$ có nghiệm: $1, 2, \dots, 2011$ Nên $g(x) = a(x-1)(x-2)\dots(x-2011)$ (2)	0,5 đ
Từ (1) ta có: $g(0) = -1$ Từ (2) ta có: $-1 = g(0) = a \cdot (-1)^{2011} \cdot 2011!$ Suy ra: $a = \frac{1}{2011!}$ Như vậy: $g(x) = \frac{1}{2011!}(x-1)(x-2)\dots(x-2011)$	0,5 đ
$\Rightarrow 2012 \cdot f(2012) - 1 = g(2012) = \frac{1}{2011!}(2012-1)(2012-2)\dots(2012-2011) = 1$ $2012 \cdot f(2012) = 2 \Leftrightarrow f(2012) = \frac{1}{1006}$	0,5 đ

HẾT