



KỶ THI OLYMPIC HÀ NỘI - AMSTERDAM

MÔN TOÁN LỚP 10

Ngày thi : 25/03/2011

Thời gian : 150 phút

Bài 1 (4 điểm). Cho phương trình $\sqrt{2x^2 + mx - 1} = x - 1$ (1), với m là tham số.

- Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Bài 2 (4 điểm). Giải hệ phương trình ba ẩn số là x, y, z :

$$\begin{cases} 2x = y + \frac{2011}{y} \\ 2y = z + \frac{2011}{z} \\ 2z = x + \frac{2011}{x} \end{cases}$$

Bài 3 (4 điểm). Cho 2 số x, y thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = m - 1 \\ x + my = 3m - 3 \end{cases}$ với m là

tham số. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + 10x$.

Bài 4 (4 điểm). Cho tam giác ABC nhọn và không cân, nội tiếp đường tròn tâm O . Một đường thẳng thay đổi, song song với BC và cắt hai cạnh AB, AC của tam giác. Đường thẳng này cắt các cung AB và AC tại các điểm M và N . Các điểm I và J lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABM và CAN . Điểm P là điểm chính giữa cung BC (có chứa điểm A). Chứng minh rằng luôn có $PI = PJ$.

Bài 5 (4 điểm). Xét các tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a < b \\ f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } M = \frac{a+b+c}{b-a}.$$

-----HẾT-----

Bài 1:

a. Khi $m = 2$, phương trình (1) trở thành $\sqrt{2x^2 + 2x - 1} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 + 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{6} < 1 \\ x = -2 - \sqrt{6} < 1 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$$

điều kiện. Vậy phương trình vô nghiệm.

$$b. \text{ Phương trình (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 + mx - 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + (m+2)x - 2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $x - 1 = t$ ($t \geq 0$), (*) trở thành $t^2 + (m+4)t + 1 + m = 0$

Yêu cầu bài toán trở thành, tìm m để phương trình $t^2 + (m+4)t + 1 + m = 0$ có nghiệm duy nhất $t \geq 0$.

Ta có $\Delta = (m+2)^2 + 8 > 0, \forall m$. Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Xét hai trường hợp:

TH1: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 1 + m < 0 \Leftrightarrow m < -1$

TH2: Phương trình có 2 nghiệm, trong đó có 1 nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại là nghiệm âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m > -4 \end{cases}. \text{ Vậy } m = -1 \text{ thỏa mãn.}$$

Kết hợp 2 trường hợp trên ta có $m \leq -1$.

Bài 2 Ta có $x^2 + y^2 + 16 = 8x + 6y \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiakôpxki cho 2 cặp số $(x-4; y-3)$ và $(4; 3)$, ta có:

$$(4x + 3y - 25)^2 = [4(x-4) + 3(y-3)]^2 \leq [(x-4)^2 + (y-3)^2][4^2 + 3^2] = 225$$

$$\Leftrightarrow |4x + 3y - 25| \leq 15 \Leftrightarrow -15 \leq 4x + 3y - 25 \leq 15 \Leftrightarrow 10 \leq 4x + 3y \leq 40$$

$$\text{Vậy } A_{\max} = 40 \quad \begin{cases} \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ 4x + 3y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{32}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$A_{\min} = -15 \text{ khi } \begin{cases} \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Bài 3 Điều kiện : $x, y, z \neq 0$.

Để thấy x, y, z cùng dấu. Ta xét trường hợp $x, y, z > 0$.

Từ phương trình 1 trong hệ, áp dụng cauchy ta có $2x \geq 2\sqrt{a} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{a}$. Tương tự ta có $y \geq \sqrt{a}; z \geq \sqrt{a}$.

Đặt $f(t) = t + \frac{a}{t}$ với $t \in [\sqrt{a}; +\infty)$. Ta chứng minh được $f(t)$ là hàm đồng biến.

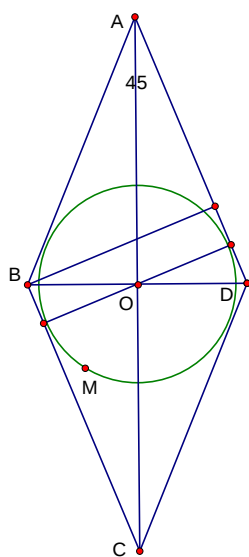
Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 2x = f(y) \\ 2y = f(z) \\ 2z = f(x) \end{cases}$. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$, do $f(t)$ đồng biến nên ta có $f(x)$

$\geq f(y) \Rightarrow 2z \geq 2x \Rightarrow z \geq x \Rightarrow z = x$. Tương tự ta suy ra $x = y = z$.

Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x = y = z = \sqrt{a} \\ x = y = z = -\sqrt{a} \end{cases}$

Bài 4 Áp dụng công thức trung tuyến trong hai tam giác MAC và MBD, ta có

:



$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{AC^2}{2}; MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{BD^2}{2}$$

$$\text{Suy ra, } MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = 4MO^2 + \frac{BD^2}{2} + \frac{AC^2}{2} =$$

$$4r^2 + \frac{4AO^2 + 4BO^2}{2} = 4r^2 + 2AB^2 = 4r^2 + 2a^2.$$

Mặt khác ta có: $2r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ suy ra

$$MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = 4\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2a^2 = \frac{5a^2}{2}$$

Bài 5: Vì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $a > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow c \geq \frac{b^2}{4a}$.

Với $0 < a < b$ và $c > 0$ suy ra $M > 0$.

Đặt $t = b - a > 0$, ta có $M = \frac{a+b+c}{b-a} \geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$

$$= \frac{9a^2+6a(b-a)+(b-a)^2}{4a(b-a)} = \frac{9a^2+6at+t^2}{4at} =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{9a^2+t^2}{4at} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9a^2t^2}}{2at} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

Đẳng thức $M = 3$ đạt được khi $\begin{cases} c = \frac{b^2}{4a} \\ t = b - a = 3a \end{cases} \quad \text{hay } b = c = 4a > 0$

-----HẾT-----