

ĐỀ THI ĐẤU TRƯỜNG VMF CỦA ĐỘI DELTA

TRẬN ĐẤU GIỮA DELTA VÀ ALPHA

Câu 1 (Số học THCS):

Chứng minh rằng: Có vô hạn bộ ba số nguyên dương m, n, p sao cho:

$$4mn - m - n = p^2 - 1$$

Giải:

Giả sử $m < n$

Đặt $n = m + a$ (a là số tự nhiên)

$$\Rightarrow 4mn - m - n + 1 = 4m^2 + 2(2a - 1)m + (1 - a) = p^2$$

$$\Leftrightarrow (4m + 2a - 1)^2 - (4a^2 - 3) = 4p^2$$

$$\Leftrightarrow (4m + 2a - 1 + 2p)(4m + 2a - 1 - 2p) = 4a^2 - 3$$

$$\text{Chọn } 4m + 2a - 1 + 2p = 4a^2 - 3, 4m + 2a - 1 - 2p = 1$$

$$\Rightarrow 4m + 2a = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{a(a - 1)}{2}$$

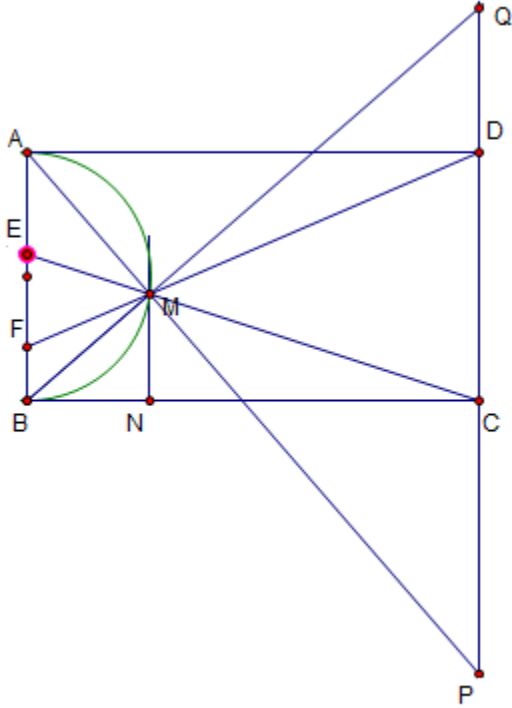
$$\Rightarrow n = \frac{a(a + 1)}{2}, p = a^2 - 1$$

Suy ra ta được 1 nghiệm của phương trình

$$m = \frac{a(a - 1)}{2}, n = \frac{a(a + 1)}{2}, p = a^2 - 1 \text{ (} a \text{ là số tự nhiên)}$$

Suy ra phương trình có vô số nghiệm nguyên dương.

Câu 2 (Hình học THCS): Cho hình chữ nhật ABCD với $AB < BC$. Vẽ nửa đường tròn đường kính AB nằm trên nửa mặt phẳng chứa CD bờ là đường thẳng AB. M là điểm trên nửa đường tròn (M khác A và B). Các đường thẳng MA, MB cắt đường thẳng CD theo thứ tự tại P, Q. Các đường thẳng MC, MD cắt đường thẳng AB theo thứ tự tại E, F. Xác định vị trí M trên nửa đường tròn để tổng $PQ + EF$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.



Giải: Đặt $AB = a$; $BC = b$ ($a < b$). Kẻ $MN \perp BC$ ($N \in BC$), khi đó theo định lý Thales ta có

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QM}{MB} = \frac{CN}{NB}; \quad \frac{EF}{CD} = \frac{EM}{MC} = \frac{NB}{CN}$$

Suy ra $PQ + EF = a \cdot \left(\frac{CN}{NB} + \frac{NB}{CN} \right)$ (1)

Bây giờ ta đặt $S = \frac{CN}{NB} + \frac{NB}{CN}$, lúc này

$$S = \frac{CN^2 + NB^2}{NB \cdot CN} = \frac{(NB + CN)^2}{NB \cdot CN} - 2$$

Từ đó $\frac{1}{S+2} = \frac{NB \cdot CN}{b^2}$, suy ra

$$1 - \frac{4}{S+2} = \frac{(NB + CN)^2 - 4NB \cdot CN}{b^2} = \frac{(CN - NB)^2}{b^2}$$

Vì M thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $NB \leq \frac{a}{2}$, dẫn đến $CN \geq \frac{2b-a}{2}$. Do

$$\text{đó } 1 - \frac{4}{s+2} \geq \frac{(b-a)^2}{b^2}, \text{ suy ra } \frac{4}{s+2} \leq \frac{2ab-a^2}{b^2}$$

$$\text{Vậy } S \geq \frac{4b^2-4ab+2a^2}{2ab-a^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta thu được bất đẳng thức $PQ + EF \geq \frac{4b^2-4ab+2a^2}{2ab-a^2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $NB = \frac{a}{2}$

Tóm lại giá trị nhỏ nhất của $PQ + EF$ là $\frac{4b^2-4ab+2a^2}{2ab-a^2}$ khi và chỉ khi M là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB

Câu 3 (hình học THPT): Cho lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Thỏa mãn: $AB=BC$; $CD=DE$; $EF=FA$. Chứng minh: $S_{ACE} < S_{BDF}$.

Lời giải:

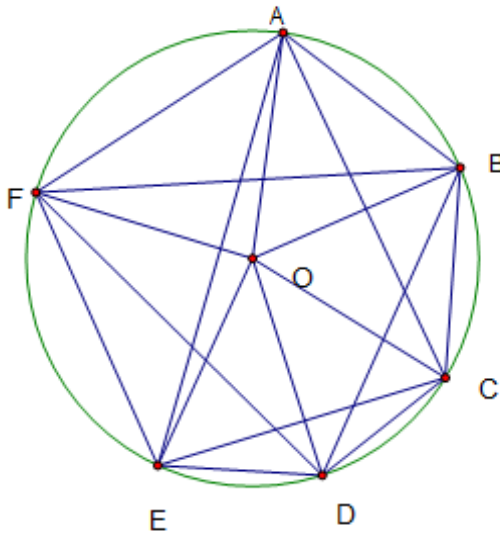
Đặt $\widehat{CAE} = \alpha$; $\widehat{AEC} = \beta$; $\widehat{ACE} = \gamma$.

Do đó:

$$\widehat{COD} = \alpha; \widehat{DOE} = \alpha$$

$$\widehat{AOB} = \beta; \widehat{BOC} = \beta$$

$$\widehat{EOF} = \gamma; \widehat{FOA} = \gamma$$



$$S_{ACE} = \frac{EC \cdot CA \cdot AE}{4R} = \frac{2R \cdot \sin \alpha \cdot 2R \cdot \sin \beta \cdot 2R \cdot \sin \gamma}{4R} =$$

$$2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$S_{BDE} = 2R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Từ hệ thức:

$$\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma = (\sin \alpha \cdot \sin \beta)(\sin \beta \cdot \sin \gamma)(\sin \gamma \cdot \sin \alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \cdot \frac{1}{2}(\cos(\gamma - \beta) - \cos(\gamma + \beta)) \cdot \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \gamma) \\
&\quad - \cos(\alpha + \gamma)) \\
&\leq \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha + \beta)) \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos(\beta + \gamma)) \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos(\gamma + \alpha)) \\
&= \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \sin^2 \frac{\gamma + \alpha}{2}
\end{aligned}$$

Hệ thức trên đúng với bất kỳ các giá trị dương $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Nên ta có:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma &\leq \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \\
\Rightarrow 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma &\leq 2R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}
\end{aligned}$$

Hay $S_{ACE} \leq S_{BDF}$ (đpcm)

Bài 4 (Giải tích THPT)

Tìm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn:

$$f(x + 2f(y)) = f(x) + y + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải:

Đặt $f(0) = c$

Thay $(x, y) = (-2c, 0)$ vào (1), suy ra:

$$\begin{aligned}
c = f(0) &= f(-2c + 2f(0)) = f(-2c) + 0 + f(0) \\
&\Rightarrow f(-2c) = 0
\end{aligned}$$

Thay $(x, y) = (0, -2c)$ vào (1)

$$\Rightarrow f(0) = f(0) - 2c + 0 \Rightarrow c = 0$$

Vậy $f(0) = 0$

Cho $x = y \Rightarrow f(x + 2f(x)) = x + 2f(x)$

Đặt $g(x) = x + 2f(x) \Rightarrow g(x)$ là hàm liên tục và $g(0) = 0$

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= g(x) \\
\Leftrightarrow g(g(x)) - g(x) &= 2g(x) \\
\Leftrightarrow g(g(x)) &= 3g(x)
\end{aligned}$$

Nếu $g(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{2}$ (thỏa mãn)

Nếu $\exists x_0$ mà $g(x_0) = a \neq 0 \Rightarrow g(a) = 3a$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a > 0$. Do g liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow g$ nhận hết mọi giá trị $\in [0, a]$

$$\Rightarrow g(x) = 3x \quad \forall x \in [0, a] \Rightarrow g(x) = 3x \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x \quad \forall x \geq 0$$

Xét $y \geq 0$ và $x \in \mathbb{R}$ vào (1), suy ra

$$f(x + 2y) = f(x) + 2y$$

Cho $x = -2y \Rightarrow 0 = f(0) = f(-2y) + 2y \Rightarrow f(-2y) = -2y$
 $\Rightarrow f(x) = x \quad \forall x \leq 0$
 Vậy có hai hàm thỏa mãn là $f(x) = \frac{-x}{2}$ và $f(x) = x$

Bài 5 (Đại số THPT): Cho đa thức $P_{(x)}$ bậc 2011 hệ số nguyên. Chứng minh đa thức $Q_{(x)} = P_{(x)}^2 - 9$ có không quá 2015 nghiệm nguyên.

Lời giải:

Giả sử đa thức: $Q_{(x)} = P_{(x)}^2 - 9$ có số nghiệm nguyên lớn hơn hoặc bằng 2016.

Ta có:

$Q_{(x)} = (P_{(x)} - 3)(P_{(x)} + 3)$ có số nghiệm nguyên lớn hơn hoặc bằng 2016.

Gọi $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ là m nghiệm nguyên của $P_{(x)} - 3 = 0$

Và $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ là n nghiệm nguyên của $P_{(x)} + 3 = 0$

Hiển nhiên có $x_i \neq y_j \quad \forall i, j$.

Vì $\deg P_{(x)} = 2011$ suy ra $m \leq 2011; n \leq 2011$. Mà $m+n \geq 2016$

Suy ra $m \geq 5; n \geq 5$.

Do $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ và $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ trong đó $x_i; y_j$ là các số nguyên và $x_i \neq y_j \quad \forall i, j$ Do đó ít nhất 3 nghiệm trong số n nghiệm y_j ($j = \overline{1, n}$) phải nằm lệch hẳn về một phía bên phải hoặc bên trái của các nghiệm x_i ($i = \overline{1, m}$). Không giảm tổng quát, ta coi sự lệch này về bên phải. Như vậy ta có: $x_1 < x_2 < \dots < x_m < y_p < y_{p+1} < y_{p+2}$

(với $y_p < y_{p+1} < y_{p+2}$ là 3 trong số các nghiệm nguyên $y_1 < y_2 < \dots < y_n$)

Suy ra: $|y_{p+2} - x_1| = y_{p+2} - x_1 \geq m - 1 + 3 = m + 2$ (chú ý: x_i ($i = \overline{1, m}$),

y_p, y_{p+1}, y_{p+2} đều là các số nguyên.)

Do $m \geq 5$ suy ra $|y_{p+2} - x_1| \geq 7$.

Mà $[P_{(y_{p+2})} - P_{(x_1)}] : (y_{p+2} - x_1)$

Suy ra: $|P_{(y_{p+2})} - P_{(x_1)}| \geq |y_{p+2} - x_1|$

Hay $6 \geq |y_{p+2} - x_1| \geq 7$ (vô lí)

Suy ra ĐPCM.

Bài 6 (Số học Olympiad): Cho m, n là 2 số tự nhiên sao cho $m \leq \frac{n^2}{4}$ và m không có ước nguyên tố lớn hơn n . Chứng minh rằng $n!$ chia hết cho m
Giải: Lời giải

Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của m . Giả sử a, b là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $n!$ và m . Ta cần chứng minh $a \geq b$

Kí hiệu $[\alpha]$ là phần nguyên của α

Nếu $b = 2s$.

Ta có $n \geq 2\sqrt{m} \geq 2p^s$

Do đó $a \geq \left[\frac{n}{p}\right] \geq 2p^{s-1} \geq 2s = b$

Nếu $b = 2s + 1$.

Ta có $n \geq 2\sqrt{m} \geq 2p^s\sqrt{p}$

Nếu $n > 4p^s$ thì $a \geq \left[\frac{n}{p}\right] \geq 4p^{s-1} \geq 4 \cdot 2^{s-1} = 2^{s+1} \geq 2s + 1 = b$

Nếu $n \leq 4p^s$ thì

$4p^s \geq n \geq 2p^s\sqrt{p}$

$\Rightarrow 2 \geq \sqrt{p} \Rightarrow 2\sqrt{p} \geq p$

$\Rightarrow n \geq 2p^s\sqrt{p} \geq p^{s+1}$

Do đó $a \geq \sum_{i=1}^{s+1} \left[\frac{n}{p^i}\right] \geq \sum_{i=0}^s p^i \geq \sum_{i=0}^s 2^i = 2^{s+1} - 1 \geq 2s + 1 = b$

$\Rightarrow a \geq b$ (dpcm)
