

# VMT - GIẢI ĐỀ THI THỬ SỐ 02

Môn: Toán. Thời gian: 180 phút.

Thí sinh: PHAM HÙNG VƯƠNG  
Lớp 12C, Trường THPT Phan Đăng Lưu, Nghệ An.

Ngày 12-12-2011.

Bài làm:

Câu 1 (2 điểm): hàm số:  $y = -x^3 - 3x^2 + 4$  (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) Tập xác định  $D = \mathbb{R}$

b) Sự biến thiên:

\* Chiều biến thiên:  $y' = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; +\infty)$

\* Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ ,  $y_{\text{max}} = 4$

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -2$ ,  $y_{\text{min}} = 0$

\* Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 \left(-1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

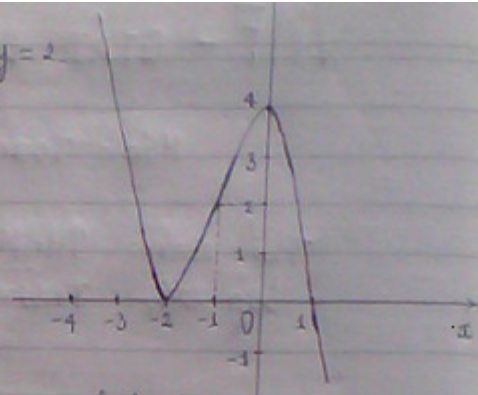
\* Bảng biến thiên

| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----------|
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      |     | $4$       |     | $-\infty$ |

c) Đồ thị hàm số

Giao trục đồ thị với Oy tại điểm  $(0, 4)$  và trục Ox tại điểm  $(-2, 0)$  và  $(1, 0)$ .

Điểm uốn  $y' = -6x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \rightarrow y = 2$   
 Điểm uốn  $I(-1, 2)$  là uốn đó thì  
 là tâm đối xứng.



2. Hai điểm  $A(-2, 0)$  và  $B(0, 4)$  là  
 hai điểm cực trị của hàm số (1).

Phương trình đường thẳng qua  $A, B$

$$\text{đó } \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0 \quad (\Delta).$$

Đường tròn (C) có phương trình:  $(x-m)^2 + (y-m-1)^2 = R^2$

$\Rightarrow I(m, m+1)$  là tâm đường tròn và  $R = \sqrt{5}$  là bán kính.

Đường thẳng (Δ) tiếp xúc với đường tròn (C) thì

$$\Leftrightarrow d(I; (\Delta)) = R \Leftrightarrow \frac{|2m - (m+1) + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |m+3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 = 5 \\ m+3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -8 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của  $m$  thỏa mãn là  $m = 2$  và  $m = -8$ .

Câu II/ (2 điểm):

1. Giải phương trình:

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) - 1 = \cos(\pi \sin 2x) \Leftrightarrow \cos(\pi \cos^2 x) = \cos(\pi \sin 2x).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi \cos^2 x = \pi \sin 2x + 2k\pi \\ \pi \cos^2 x = -\pi \sin 2x + 2t\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \sin 2x + 2k \\ \cos^2 x = -\sin 2x + 2t \end{cases} \quad (k, t \in \mathbb{Z})$$

Do  $|\sin \alpha| \leq 1; |\cos \alpha| \leq 1$  nên  $|\cos^2 x \pm \sin 2x| \leq 2$ . (\*)

và  $k, t \in \mathbb{Z}$  nên  $k, t \in \{-1, 0, 1\}$ .

Theo đánh giá (\*) nếu  $k = 1 \Rightarrow \cos^2 x - \sin 2x = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + n\pi \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \rightarrow \text{ vô nghiệm.}$$

nếu  $k = -1 \Rightarrow \cos^2 x - \sin 2x = -2$   
 do  $\cos^2 x \geq 0, -\sin 2x \geq -1$  nên  $\cos^2 x - \sin 2x \geq -1$

$\Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.



Tương tự, với  $t = 1$ ,  $t = -1$  thì không có  $x$  thỏa mãn.

Do đó (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \sin 2x \\ \cos^2 x = -\sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x (\cos x - 2 \sin x) = 0 \\ \cos x (\cos x + 2 \sin x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \\ \cos x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x = \arccos 2 + m\pi \\ x = \arccos(-2) + m\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình đã cho có ba họ nghiệm thỏa mãn là:

$x = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ;  $x = \arccos 2 + m\pi$ ;  $x = \arccos(-2) + m\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}$ )

2.) Giải phương trình

$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}} \quad (1)$

Giải: Điều kiện xác định:  $-2 \leq x \leq 2$ .

Do  $\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} > 0$  nên phương trình (1) tương đương với:

$\Leftrightarrow (6x-4) \left( \frac{1}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} - \frac{2}{\sqrt{9x^2+16}} \right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} - \frac{2}{\sqrt{9x^2+16}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ \sqrt{9x^2+16} = 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) = 0 \end{cases}$

Giải:  $2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) = \sqrt{9x^2+16}$

$\Leftrightarrow 4(12-2x + 4\sqrt{2-2x^2}) = 9x^2+16$

$\Leftrightarrow 32-8x^2 + 16\sqrt{2-2x^2} = x^2+8x$

Khảo sát hàm  $y(t) = t^2 + 8t$  trên  $\mathbb{D} = (-4; +\infty)$

có  $y'(t) = 2t+8 > 0 \quad \forall t > -4$

$\Rightarrow$  hàm số  $y(t)$  đồng biến trên khoảng  $(-4; +\infty)$ .

Vì  $x \in [-2; 2] \subset \mathbb{D}$ ; ta  $\sqrt{32-8x^2} \in [0; \sqrt{32}] \subset \mathbb{D}$

nên  $y(\sqrt{32-8x^2}) = y(x) \Leftrightarrow \sqrt{32-8x^2} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 32-8x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (thỏa mãn)}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm:  $x = \frac{2}{3}$  và  $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ .

Câu III (1 điểm): Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

Giải Ta có:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

nên 
$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x) \sin(\pi-x)}{1 + \cos^2(\pi-x)} dx$$
  

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Do đó 
$$2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Đặt  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$  ( $-1 \leq u \leq 1$ )

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = + \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2}$$

Lại đặt  $u = \tan t \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

và  $du = d(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (\tan^2 t + 1) dt$

Do đó 
$$I = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{1+\tan^2 t} = + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt$$
  

$$= \frac{\pi}{2} \left( t \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \right) = \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

Vậy 
$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

Câu IV (1 điểm): Cho  $x, y, z \in [1; 3]$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \leq \frac{26}{3}$$

Giải Do ai đó bình đẳng mà  $x, y, z$  nên thông mặt tính tổng quát, giả sử  $1 \leq x \leq y \leq z \leq 3$ .

Kiểm tra lại,  $y, z$  là hằng số, ta có xét hàm số:

$$f(x) = x \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{y+z}{x} + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)$$
 trên đoạn  $[1; 3]$



$$\text{vì: } f'(x) = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{(y+z)}{x^2} = (y+z) \left( \frac{1}{yz} - \frac{1}{x^2} \right) \leq 0$$

vì  $1 \leq x \leq y \leq z \leq 3 \Rightarrow$  hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên đoạn  $[1; 3]$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(1) = \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \quad (1)$$

Xem ở bài đầu,  $y$  là hằng số, xét hàm số:

$$g(z) = z \left( 1 + \frac{1}{y} \right) + \frac{y+1}{z} + y + \frac{1}{y} \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

$$G': g'(z) = 1 + \frac{1}{y} - \frac{y+1}{z^2} = (1+y) \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{z^2} \right) > 0 \text{ (do } 1 \leq y \leq z)$$

$\Rightarrow g(z)$  là hàm đồng biến trên đoạn  $[1; 3]$ .

$$\text{Do đó: } g(z) \leq g(3) = \frac{4}{3}y + \frac{4}{y} + \frac{10}{3} \quad (2)$$

$$\text{lại xét hàm số: } h(y) = \frac{4y}{3} + \frac{4}{y} + \frac{10}{3} \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

$$\text{vì: } h'(y) = \frac{4}{3} - \frac{4}{y^2}; h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \text{ do } y \in [1; 3]$$

Bảng biến thiên:

|         |           |                |            |                          |                |
|---------|-----------|----------------|------------|--------------------------|----------------|
| $y$     | $-\infty$ | 1              | $\sqrt{3}$ | 3                        | $+\infty$      |
| $h'(y)$ |           |                | -          | 0                        | +              |
| $h(y)$  |           | $\frac{26}{3}$ |            | $\frac{10+8\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{26}{3}$ |

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra: } h(y) \leq \frac{26}{3} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3): } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{26}{3}$$

Bảng thức xảy ra khi  $(x; y; z) = (1; 1; 3)$  hoặc  $(1; 3; 3)$   
và các hoán vị của hai bộ  $(1; 1; 3)$  và  $(1; 3; 3)$ .

Câu 10a). (điểm). Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1| + |z+1| = 4$ .

Giải: Gọi  $M(x; y)$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) là điểm biểu diễn số phức  $z$  trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxy.  
 $\Rightarrow z = x + yi$

Phươn: Từ giả thiết, ta có:  $|z-i| + |z+i| = 4$

$$\Leftrightarrow |x + (y-1)i| + |x + (y+1)i| = 4.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = (4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2})$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4^2 + x^2 + (y-1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4y = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} = 4 - y$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + y^2 - 2y + 1) = (4 - y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 + 4x^2 = 12.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad (E)$$

$\Rightarrow M(x; y)$  thuộc elip (E) có tiêu điểm  $F_1(-1; 0), F_2(1; 0)$  và độ dài trục đứng  $2b = 4$ ; trục ngang  $2a = 2\sqrt{3}$ .

Vậy Phân đảo: Lấy  $M(x_0; y_0) \in (E): 3y_0^2 + 4x_0^2 = 12$  biểu diễn số phức  $z: \Rightarrow z = x_0 + y_0 i$ . Khi đó, ta có:

$$|z-i| + |z+i| = |x_0 + (y_0-1)i| + |x_0 + (y_0+1)i|$$

$$= \sqrt{x_0^2 + (y_0-1)^2} + \sqrt{x_0^2 + (y_0+1)^2} = \sqrt{3 - \frac{3y_0^2}{4} + (y_0-1)^2} + \sqrt{3 - \frac{3y_0^2}{4} + (y_0+1)^2}$$

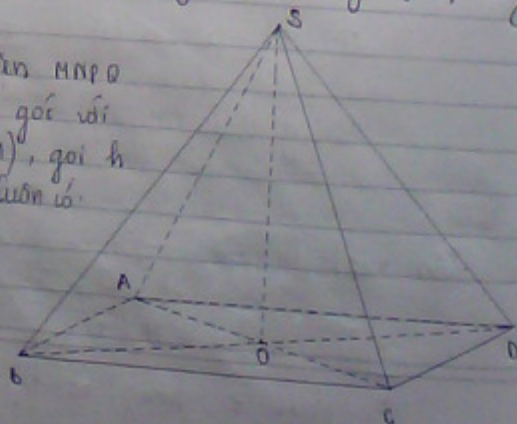
$$= \sqrt{\left(\frac{y_0}{2} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{y_0}{2} + 2\right)^2} = \left|\frac{y_0}{2} - 2\right| + \left|\frac{y_0}{2} + 2\right|. \quad (1)$$

do  $12 = 3y^2 + 4x^2 \geq 3y^2 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2 \Rightarrow -1 < y < 1$   
 nên từ (1)  $\Rightarrow |z-i| + |z+i| = 2 - \frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{2} + 2 = 4.$

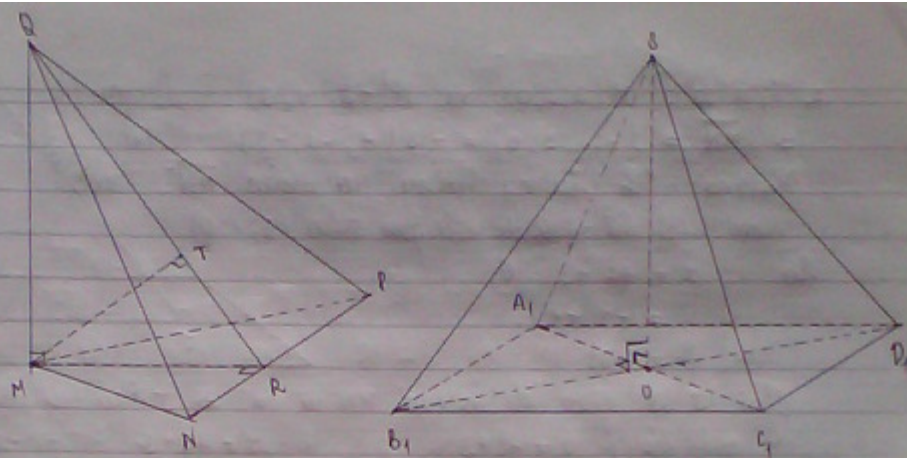
Tóm lại, tập hợp điểm M vẫn tìm là elip (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 12$  trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bài IV: (1 điểm): Cho đề: Tứ diện MNPQ có MN, MP, MQ đôi một vuông góc với nhau (tứ diện vuông tại M), gọi h là chiều cao kẻ từ M, ta luôn có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}.$$







Chứng minh: Kẻ  $MR \perp NP$ ,  $MT \perp QR$ .

do  $\left. \begin{array}{l} MQ \perp NP \\ MR \perp NP \end{array} \right\} \Rightarrow NP \perp mp(MQR) \Rightarrow NP \perp MT$  mà  $MT \perp QR$

nên  $MT \perp mp(MQR)$  hay  $MT$  là chiều cao của hình chóp.

Phải đó, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$$\triangle MNP \text{ có: } \frac{1}{MR^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2}; \quad \triangle MQR \text{ có: } \frac{1}{MT^2} = \frac{1}{MR^2} + \frac{1}{MQ^2}.$$

$$\text{Vậy: } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{MT^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2} \quad (\text{đpcm}).$$

②. Qua điểm  $O$ , dựng  $mp(\alpha)$  vuông góc với  $SO$ , cắt  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Phải đó, nếu  $mp(SAC) \perp (SBD)$  hay  $mp(SA_1C_1) \perp mp(SB_1D_1)$  thì  $A_1C_1 \perp B_1D_1$ .

$\Rightarrow OS \perp A_1B_1, OS \perp B_1C_1, OS \perp C_1D_1, OS \perp D_1A_1$  là các tử diện vuông tại  $O$ .

Phải đó, áp dụng bổ đề chứng minh trên ta có:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{OA_1^2} + \frac{1}{OB_1^2} + \frac{1}{OS^2}; \quad \frac{1}{q^2} = \frac{1}{OB_1^2} + \frac{1}{OC_1^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{OC_1^2} + \frac{1}{OD_1^2} + \frac{1}{OS^2}; \quad \frac{1}{v^2} = \frac{1}{OD_1^2} + \frac{1}{OA_1^2} + \frac{1}{OS^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2} = \left( \frac{1}{OA_1^2} + \frac{1}{OB_1^2} + \frac{1}{OC_1^2} + \frac{1}{OD_1^2} \right) + \frac{2}{OS^2} \quad (\text{đpcm}).$$

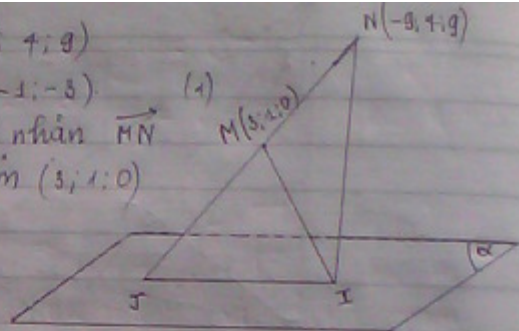
Câu via (2 điểm):

2. Ta có:  $M(3; 2; 0)$  và  $N(-9; 4; 9)$

$$\Rightarrow \vec{MN} = (-12; 2; 9) = -3(4; -1; -3) \quad (1)$$

Phương trình đường thẳng  $MN$  nhận  $\vec{MN}$  làm vectơ chỉ phương, đi qua điểm  $(3; 1; 0)$

$$\text{do } \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = -3t \end{cases}$$



Gọi  $J$  là giao điểm của  $MN$  và  $(\alpha) \Rightarrow J$  có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = -3t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = -3t \\ 6t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow J(-1; 2; 3)$$

$$\text{Có } J(-1; 2; 3) \Rightarrow \vec{MJ} = (-4; 1; 3) = -(4; -1; -3) \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \vec{MN} = 3\vec{MJ} \Rightarrow J$  nằm giữa  $M$  và  $N$ .

hay  $H, N$  nằm khác phía so với mặt phẳng  $(\alpha)$ .

Lấy  $N'$  đối xứng với  $N$  qua mặt phẳng  $(\alpha)$ .

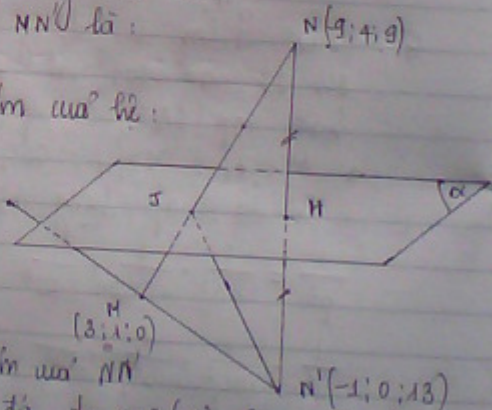
$H = NN' \cap mp(\alpha)$ . Ta có:  $\vec{NN'} \perp mp(\alpha)$

$\Rightarrow \vec{n} = (2; -1; 1)$  là vectơ chỉ phương của  $NN'$ .

$\Rightarrow$  phương trình đường thẳng  $NN'$  là:

$$\begin{cases} x = 2t - 9 \\ y = -t + 4 \\ z = t + 9 \end{cases} \Rightarrow H \text{ là nghiệm của hệ:}$$

$$\begin{cases} x = 2t - 9 \\ y = 4 - t \\ z = t + 9 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \\ z = H \end{cases}$$



Vậy  $H(-5; 2; 11)$  là trung điểm của  $NN'$

Nên  $N' = (-1; 0; 13)$ . Khi đó,  $to\ mp(\alpha)$  là mặt phẳng trung trực của  $NN'$ .

Với mọi điểm  $I$  thuộc  $mp(\alpha)$  ta luôn có:  $|IM - IN| = |IM - IN'| \leq |HN'|$ . ( $\Delta IMN'$  suy biến).

Do đó, để  $|IM - IN|$  đạt giá trị lớn nhất  $\Rightarrow I$  là giao điểm của  $N'M$  và  $mp(\alpha)$ . Ta có:  $\vec{N'M} = (4; 2; -13)$



→ phương trình đường thẳng N'M là:

$$\begin{cases} x = t+3 \\ y = t+1 \\ z = -13t \end{cases} \Rightarrow I \text{ có tọa độ là nghiệm của hệ}$$

$$\begin{cases} x = t+3 \\ y = t+1 \\ z = -13t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+3 \\ y = t+1 \\ -6t+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Vậy  $I(7; 2; -13)$ .

1/

Gọi  $I(x; y)$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ , bán kính  $r \in \mathbb{R}$ .

Ta có:  $A, B$  thuộc trục hoành có  $y=0$ .

→  $B$  là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y=0 \\ x\sqrt{3}-y-\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0).$$

$\Delta ABC$  vuông  $\Rightarrow AC \perp AB$  hay  $AC \perp Ox$

$\Rightarrow AC$  song song với trục tung  $Oy$ .

Gọi  $A(a; 0)$  thì  $C(a; a\sqrt{3}-\sqrt{3})$ .

Ta có:  $d(I; AB) = d(I; BC) = 2 \Leftrightarrow \frac{|y|}{\sqrt{1}} = \frac{|x\sqrt{3}-y-\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |y|=2 \\ |x\sqrt{3}-y-\sqrt{3}|=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 2 \\ x\sqrt{3}=y+\sqrt{3}\pm 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2, x=2\sqrt{3}+1 & (1) \\ y=2, x=1-\frac{2}{\sqrt{3}} & (2) \\ y=-2, x=\frac{2}{\sqrt{3}}+1 & (3) \\ y=-2, x=1-2\sqrt{3} & (4) \end{cases}$$

III.  $I(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}; 1)$ , phương trình  $AC$  là  $x=a$

$$r = d(I; AC) = \frac{|1+2\sqrt{3}-a|}{1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3+2\sqrt{3} \text{ (loại)} \\ a = -1+2\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

III.  $I(1-\frac{2}{\sqrt{3}}; 2)$ , ta cũng có:

$$r = d(I; AC) = \left| 1-\frac{2}{\sqrt{3}}-a \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (loại)} \\ a = -1-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (loại)} \end{cases}$$

TH3:  $I\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}; 2\right)$ , ta có:

$$d(I, AC) = r = \left|1 + \frac{2}{\sqrt{3}} - a\right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 & (\text{loại}) \\ a = 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

TH4:  $I(1 - 2\sqrt{3}; -2)$ , ta có:

$$d(I, AC) = \left|a - 1 + 2\sqrt{3}\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 2\sqrt{3} & (\text{loại}) \\ a = -1 - 2\sqrt{3} & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Từ đó, ta có các  $\Delta ABC$  thỏa mãn  $\varphi$  và trọng tâm  $G$  tương ứng là:

①:  $\Delta ABC$  có  $A(3 + 2\sqrt{3}; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ;  $C(3 + 2\sqrt{3}; 6 + 2\sqrt{3})$ .

$$\Rightarrow G = \left(\frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

(Trường hợp  $a = 3 + 2\sqrt{3}$ ).

②: Trường hợp  $a = 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ , ta có:

$$G = \left(\frac{2a + 1}{3}; \frac{a\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{2 \cdot 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} + 1}{3}; \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{2 \cdot 1 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

③: Trường hợp  $a = -1 - 2\sqrt{3}$ , ta có:

$$G = \left(\frac{2a + 1}{3}; \frac{a\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{-1 - 4\sqrt{3}}{3}; \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

④: Trường hợp  $a = -1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ , ta có:

$$G = \left(\frac{2a + 1}{3}; \frac{a\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{-3 - 4\sqrt{3}}{3}; \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{3}\right).$$