PHẦN CHUNG:

<u>Câu I:</u>

1. Miền xác định D = R

Đạo hàm:

$y' = -3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Giới hạn:

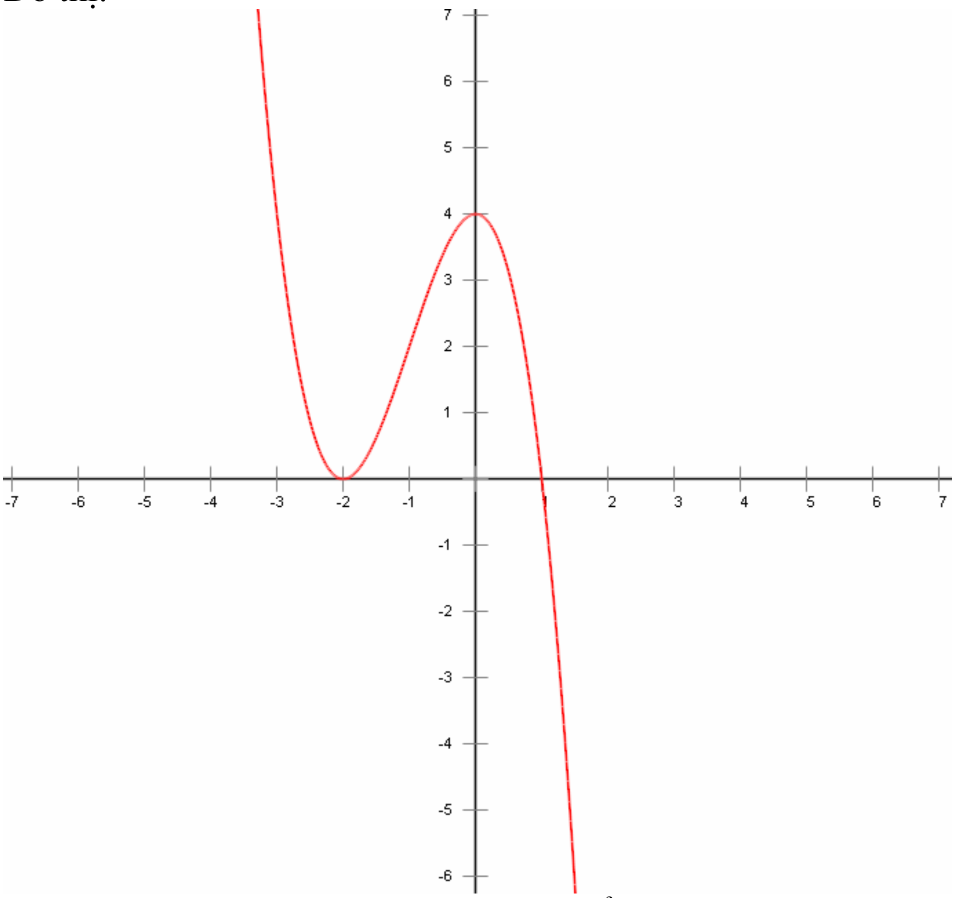
$\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		-		+		-	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Đồ thị:



2. Từ bảng biến thiên ta có toạ độ hai điểm cực trị của (1) là: A(-2;0) và B(0;4)

Vậy phương trình đường thẳng đi qua A, B là: y = 2x + 4

Ta có:

$(C):(x-m)^2+(y-m-1)^2=5$

$\Rightarrow R=\sqrt{5}$ và $I(m;m+1)$ với R, I lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C)

Để AB tiếp xúc với (C) thì $d_{AB/(C)}=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow |m+3|=5\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-8 \end{array}\right.$$

Vậy với m = 2 hoặc m = -8 thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số (1) sẽ tiếp xúc với (C).

Câu II:

1. Ta có:

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right)=1+\cos\left(\pi\sin 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right)-1=\cos\left(\pi\sin 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\pi\cos^2 x\right)=\cos\left(\pi\sin 2x\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \pi\cos^2 x=\pi\sin 2x+k2\pi \\ \pi\cos^2 x=-\pi\sin 2x+k2\pi \end{array}\right.(k\in Z)$$

+) TH1: $\pi\cos^2 x=\pi\sin 2x+k2\pi \Leftrightarrow \cos^2 x-\sin 2x=2k(k\in Z)$

Do $0\le\cos^2 x\le 1$ và $-1\le\sin 2x\le 1$ nên $-1\le\cos^2 x-\sin 2x\le 2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right.$$

*) k = 0

$\Rightarrow \cos^2 x-2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos x-2\sin x\right)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \tan x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\arctan\frac{1}{2}+k\pi \end{array}\right.(k\in Z)$$

*) k = 1

$\Rightarrow \cos^2 x-\sin 2x=2$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos^2 x=1 \\ \sin 2x=-1 \end{array}\right.(VN)$$

+) TH2: $\pi\cos^2 x=-\pi\sin 2x+k2\pi \Leftrightarrow \cos^2 x+\sin 2x=2k(k\in Z)$

Do $0\le\cos^2 x\le 1$ và $-1\le\sin 2x\le 1$ nên $-1\le\cos^2 x+\sin 2x\le 2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right.$$

*) k = 0

$\Rightarrow \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x + 2\sin x) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\dfrac{-1}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in Z)$$

*) k = 1

$\Rightarrow \cos^2 x + \sin 2x = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} (VN)$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi \quad (k \in Z) \\ x = \arctan\dfrac{-1}{2} + k\pi \end{cases}$

2. ĐKXĐ: $-2 \le x \le 2$

Ta có:

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16} (1) \end{array}\right.$$

Đặt $x = 2\cos 2t$ với $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Phương trình (1) trở thành:

$$4\sqrt{2}\cos t + 8\sin t = \sqrt{36\cos^2 2t + 16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\sqrt{2}\cos t + 8\sin t \ge 0 (2) \\ (4\sqrt{2}\cos t + 8\sin t)^2 = 36\cos^2 2t + 16 (3) \end{cases}$$

$(3) \Leftrightarrow 32\cos^2 t + 64\sin^2 t + 32\sqrt{2}\sin 2t = 36\cos^2 2t + 16$

$\Leftrightarrow 8 + 8\sqrt{2}\sin 2t - 4\cos 2t = 9\cos^2 2t$

$\Leftrightarrow 8(\sin^2 2t + \sqrt{2}\sin 2t + \dfrac{1}{2}) = \cos^2 2t + 4\cos 2t + 4$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sin 2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\cos 2t + 2)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2}\sin 2t = \cos 2t \Rightarrow 2t = \arctan\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + k\pi (k \in Z) \\ \cos 2t + 2\sqrt{2}\sin 2t + 4 = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow 2t = \arctan\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (do $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$). Kiểm tra ĐK (2) ta thấy thoã mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 2\cos(\arctan\frac{1}{2\sqrt{2}}) \end{cases}$

Câu III:

Hàm số dưới dấu tích phân xác định và liên tục trong $[0;\pi]$ nên $\exists I = \int_0^\pi \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$

Đặt: $t = \pi - x$ thì:

$$I = \int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin t(-dt)}{1+\cos^2 t} = \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t dt}{1+\cos^2 t} = \pi\int_0^\pi \frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t} - I$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^\pi \frac{d(-\cos t)}{1+\cos^2 t} = \pi\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = \pi.\arctan u\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}$$

Câu V:

Đặt: $f(x;y;z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}$

Cố định y, z. Ta có:

$$f'_{(x)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{z}{x^2} - \frac{y}{x^2}$$

$$f'_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{z}{x^2} - \frac{y}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (y+z)\left(\frac{1}{yz} - \frac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{yz}$$

Do đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua $\sqrt{yz}$ và $f'_{(x)}$ chỉ có đúng một nghiệm trên $[1;3]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất khi: $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ (1)

Đặt x = a với $a \in \{1;3\}$. Ta có:

$$f(y;z) = \frac{a}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{a} + \frac{y}{a} + \frac{a}{z} + \frac{z}{y}$$

Cố định z. Ta có:

$$f'_{(y)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{z} - \frac{a}{y^2} - \frac{z}{y^2}$$

$$f'_{(y)} = 0 \Leftrightarrow (z+a)\left(\frac{1}{az} - \frac{1}{y^2}\right) = 0 \Rightarrow y = \sqrt{az}$$

Do đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi y đi qua $\sqrt{az}$ và $f'_{(y)}$ chỉ có đúng một nghiệm trên $[1;3]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất khi: $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 3 \end{array}\right.$ (2)

Đặt y = b với $b \in \{1;3\}$. Ta có:

$$f(z) = \frac{a}{b} + \frac{b}{z} + \frac{z}{a} + \frac{b}{a} + \frac{a}{z} + \frac{z}{b}$$

$f'_{(z)}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{a}{z^2}-\frac{b}{z^2}$

$f'_{(z)}=0\Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{z^2}\right)=0\Rightarrow z=\sqrt{ab}$

Do đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi z đi qua $\sqrt{ab}$ và $f'_{(z)}$ chỉ có đúng một nghiệm trên $[1;3]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất khi: $\left[\begin{array}{l} z=1\\ z=3\end{array}\right.$ (3)

Không giảm tổng quát, giả sử $a\le b\le c$ (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có hàm $f(x;y;z)$ đạt giá trị lớn nhất khi

$(x;y;z)\in\{(3;3;3);(1;3;3);(1;1;3);(1;1;1)\}$

Lần lượt thay các giá trị trên vào $f(x;y;z)$ ta có:

$\max f(x;y;z)=\frac{26}{3}$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi: $\left[\begin{array}{l}(x;y;z)=(1;1;3)\\ (x;y;z)=(1;3;3)\end{array}\right.$ và các hoán vị tương ứng.

PHẦN RIÊNG:

<u>Câu VI.a:</u>

1. Ta có:

$\begin{cases} B\in Ox\\ BC:\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow B=Ox\cap BC\Rightarrow B(1;0)$

Do A thuộc trục hoành nên ta giả sử A(t;0) ($t\ne 1$). Vì $AB\perp AC$ nên phương trình đường thẳng AC là: x = t

$C=AC\cap BC\Rightarrow C(t;\sqrt{3}t-\sqrt{3})$

Từ trên ta suy ra:

$AB=|t-1|$

$BC=2|t-1|$

$CA=\sqrt{3}|t-1|$

$\Rightarrow p=\frac{AB+BC+CA}{2}=\frac{(3+\sqrt{3})|t-1|}{2}$

Mà: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=p.r$

$\Rightarrow |t-1|(\sqrt{3}|t-1|-6-2\sqrt{3})=0\ \Rightarrow |t-1|=2\sqrt{3}+2$ (do $t\ne 1$)

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t-1=2\sqrt{3}+2\Leftrightarrow t=2\sqrt{3}+3\\ 1-t=2\sqrt{3}+2\Leftrightarrow t=-1-2\sqrt{3}\end{array}\right.$

TH1: $t=2\sqrt{3}+3$

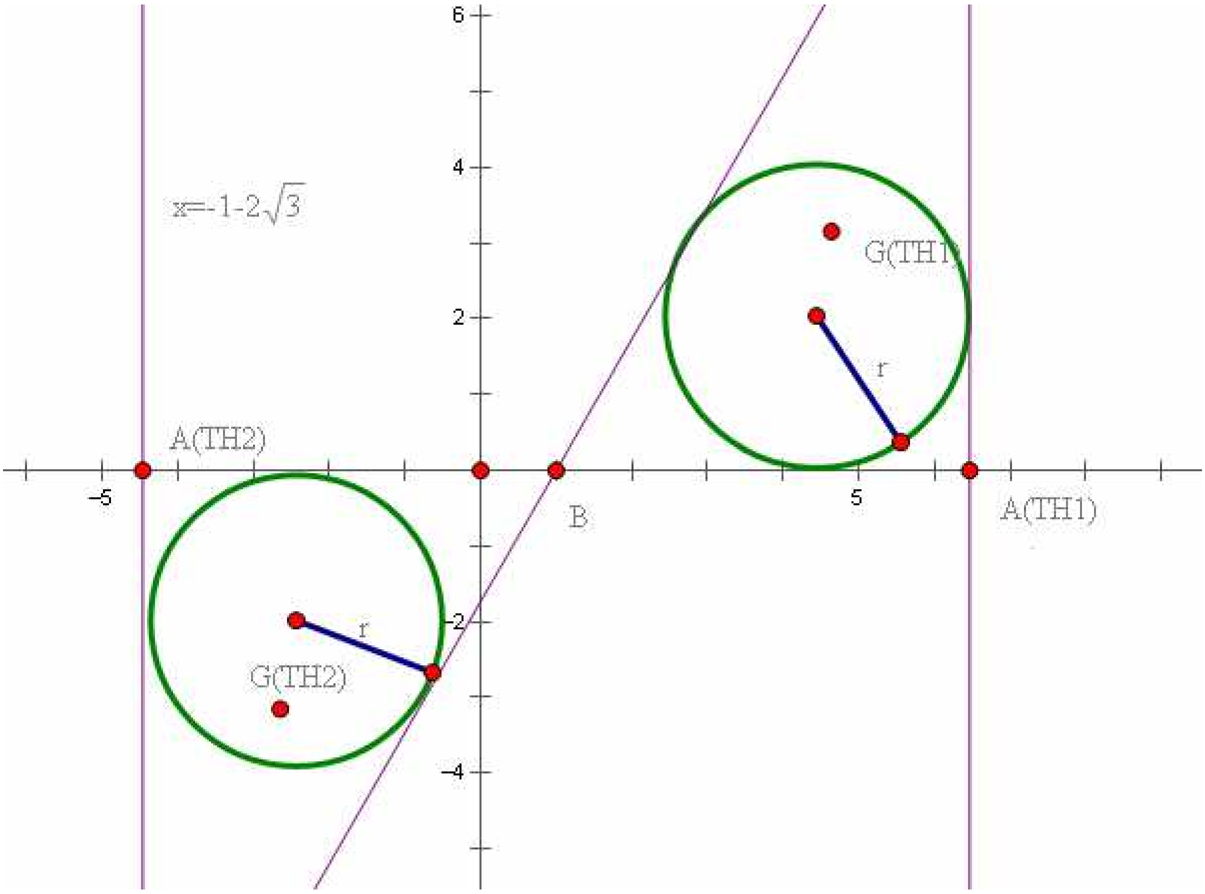
$\Rightarrow A(2\sqrt{3}+3;0)$; $B(1;0)$; $C(2\sqrt{3}+3;6+2\sqrt{3})$

$\Rightarrow G\left(\frac{4\sqrt{3}+7}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$

TH2: $t=-1-2\sqrt{3}$

$\Rightarrow A(-1-2\sqrt{3};0)$; $B(1;0)$; $C(-1-2\sqrt{3};-6-2\sqrt{3})$

$\Rightarrow G\left(\dfrac{-1-4\sqrt{3}}{3};\dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$



2. Ta có:

Xét vị trí tương đối của M, N đối với (α), ta có:

$t_M.t_N=(3.2-1+0+1).(-9.2-4+9+1)=-72<0$

Vậy M, N khác phía đối với (α).

Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua (α).

Mặt phẳng (α) có một vtpt $\vec{n}(2;-1;1)$

Đường thẳng MM_1 được xác định bởi:

$$(MM_1):\begin{cases}M(3;1;0)\in MM_1\\ vtcp\vec{n}(2;-1;1)\end{cases}\Leftrightarrow(MM_1):\begin{cases}x=3+2t\\ y=1-t\quad,(t\in R)\\ z=t\end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (α). Ta có $H=(MM_1)\cap(\alpha)$. Thay x, y, z từ phương trình tham số của (MM_1) vào (α), ta được:

$2(3+2t)-(1-t)+t+1=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow H(1;2;-1)$

Giả sử $M_1(x_1;y_1;z_1)$. Vì H là trung điểm của MM_1, ta có:

$$\begin{cases}x_1=2x_H-x_M\\ y_1=2y_H-y_M\\ z_1=2z_H-z_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ y_1=3\\ z_1=-2\end{cases}\Rightarrow M_1(-1;3;-2)$$

Phương trình đường thẳng (M_1N) được xác định bởi:

$$(M_1N):\begin{cases} M_1(-1;3;-2)\in M_1N \\ vtcp\,\overrightarrow{M_1N}(-8;1;11)\end{cases} \Leftrightarrow (M_1N):\begin{cases} x=-1-8t \\ y=3+t \\ z=-2+11t\end{cases},(t\in R)$$

Gọi $E=(M_1N)\cap(\alpha)$, khi đó để tìm toạ độ E ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (M_1N) vào phương trình của (α) được:

$2(-1-8t)-(3+t)-2+11t+1=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow E(7;2;-13)$

Ta sẽ chứng minh rằng $|IM-IN|$ lớn nhất khi và chỉ khi $I\equiv E$. Thật vậy, lấy điểm I bất kì thuộc (α) ta có:

$|IM-IN|=|IM_1-IN|\le M_1N=|EM-EN|$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $I\equiv E$.

Vậy điểm $I(7;2;-13)$ thoã mãn điều kiện đầu bài.

<u>Câu VII.a:</u>

Giả sử số phức z thoã mãn điều kiện đề bài là z = a+bi ($a,b\in R$)

Ta có:

$|z-i|+|z+i|=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2}+\sqrt{a^2+(b+1)^2}=16$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2+2(a^2-b^2)+1}=8$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2\le 8 \\ (a^2+b^2)^2-16a^2-16b^2+64=(a^2+b^2)^2+2a^2-2b^2+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2\le 8 \\ 18a^2+14b^2=63\end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một hình elip có phương trình:

$$\frac{a^2}{\left(\sqrt{\frac{63}{18}}\right)^2}+\frac{b^2}{\left(\sqrt{\frac{63}{14}}\right)^2}=1$$

P/s: Rất tiếc là em không làm được câu IV vì chưa học phần hai mặt phẳng vuông góc, mặc dù em đã cố gắng tư duy nhưng vẫn chịu ☹, đành ngồi chờ đáp án□.