

HUỖNH ĐỨC KHÁNH - CAO HỌC TOÁN QUY NHƠN KHÓA 14 – 0975.120.189

Câu 1. Cho hàm hai biến số $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Xét tính liên tục của f , sự tồn tại và tính liên tục của các đạo hàm riêng cấp một của f .
b) Xét tính khả vi của f .

Câu 2. a) Cho hàm đo được không âm $f(x)$ trên tập hợp A có độ đo hữu hạn. Với mỗi $n \geq 0$ ta ký hiệu $A_n = \{x \in A: n \leq f(x) < n+1\}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $f(x)$ khả tích Lebesgue là chuỗi $\sum_{n \geq 0} n \mu A_n$ hội tụ.

b) Xét tính khả tích và tính tích phân Lebesgue (nếu có) của $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ trên $[1, 2]$.

Câu 3. a) Cho hàm số $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ đơn điệu tăng thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(t) > 0$ khi $t > 0$ và $f(u+v) \leq f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in [0, +\infty)$. Xét không gian metric (X, d) và với mỗi $x, y \in X$ ta đặt $\delta(x, y) = f(d(x, y))$.

i) Chứng tỏ rằng δ là một không gian metric trên X .

ii) Chứng tỏ rằng nếu f là một hàm liên tục tại 0 thì ánh xạ $id: (X, d) \rightarrow (X, \delta)$ và cả ánh xạ ngược của nó cũng liên tục đều. Từ đó suy ra các dãy Cauchy trong (X, d) và (X, δ) trùng nhau.

b) Trong không gian metric $C[a, b]$ các hàm số liên tục trên $[a, b]$ với metric "max" xét tập con M thỏa mãn: $\exists m, L > 0, \exists x_0 \in [a, b]$ sao cho

$$|f(x_0)| \leq m, \forall f \in M; \text{ và } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall f \in M, \forall x, y \in [a, b].$$

Chứng minh rằng M là compact tương đối trong $C[a, b]$.

Câu 4. Cho không gian vec-tơ $S_c = \left\{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} : \text{day } \left\{\sum_{k=1}^n x_k\right\}_{n=1}^\infty \text{ hội tụ}\right\}$. Xét ánh xạ $\|\cdot\|: S_c \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$\|x\| =: \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|, \forall x = \{x_n\} \in S_c.$$

a) Chứng minh rằng $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên S_c và $(S_c, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach.

b) Chứng minh rằng không gian định chuẩn l_1 trù mật trong S_c .

c) Xét tương ứng $A: S_c \rightarrow c_0$ cho bởi $A(x) = \left\{\sum_{k=n}^\infty x_k\right\}_{n=1}^\infty$ với mọi $x = \{x_n\} \in S_c$. Chứng minh rằng A là một đồng phiêu tuyến tính. Tính $\|A\|$ và $\|A^{-1}\|$.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.