

Olympic Sinh Viên Belarus 2009(12-5-2009)

Khối sư phạm, tổng hợp

1. Cho $A_1, A_2, \dots, A_{1066}$ là các tập hợp con của tập X hữu hạn. $|X| \geq 10$ và $|A_i| > \frac{1}{2}|X|$ với mọi $i = \overline{1, 1066}$. Chứng minh rằng trong tập X tồn tại 10 phần tử $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ sao cho mỗi tập A_i chứa ít nhất một phần tử trong số 10 phần tử trên ($|X|$ -số các phần tử của tập hợp X).

2. Chúng ta xem xét một toán tử nhị phân trên mặt phẳng. Cố định tam giác $\Delta = XYZ$ trong đó bộ ba điểm X, Y, Z được đánh dấu theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Đối với bất kì hai điểm $A, B, A \neq B$ của mặt phẳng ta xét toán tử $A * B = C$ trong đó C là đỉnh của tam giác ABC sao cho bộ ba các điểm A, B, C và X, Y, Z có cùng chiều định hướng và ΔABC đồng dạng với ΔXYZ (Khi $A = B, A * A = A$). Chứng minh với bất kì bốn điểm A, B, C, D của mặt phẳng thì đẳng thức sau đúng $(A * B) * (C * D) = (A * C) * (B * D)$.

3. Cho $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}), 0 \in [a, b]$ đồng thời $f^{(n)}(0) = 0$ và $\sup_{[a, b]} |f^{(n)}(x)| \leq n!M^n, \forall n$, trong đó M là hằng số. Chứng minh $f = 0$.

4. Tiến hành tung nhiều lần một đồng xu với xác suất rơi vào mặt huy hiệu (1) và mặt số(0) là như nhau (1/2). Dãy bao gồm từ các số 0 và 1 được gọi là dãy số “thừa thớt” nếu trong đó không có hai số 1 nào nằm cạnh nhau.

a) Tìm xác suất thu được “dãy thừa thớt” sau n lần tung đồng xu.

b) Giả sử xác suất rơi vào mặt có huy hiệu là p . Ký hiệu ξ_n là số các số 1 có trong một “dãy thừa thớt” ngẫu nhiên có độ dài n . Tính $M[\xi_n]$.

5. Cho E là không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường số thực, u, v là hai ánh xạ tuyến tính của E vào chính nó. Giả sử $\text{Ker}[u^{-1}(0)] \supset \text{Ker}[v^{-1}(0)]$. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ tuyến tính $w: E \rightarrow E$ sao cho $u = w \circ v$.

6. Với số tự nhiên cố định $m \geq 2$ xét ánh xạ
$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{km+1} + \frac{1}{km+2} + \dots + \frac{1}{km+m-1} - \frac{x}{(k+1)m} \right).$$
 Xác định miền xác định và miền giá trị của hàm f_m .

Khởi kĩ thuật

1. Tìm tất cả các cặp số thực được sắp thứ tự (b, c) sao cho cả hai nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ đều nằm trong đường tròn $|z| < 1$ của mặt phẳng phức.

2. Phương trình $2^x - 1 - x^2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

3. Tính $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{e^x + \cos x - \sin x} dx$

4. Tính $P = \prod_{k=1}^{n-1} (e^{2\pi ki/n} - 1)$ và $S = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$

5. Câu 4a ở đề trên.

6. Tính $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.