

Bài tham gia thi thử đại học VMF

Họ và tên: Trần Ngọc Tiến

Lớp: 11A1

Trường: THPT Dương Quảng Hàm- Văn Giang- Hưng Yên

Nick diễn đàn: NGOCTIEN A1 DQH

ĐỀ SỐ 2

Bài làm

Câu 1:

1.1:

*)tập xác định: $D=R$ 0.25 điểm

*)chiều biến thiên:

+) đạo hàm và cực trị:

đạo hàm: $y' = f'(x) = -3x^2 - 6x$

cực trị: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -2$ 0.25 điểm

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$$

$$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 0$$

$f''(x)$ đổi dấu qua $x = -1$

+) điểm uốn: $f''(x) = -6x - 6$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

Suy ra điểm uốn là $U(-1;2)$

+) giới hạn ở ∞ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty.$$

+) bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f''(x)$		+	0		-

The graph shows the function $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. The x-axis has labels at $-\infty$, -2, -1, 0, and $+\infty$. The y-axis has labels at $+\infty$, 4, and $-\infty$. The function value $f(x)$ is indicated on the y-axis. The curve has a local maximum at $x = -1$ (marked with a red dot at $y = 2$) and a local minimum at $x = 2$ (marked with a red dot at $y = -4$). The curve passes through the origin $(0, 0)$.

0.25 điểm

+) nhận xét :

Hàm số đồng biến trên $(-2 ; 0)$ $(0, +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty ; -2) \cup (4 ; +\infty)$

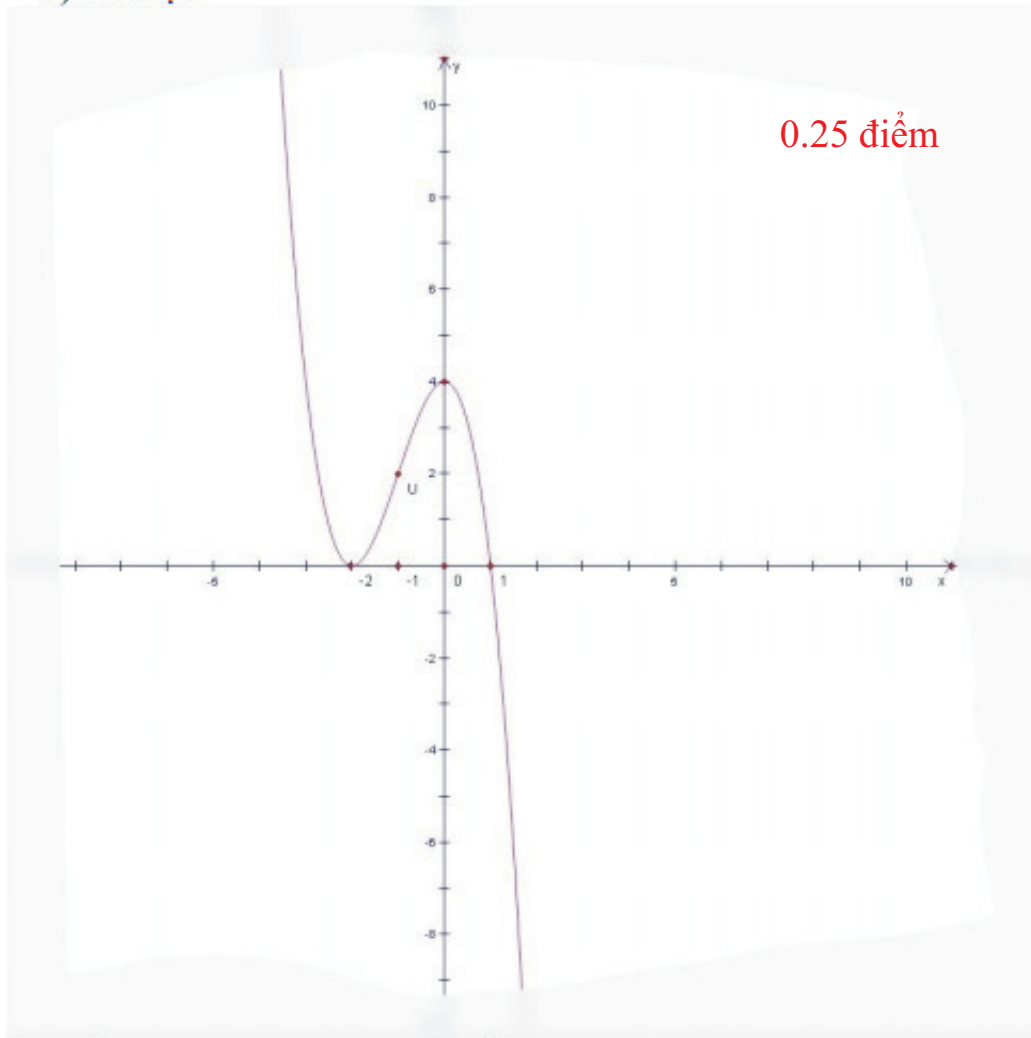
Hàm số lồi trên $(-1 ; +\infty)$

Hàm số lõm trên $(-\infty ; -1)$

Hàm số có điểm uốn $U(-1 ; 2)$.

Chú ý: Không được viết tắt bất cứ chữ gì,
Cần phải viết hoa đầu đng,...

+) đồ thị :



đồ thị giao với Ox tại 2 điểm $(1; 0)$ và $(-2; 0)$
 đồ thị giao với Oy tại điểm $(0; 4)$

1.2 :

gọi 2 điểm cực trị của hàm số là $M(0, 4)$ và $N(-2; 0)$

thì vecto pháp tuyến của MN là : $\vec{n}_{MN} = (-2; -4)$

suy ra phương trình của MN : $2x - y + 4 = 0$.

đường tròn (C) có tâm $I(m; m+1)$; bán kính $R = \sqrt{5}$.

MN là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow d_{(I; MN)} = R = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m - m - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Đây là vecto
chỉ phương của MN

0.25 điểm

0.25 điểm

0.25 điểm

$$\Leftrightarrow |m+3| = 5$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \vee m = -8$$

vậy với $m=2$ hoặc $m=-8$ thoả mãn đề bài. 0.25 điểm

Câu II.1:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) - 1 = \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi \cos^2 x) = \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \pi \cos^2 x = \pi \sin 2x + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

hoặc: $\pi \cos^2 x = -\pi \sin 2x + k'2\pi (k' \in \mathbb{Z}) \quad (2)$

xét trường hợp (1):

$$\pi \cos^2 x = \pi \sin 2x + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \sin 2x + 2k$$

Vì $\cos^2 x, \sin 2x \in [-1; 1]$ nên $k=0$ hoặc $k=1$

Khi $k=0$ thì PT trở thành:

$$\cos^2 x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 2\sin x$$

$$+) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi (m \in \mathbb{Z})$$

$$+) \cos x = 2\sin x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + n\pi (n \in \mathbb{Z})$$

Khi $k=1$ thì PT trở thành:

$$\cos^2 x = \sin 2x + 2$$

Vì $\cos^2 x, \sin 2x \in [-1; 1]$ nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

hệ này vô nghiệm 0.50 điểm

xét trường hợp (2)

$$(2) \Leftrightarrow \cos^2 x = -\sin 2x + 2k'$$

Vì $\cos^2 x, \sin 2x \in [-1; 1]$ nên $k'=0$ hoặc $k'=1$

khi $k'=0$ thì phương trình trở thành :

$$\cos^2 x = -\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = -2\sin x$$

$$+) \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi (m \in \mathbb{Z})$$

$$+) \cos x = -2 \sin x \Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + l\pi (l \in \mathbb{Z})$$

Khi $k=1$ thì PT trở thành :

$$\cos^2 x = 2 - \sin 2x$$

Vì $\cos^2 x, \sin 2x \in [-1; 1]$ nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

đây là điều vô lí nên hệ vô nghiệm

vậy PT có 3 họ nghiệm là :

$$x = \frac{\pi}{2} + m\pi; x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + n\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + l\pi (l, m, n \in \mathbb{Z}) \quad 0.50 \text{ điểm}$$

Câu II.2 :

điều kiện : $x \in [-2; 2]$

thực hiện phép nhân liên hợp với 2 biểu thức ở vế trái ta được :

$$\begin{aligned} \frac{2x+4-8+4x}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} &= \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}} \\ \Leftrightarrow (6x-4)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} - \frac{2}{\sqrt{9x^2+16}}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee \frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} &= \frac{2}{\sqrt{9x^2+16}} \end{aligned}$$

dễ thấy $x = \frac{2}{3}$ thỏa mãn đề bài, xét trường hợp còn lại :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} &= \frac{2}{\sqrt{9x^2+16}} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x} &= \sqrt{9x^2+16} \end{aligned}$$

thực hiện bình phương 2 vế ta được :

$$\begin{aligned} 9x^2+16 &= 8x+16+32-16x+16\sqrt{8-2x^2} \\ \Leftrightarrow 9x^2+8x-32 &= 16\sqrt{8-2x^2} \end{aligned}$$

Chỗ này cần phải xác định*
điều kiện cho VP ≥ 0 , rồi mới
bình phương 2 vế được, nếu
không kết quả sẽ thừa nghiệm

tiếp tục bình phương lần nữa ta có phương trình sau :

$$\begin{aligned} 81x^4+64x^2+1024+144x^3-576x^2-512x &= -512x^2+2048 \\ \Leftrightarrow 81x^4+144x^3-512x-1024 &= 0 \end{aligned}$$

Xét thấy $x=0$ không phải là nghiệm, chia cả 2 vế cho x^2 ta được :

$$\begin{aligned} 81x^2+144x-\frac{512}{x}-\frac{1024}{x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(9x-\frac{32}{x}\right)\left(9x+\frac{32}{x}+16\right) &= 0 \end{aligned}$$

Chỗ này biến đổi
không được tự nhiên
(bí quyết g ch ăng?)

$$+) 9x - \frac{32}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{32}{9}} \text{ (thoả mãn)}$$

Nghiệm âm không thoả mãn
hãy thử lại ở chỗ điều kiện*

$$+) 9x + \frac{32}{x} + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 16x + 32 = 0$$

PT này vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = \frac{2}{3}; x = \pm \sqrt{\frac{32}{9}}$

0.25 điểm

Câu III :

trước hết ta chứng minh công thức sau :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx (*)$$

$$\text{đặt } x = a + b - u \Rightarrow dx = -du$$

khi đó :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(a+b-u) du = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

vậy ta có điều cần chứng minh

trở lại với bài toán III :

áp dụng công thức (*) ta có :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$\text{Xét } J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = - \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = - \int_1^{-1} \frac{dt}{1 + t^2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Khi đó : } I = \frac{\pi}{2} \cdot J = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{vậy } I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4} . \quad 1.00 \text{ điểm}$$

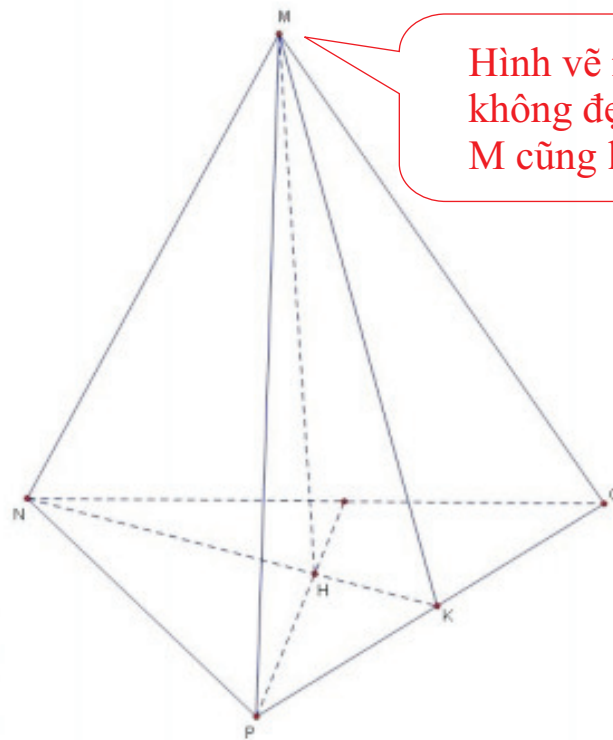
Câu IV:

trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

cho tứ diện MNPQ với MN, MP, MQ đôi , một vuông góc, gọi MH là đường cao kẻ từ M của tứ diện, (H thuộc (NPQ)). chứng minh rằng:

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}$$

Bổ đề này cũng khá
quen thuộc



Hình vẽ minh họa này không đẹp (dù sao thì M cũng là đỉnh của hình hộp)

chứng minh bổ đề:

ta có : $MN \perp MQ$

$MN \perp MP$

$\Rightarrow MN \perp (MPQ)$

$\Rightarrow MN \perp PQ$

Mà NH là hình chiếu của MN trên (NPQ)

Nên $NH \perp PQ$

gọi K là giao điểm của NH và PQ

ta có : $PQ \perp (MNK) \Rightarrow PQ \perp MK$

mặt khác, $MN \perp (MPQ) \Rightarrow MN \perp MK$

xét $\triangle MNK$ vuông tại M có $MH \perp NK$ nên :

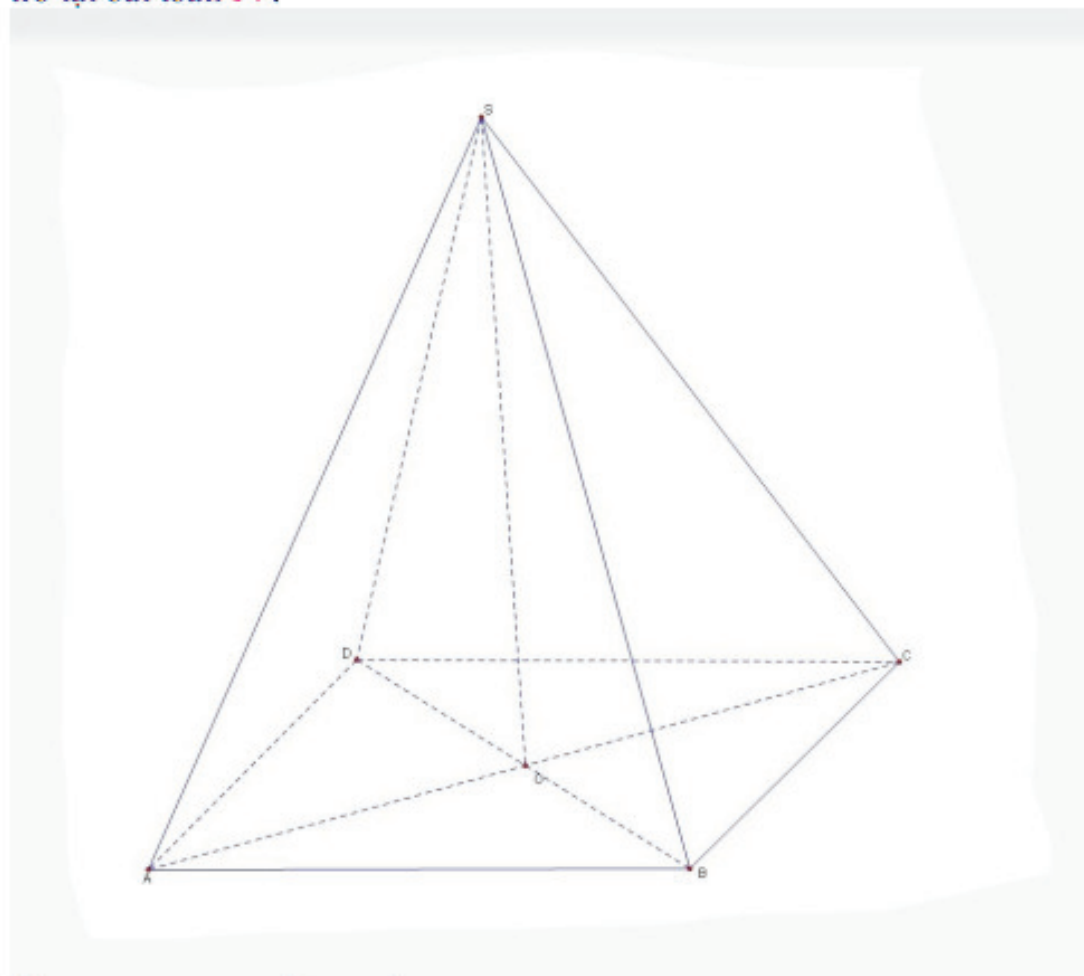
$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{MN^2}$$

Xét $\triangle MPQ$ vuông tại M có $MK \perp PQ$ nên :

$$\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MQ^2} + \frac{1}{MP^2}$$

từ 2 điều trên ta suy ra $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}$

vậy bổ đề được chứng minh
trở lại bài toán **IV**:



Vì $(SAC) \perp (SBD)$ nên ta có:

$AC \perp BD, SO \perp AC, SO \perp BD$

Các tứ diện O.SAB; O.SBC; O.SCD; O.SDA đều thoả mãn bổ đề đã chứng minh ở trên nên ta có:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2};$$

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2};$$

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2};$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu V :

Phương pháp này rất hay!

1.00 điểm

đặt : $\frac{x}{y} = a, \frac{y}{z} = b, \frac{z}{x} = c (a, b, c \in [\frac{1}{3}; 3])$

$$\Rightarrow abc = 1$$

khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành :

$$a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{26}{3}$$

Xét hàm số : $f(a) = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

$$\text{Có } f'(a) = 1 - \frac{1}{a^2}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Vì $f'(a)$ đổi dấu từ dương sang âm tại $a=1$ nên $f(a)$ đạt cực đại tại $a=1$

$$\text{Hay : } f(a) \leq f(1) = 2 + b + c + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\text{Mà với } a=1 \Rightarrow b = \frac{1}{c} \Rightarrow f(a) \leq 2 + 2c + \frac{2}{c}$$

Ta sẽ chứng minh $2 + 2c + \frac{2}{c} \leq \frac{26}{3}$ với $c \in [\frac{1}{3}; 3]$

thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với :

$$3c^2 - 10c + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (c-3)(c-\frac{1}{3}) \leq 0$$

Đây là điều hiển nhiên đúng vì $c \in [\frac{1}{3}; 3]$

vậy bất đẳng thức được chứng minh, dấu « = » xảy ra khi $a=1, b=\frac{1}{3}, c=3$

hoặc các hoán vị hay khi $x=y=1; z=3$ và các hoán vị tương ứng. **1.00 điểm**

Câu VI.a.1:

Vì B thuộc Ox và B thuộc BC nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(1; 0) \quad \mathbf{0.25 \text{ điểm}}$$

Gọi $A(k; 0)$

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên phương trình AC là : $x = k$

Suy ra tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = k \\ \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \sqrt{3}k - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C(k; \sqrt{3}k - \sqrt{3})$$

Khi đó, $AB = |k-1|$

$$AC = \sqrt{3}|k-1|$$

$$BC = 2|k-1|$$

Ok

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác $S = pr$ với p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ta có:

$$S_{ABC} = pr = \frac{AB+BC+CA}{2} \cdot r = \frac{(3+\sqrt{3}) \cdot |k-1|}{2} \cdot 2 = (3+\sqrt{3}) \cdot |k-1|$$

0.25 điểm

Mà tam giác ABC vuông tại A nên:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (k-1)^2$$

$$\Rightarrow (3+\sqrt{3}) \cdot |k-1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (k-1)^2 (*)$$

Xét khi $k=1$ thì A trùng với B nên điều này không thể xảy ra

Xét khi $k \neq 1$:

Phương trình (*) tương đương với:

$$|k-1| = 2\sqrt{3} + 2$$

$$\Rightarrow k = 2\sqrt{3} + 3 \vee k = -2\sqrt{3} - 1$$

0.25 điểm

+) khi $k = 2\sqrt{3} + 3$ thì:

$$A(2\sqrt{3} + 3; 0)$$

$$B(1; 0)$$

$$C(2\sqrt{3} + 3; 6 + 2\sqrt{3})$$

từ đây suy ra $G(\frac{4\sqrt{3}+7}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3})$.

+) khi $k = -2\sqrt{3} - 1$ thì:

$$A(-2\sqrt{3} - 1; 0)$$

$$B(1; 0)$$

$$C(-2\sqrt{3} - 1; -6 - 2\sqrt{3})$$

Suy ra $G(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3})$

vậy xác định được 2 điểm G ứng với 2 tam giác là $G(\frac{4\sqrt{3}+7}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3})$ và

$$G(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}).$$

0.25 điểm

Bài VI.a.2:

Ta thấy M và N nằm khác phía đối với (α)

$\Rightarrow N(-1; 0; 13)$. Ok

$\Rightarrow \overrightarrow{u_{MN'}} = \overrightarrow{MN'} = (-4; -1; 13)$

đường thẳng MN' đi qua $M(3; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{MN'}} = (-4; -1; 13)$ nên

có phương trình là: $MN': \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = 13t \end{cases}$

vì I là giao của MN' và (α) nên tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x = 3 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = 13t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 7 \\ y = 2 \\ z = -13 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(7; 2; -13)$

vậy với $I(7; 2; -13)$ thì $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài VIIA:

gọi các điểm thỏa mãn là $M(z)$

Trên trục ảo xét 2 điểm $F_1(i); F_2(-i)$.

Khi đó thì $\overline{F_1 F_2} = 2$ và $\overline{M F_1} = |z - i|; \overline{M F_2} = |z + i|$

Mà theo bài ra ta có: $|z - i| + |z + i| = 4$

$\Leftrightarrow \overline{M F_1} + \overline{M F_2} = 4$. **0.25 điểm**

điểm M có tổng khoảng cách tới 2 điểm F_1, F_2 cố định là một số không đổi nên M thuộc elip có 2 tiêu điểm là F_1, F_2 .

gọi phương trình elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

khi đó ta có $\overline{M F_1} + \overline{M F_2} = 2a$ ($2a$ là trục lớn nằm trên trục ảo Oy)

mà $\overline{M F_1} + \overline{M F_2} = 4 \Rightarrow a = 2$.

mặt khác, nếu $2c$ là tiêu cự của elip thì $\overline{F_1 F_2} = 2c \Rightarrow c = 1$

mà $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$

Suy ra phương trình của elip là: $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

vậy tập hợp các điểm thỏa mãn là elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Tổng kết điểm: 8.50 điểm

Nhận xét: Bài làm của em rất tốt, tuy nhiên còn một vài sai sót nhỏ trong trình bày. Nếu em trình bày bài làm trên giấy thì chắc chắn bị trừ điểm (bài làm này không bị trừ điểm).

Cố gắng phát huy nhé!

Chấm bài: hxthanh

