GIẢI PHƯƠNG TRÌNH-HỆ PHƯƠNG TRÌNH(SỬ DỤNG ĐẠO HÀM)

Bài 1: Giải phương trình

$$2^{2^x}+3^{2^x}=2^x+3^{x+1}+x+1$$

Giải:

Ta có $f(x)=2^x+3^x+x$ tăng trên R, nên phương trình tương đương

$$f(2^x)=f(x+1)\Leftrightarrow 2^x=x+1$$

Hàm số $g(x)=2^x-(x+1)$ xác định trên R

$$g'(x)=2^x\ln 2-1\Rightarrow g'(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge \log_2(\log_2 e)$$

Vậy phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm trên $(-\infty\ ;\ \log_2(\log_2 e))$ v $(\log_2(\log_2 e)\ ;\ +\infty)$

Thử trực tiếp tìm được hai nghiệm là $x=0\quad ;\quad x=1$

Bài 2: Giải phương trình

$$\log_5\left(\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}\right)=5^{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}-1}-1$$

Giải :

Điều kiện $x\ge 1$.Đặt $t=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}-1\ge 0$ (chứng minh)

phương trình tương đương $\log_5(t+1)=5^t-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5^t=y+1\\5^y=t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5^t=y+1\\5^t-5^y=y-t\ \ (*)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5^t=t+1\\y=t\end{cases}\Leftrightarrow t=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\le x\le 5$$

Bài 3: Giải phương trình

$$x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2x^4-4x^2+24x-4}$$

Giải :

$$\Leftrightarrow x^4-4x^3-2x^2+12x-2=0$$

Xét hàm số $y=x^4-4x^3-2x^2+12x-2\Rightarrow y'=4x^3-12x^2-4x+12$

Lập bảng biến thiên, suy ra hàm số có trục đối xứng x =1

Do đó đặt $x=X+1$, ta có phương trình

$$X^4-8X^2+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\pm\sqrt{4-\sqrt{11}}\\x=1\pm\sqrt{4+\sqrt{11}}\end{array}\right.$$

Bài 4: Giải phương trình

$$(1+\cos x)\left(2+4^{\cos x}\right)=3.4^{\cos x}$$

Giải :

Đặt $\cos x=y\qquad -1\le y\le 1$

$$\Leftrightarrow(1+y)\left(2+4^y\right)=3.4^y$$

Đặt $f(y)=\dfrac{3.4^y}{2+4^y}-y-1\Rightarrow f'(y)=\dfrac{6.\ln 4.4^y}{\left(2+4^y\right)^2}-1$

$f^{/}(y)=0 \Leftrightarrow 16.\ln 4.4^{y} = \left(2+4^{y}\right)^{2}$

Đây là phương trình bậc hai theo 4^{y}, nên có không quá 2 nghiệm. Vậy theo định lý Roolle phương trình $f(y)=0$ có không quá 3 nghiệm.

Ta có $y=0$, $y=\frac{1}{2}$, $y=1$ là 3 nghiệm của phương trình $f(y)=0$

Suy ra phương trình có nghiệm $x=k2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

Bài 5: Giải phương trình

$$\log_{2008}\frac{4x^{2}+2}{x^{6}+x^{2}+1}=x^{6}-3x^{2}-1$$

Giải :

$\frac{4x^{2}+2}{x^{6}+x^{2}+1}=\frac{2008^{x^6+x^2+1}}{2008^{4x^2+2}} \Leftrightarrow x^{6}+x^{2}+1=4x^{2}+2$ vì hàm số $f(x)=x.2008^{x}$ tăng trên R

Giải phương trình $x^{6}-3x^{2}-1=0 \Leftrightarrow u^{3}-3u-1 \quad u\geq 0$ phương trình chỉ có nghiệm trong (0,2)

Đặt $u=2\cos t \quad 0<t<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 3t=\frac{1}{2}$

Suy ra phương trình có nghiệm $x=\pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$

Bài 6: Giải phương trình

$$\cos x.\left(\frac{5}{2}\right)^{\sin x}=\sin x.\left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}$$

Giải :

Cosx = 0 và sinx = 0 không là nghiệm . Xét $x\neq\frac{k\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\sin x}}{\sin x}=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}}{\cos x}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{t}}{t}$ $\quad |t|<1$, $t\neq 0$. Hàm số $f(t)$ nghịch biến

Suy ra $\sin x=\cos x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Bài 7: Giải phương trình

$$(x+2)^{2}+\log_{2}\frac{x^{2}+4x+5}{\sqrt{2x+3}}=2\sqrt{2x+3}$$

Giải :

Đk $2x+3>0$

$\Leftrightarrow (x+2)^{2}+1+\log_{2}\left[(x+2)^{2}+1\right]=2\sqrt{2x+3}+\log_{2}2\sqrt{2x+3}$

Đặt $f(t)=t+\log_{2}t \quad (t>0)$

Tương tự

Phương trình có nghiệm $x=-1$

Bài 8: Giải phương trình

$$\sin^{1975}x-\cos^{1975}x=\frac{1}{\sin^{2007}x}-\frac{1}{\cos^{2007}x}$$

Giải :

$$\sin^{1975}x-\frac{1}{\sin^{2007}x}=\cos^{1975}x-\frac{1}{\cos^{2007}x}$$

$|\sin x|=1$; $|\cos x|=1$ không là nghiệm của phương trình

Đặt hàm số $f(t)=t^{1975}-\dfrac{1}{t^{2007}}$ $\quad t\in(-1\,;\,0)\cup(0\,;\,1)$

Ta có $f^{/}(t)=1975t^{1974}+\dfrac{2007}{t^{2008}}>0$ nên hàm số tăng trên mỗi khoảng

$t\in(-1\,;\,0)$: $f(t)$ chỉ nhận giá trị dương

$t\in(0\,;\,1)$: $f(t)$ chỉ nhận giá trị âm

Nên $f(\sin x)=f(\cos x)\Leftrightarrow\sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Bài 9: Giải phương trình

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}.\sin^2x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}.\cos^2 2x\right)=2\sin x.\sin 3x+\cos^4 2x-\cos^4 x$$

Giải :

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}.\cos^2x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}.\cos^2 2x\right)=2\left(\cos^2x-\cos^2 2x\right)+\cos^4 2x-\cos^4 x$$

$$\Leftrightarrow\cos^4 2x-2\cos^2 2x+\cos\left(\frac{\pi}{2}.\cos^2 2x\right)=\cos^4 x-2\cos^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{2}.\cos^2 x\right)$$

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}.t\right)$ $\quad 0\le t\le 1$. $f(t)$ giảm

$f(\cos^2 2x)=f(\cos^2 x)\Leftrightarrow\cos^2 2x=\cos^2 x\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{3}$

Bài 10: Giải phương trình

$$2^{x^2-34x+93}(x^2-34x+376)^3\left[x^2-34x+376+3\log_2+(x^2-34x+376)\right]=35$$

Giải :

Đặt $t=x^2-34x+376$ $\quad(t\ge 87)$

$\Leftrightarrow 2^t.t^3\log_2(2^t.t^3)=35.2^{283}=2^{256}.256^3\log_2(256^t.256^3)$

Hàm số $f(t)=2^t.t^3\log_2(2^t.t^3)$ đồng biến trên $[1;\ +\infty)$

$\Leftrightarrow t=256\Leftrightarrow x^2-34x+376=256\Leftrightarrow x=30$; $x=4$

Bài 11: Giải phương trình

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2x}+\frac{1}{2}=\cos 2x+\log_4(4\cos^3 2x-\cos 6x-1)$$

Giải :

Đặt $y=\cos 2x \quad (\frac{1}{3}<y\le 1)$

$\Leftrightarrow 2^{y-1}+\frac{1}{2}=y+\log_4(3y-1)$

Đặt $t=\log_2(3y-1)\Leftrightarrow 2^t=3y-1 \qquad (t\le 1)$

Ta có hệ $\begin{cases}2^y=2y+t-1\\ 2^t=3y-1\end{cases}\Leftrightarrow 2^y+y=2^t+t$

Xét hàm số $g(u)=2^u+u$, hàm số đồng biến trên R

$\Leftrightarrow 2^t=3t-1\Leftrightarrow f(t)=2^t-3t+1=0$

Xét hàm số $f(t)=2^t-3t+1$, sử dụng định lý Roll cm phương trình có không quá 3 nghiệm

Phương trình có nghiệm $t=1 \quad t=3(L)$, suy ra phương trình có nghiệm $x=k\pi$

Bài 12: Giải phương trình

$$64^x-8.343^{x-1}=8+12.4^x.7^{x-1}$$

Giải :

Đặt $a=2$; $b=-4^x$; $c=2.7^{x-1}$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0\Leftrightarrow (a+b+c)\left[\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\right]=0\Leftrightarrow a+b+c=0$

$\Leftrightarrow 2-4^x+2.7^{x-1}=0$

Xét hàm số $f(x)=2-4^x+2.7^{x-1}\Rightarrow f^/(x)=-4^x.\ln 4+\frac{2}{7}.7^x.\ln 7$

Phương trình $f^/(x)=0$ có nghiệm duy nhất nên theo định lí Lagrange phương trình $f(x)=0$ không có quá 2 nghiệm phân biệt

Phương trình có nghiệm $x=1$; $x=2$

Bài 13: Giải phương trình

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$

Giải :

Điều kiện $x<-1 \ v \ 3<x$

$\Leftrightarrow \log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\log_{7+4\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$

Đặt $a=7+4\sqrt{3}$ và $t=x^2-2x-3$

$\Leftrightarrow \log_{a+1}(t+1)=\log_a t$

Đặt $y=\log_a t$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^y+\left(\frac{1}{a+1}\right)^y=1\Leftrightarrow y=1$ là nghiệm duy nhất

Phương trình có nghiệm $x=1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$

Bài 14: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_5 x = \log_3\left(\sqrt{y}+4\right) \\ \log_5 y = \log_3\left(\sqrt{z}+4\right) \\ \log_5 z = \log_3\left(\sqrt{x}+4\right) \end{cases}$$

Giải :

Hệ phương trình không đổi qua phép hoán vị vòng quanh $\Rightarrow x = y = z$

Từ đó ta có $\log_5 x = \log_3\left(\sqrt{x}+4\right)$, đặt $t = \log_5 x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^t + 4\left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$$

Phương trình có đúng 1 ngiệm $t = 2$ do hàm số $f(t) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^t + 4\left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$ nghịch biến

Hệ phương trình có 1 nghiệm $x = y = z = 25$

Bài 15: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \frac{3}{2} \\ \left(x^2 y + 2x\right)^2 - 2x^2 y + 1 - 4x = 0 \end{cases}$$

Giải :

Từ phương trình (2) $\Leftrightarrow x(xy+2) = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1-2x}{x^2}$

(1) $\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1-x^2}{2x^2} = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1-2x}{2x^2}$

xét hàm số $f(t) = 2^t + \frac{t}{2} \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + \frac{1}{2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x^2} = \frac{1-2x}{2x^2}$

Hệ phương trình có 1 nghiệm $x = 2$, $y = -\frac{3}{4}$

Bài 16: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$$

Giải :

Đk $x+2y+6 > 0$ và $x+y+2 > 0$

(1) $\Leftrightarrow \ln(x^2+1) + x^2 + 1 = \ln(y^2+1) + y^2 + 1$

Hàm số $f(t) = \ln t + t \quad t > 1$ đồng biến trên $(0\ ;\ +\infty)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm y$

.Nếu $x = -y \quad$ (2) $\Leftrightarrow \log_3(6-x) = 1 \Leftrightarrow x = 3\ ;\ y = -3$

.Nếu $x = y$

$$(2) \Leftrightarrow 3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6u$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3^{2u} \\ x+1 = 2^{3u} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u = 1$$

Hàm số $g(u) = \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u$ nghịch biến trên R, suy ra $u = 1$ là nghiệm duy nhất

Hệ phương trình có 2 nghiệm $x = 2$, $y = -\frac{3}{4}$ và $x = 7$; $y = 7$

Bài 17: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Giải :

Đk x ; $y \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2+1} + 3\sqrt{x} = 2^{(4y)^2+1} + 3\sqrt{4y} \\ 2^{(x+y)^2+1} + 3\sqrt{x+y} = 7 \end{cases}$$

Hàm số $f(x) = 2^{x^2+1} + 3\sqrt{x}$ đồng biến trên $[0 ; \infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f(4y) \\ f(x+y) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Bài 18: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x = \log_2(8\cos z - \cos 2x - 5) \\ \cos y = \log_2(8\cos x - \cos 2y - 5) \\ \cos z = \log_2(8\cos y - \cos 2z - 5) \end{cases}$$

Giải :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8Z = 2^X + 2X^2 + 4 \\ 8X = 2^Y + 2Y^2 + 4 \\ 8Y = 2^Z + 2Z^2 + 4 \end{cases}$$

Hàm số $f(t) = \frac{1}{8}\left(2^t + 2t^2 + 4\right)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2} ;1\right]$

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = \frac{1}{8}\left(2^X + 2X^2 + 4\right)$$

Giải bằng đồ thị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = Y = Z = 1 \\ X = Y = Z = 2 \ (l) \end{array}\right.$

Hệ phương trình có 2 nghiệm $x = k2\pi$, $y = l2\pi$; $z = m2\pi$

Bài 19: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\log_2(1+3\cos x)=\log_3(\sin y)+2\\ \log_2(1+3\sin y)=\log_3(\cos x)+2\end{cases}$$

Giải :

Đk $\cos x\ ;\ \sin y\ge 0$

$\Rightarrow \log_2(1+3\cos x)+\log_3(\cos x)=\log_2(1+3\sin y)=\log_3(\sin y)$

Hàm số $f(t)=\log_2(1+3t)+\log_3 t\Rightarrow f^{/}(t)=\dfrac{3}{(1+3t)\ln 2}+\dfrac{2}{t\ln 3}>0$ đồng biến trên $\forall t>0$

$\Rightarrow \sin y=\cos x$

Thay vào phương trình (1) $\Rightarrow \log_2(1+3\cos x)=\log_3(\cos x)+2$

Lập BBT hàm số $g(v)=\log_2(1+3v)-\log_3 v$ với $v=\cos x\in(0\ ,\ 1]$ phương trình chỉ có 2 nghiệm $\cos x=1$, $\cos x=\dfrac{1}{3}$

Bài 20: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3y-y^4=28\\ x^2y+2xy^2+y^3=18\sqrt{2}\end{cases}$$

Giải:

Hệ tương đương

$$\begin{cases}y\left(x^3-y^3\right)=28 & (1)\\ y(x+y)^2=18\sqrt{2} & (2)\end{cases}\Rightarrow x>y>0$$

$(2)\Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt{y}}-y$, thay vào (1) được: $y\left[\left(\dfrac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt{y}}-y\right)^3-y^3\right]=28\quad(3)$

Đặt $t=\sqrt{y}>0$, (3) trở thành: $t^2\left[\left(\dfrac{3\sqrt[4]{8}}{t}-t^2\right)^3-t^6\right]=28\Leftrightarrow t^9-\left(3\sqrt[4]{8}-t^3\right)^3+28t=0$

Xét hàm $f(t)=t^9-\left(3\sqrt[4]{8}-t^3\right)^3+28t$ ta có:

$$f'(t)=9t^8+9t^2\left(3\sqrt[4]{8}-t^3\right)+28>0,\ \forall t>0$$

Chứng tỏ hàm số f(t) đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ phương trình f(t) = 0 nếu có nghiệm trên Khoảng $(0;+\infty)$ thì nghiệm đó là nghiệm duy nhất. Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho nếu có nghiệm (x_0, y_0) thì nghiệm đó là nghiệm duy nhất của hệ.

Nếu chọn x = 2y thì từ (1) ta có: $y^4=4\Leftrightarrow y=\sqrt{2}\Rightarrow x=2\sqrt{2}$. Rỏ ràng cặp số $(2\sqrt{2};\sqrt{2})$ thỏa (2).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Bài 21: Tìm số nghiệm của nằm trong khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình

$$e^{2\cos^2 x}(8\sin^6 x-12\sin^4 x+10\sin^2 x)=e+\frac{5}{2}$$

Giải :

Đặt $t=\sin^2 x = y \quad 0 \le t \le 1$

$\Leftrightarrow e^{2(1-t)}(8t^3x-12t^2x+10t)=e+\dfrac{5}{2}$

Xét hàm số $f(x)=e^{2(1-t)}(8t^3-12t^2+10t)$

$$\Rightarrow f^{/}(x)=e^{2(1-t)}\left[(24t^2-24t+10)-2(8t^3-12t^2+10t)\right]=-2.e^{2(1-t)}.g(t)$$

Với $g(t)=8t^3-24t^2+22t-5 \Rightarrow g^{/}(t)=2(12t^2-24t+11)$

Lập bảng biến thiên, suy ra phương trình $g(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t=u$, $0<u<1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

t	0		$1-\frac{\sqrt{3}}{6}$		1
g'		+	0	−	
g	-5	↗		↘	1

t	0		u		1
f'		+	0	−	
f	0	↗		↘	6

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$, suy ra phương trình $f(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t=v$, $0<v<u$

Suy ra phương trình $\sin x = \pm\sqrt{v}$ có 4 nghiệm phân biệt $x\in(0,\ 2\pi)$