

Bài làm đề thi thử đại học lần 3 - VMF

Câu I.

1. Với $m = \frac{3}{2}$, ta có

$$y = f(x) = x^4 + 8x^2 - \frac{9}{2}$$

với đồ thị là (C_0) .

□ Ta có

$$f'(x) = 4x^3 + 16x$$

$$\text{Nên } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

□ Ta lại có

$$f''(x) = 12x^2 + 16 > 0$$

Nên (C_0) không có điểm uốn nào.

□ Chú ý rằng

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = -\frac{9}{2}$$

□ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{9}{2}$	$+\infty$

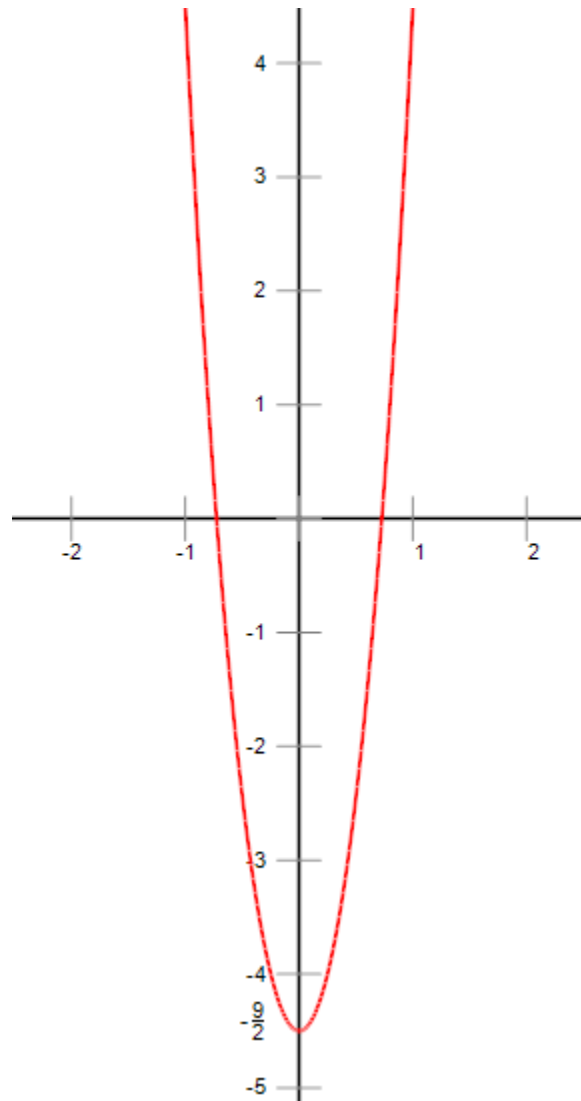
Nhận xét:

$y = f(x)$ đồng biến trên $(0, +\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

$y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ với $y_{CT} = -\frac{9}{2}$.

$y = f(x)$ không có cực đại.

□ Đồ thị



2. Giao điểm của (C) với trục hoành là các điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Nhận xét rằng bất kì x_0 nào là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì $-x_0$ cũng là nghiệm. Vậy nếu phương trình $f(x) = 0$ có đủ 4 nghiệm phân biệt thì 4 nghiệm đó là $-x_2 < -x_1 < x_1 < x_2$. Rõ ràng hai nghiệm âm lần lượt đối xứng với hai nghiệm dương qua trục tung. Do vậy, điều kiện đề bài tương đương với

$$|x_1 + x_1| = |x_2 - x_1| \Leftrightarrow 2x_1 = x_2 - x_1 \Leftrightarrow x_2 = 3x_1$$

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì ta cần tìm m sao cho $t_2 = 9t_1$ (với $t_1 < t_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $t^2 + 2(2m + 1)t - 3m = 0$).

Cũng cần nhận xét thêm là nếu $t_1 = 0$ thì $t_2 = 0$, mâu thuẫn với yêu cầu đề bài là (C) cắt trục hoành tại 4 điểm. Vậy $t_1 \neq 0$.

□ Xét trường hợp $m = -\frac{1}{2}$, khi đó ta có $f(x) = x^4 + \frac{3}{2}$ nên phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm (không thỏa yêu cầu bài toán).

□ Vậy giờ ta chỉ xét $m \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} t_1^2 + 2(2m + 1)t_1 - 3m &= 0 \\ t_2^2 + 2(2m + 1)t_2 - 3m &= 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} t_1^2 + 2(2m + 1)t_1 - 3m &= 0 \quad (1) \\ 27t_1^2 + 6(2m + 1)t_1 - m &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Nhân phương trình (1) cho -27 rồi cộng với phương trình (2), ta thu được

$$-48(2m + 1)t_1 + 80m = 0 \Leftrightarrow 3(2m + 1)t_1 = 5m \Leftrightarrow t_1 = \frac{5m}{3(2m + 1)} \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{5m}{3(2m + 1)} \right)^2 + 2(2m + 1) \frac{5m}{3(2m + 1)} - 3m &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{m(m + 3)(12m + 1)}{9(2m + 1)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \\ m = -\frac{1}{12} \end{cases} \end{aligned}$$

□ Bước cuối cùng là thử lại những giá trị m vừa tìm được.

Với $m = 0$, ta có $f(x) = x^4 + 2x^2$ nên phương trình $f(x) = 0$ chỉ có nghiệm thực duy nhất là $x = 0$. Vậy $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Với $m = -3$, ta có $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ nên phương trình $f(x) = 0$ có các nghiệm thực $x = \pm 1, x = \pm 3$ (hoàn toàn thỏa yêu cầu bài toán).

Với $m = -\frac{1}{12}$, ta có $f(x) = x^4 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{4}$ nên phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = -\frac{1}{12}$ không thỏa yêu cầu bài toán.

□ Kết luận: $m = -3$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Câu II.

1. Xét phương trình đã cho

$$\cos^2 2x + 2 \cos 2x - \sin x + 4 = 2\sqrt{2 - \sin x}$$

Chú ý rằng

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Nên có thể viết lại phương trình trên dưới dạng

$$(1 - 2 \sin^2 x)^2 + 2(1 - 2 \sin^2 x) - \sin x + 4 = 2\sqrt{2 - \sin x}$$

Đặt $t = \sin x \in [-1, 1]$, một lần nữa ta viết lại phương trình trên

$$\begin{aligned}(1 - 2t^2)^2 + 2(1 - 2t^2) - t + 4 &= 2\sqrt{2 - t} \\ \Leftrightarrow 4t^4 - 8t^2 - t + 7 &= 2\sqrt{2 - t}\end{aligned}$$

Đặt $y = \sqrt{2 - t}$, suy ra $t = 2 - y^2$ và $1 \leq y \leq \sqrt{3}$. Tiếp tục viết lại phương trình trên

$$\begin{aligned}4(2 - y^2)^4 - 8(2 - y^2)^2 - (2 - y^2) + 7 &= 2y \\ \Leftrightarrow (y - 1)^2(4y^6 + 8y^5 - 20y^4 - 48y^3 + 12y^2 + 72y + 37) &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Ta có $4y^6 + 8y^5 - 20y^4 - 48y^3 + 12y^2 + 72y + 37 = 4(y + 1)^2(y^2 - 3)^2 + 1 > 0$ nên (1) có nghiệm duy nhất $y = 1$, suy ra $t = 2 - y^2 = 1$, suy ra tiếp

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Đó cũng là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

2. Xét hệ đã cho

$$\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3 - 6x + 5} = (x^2 + 2x - 6)(x^3 + 4) & (1) \\ x + \frac{2}{x} \geq 1 + \frac{2}{x^2} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định của phương trình (1)

$$x^3 - 6x + 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-5) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{21}-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{21}-1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bất phương trình (2) tương đương

$$x^3 - x^2 + 2x - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

Từ hai kết quả trên ta suy ra

$$x \geq \frac{\sqrt{21}-1}{2} \Rightarrow x^3 > 4$$

Do $x > 0$ nên phương trình (1) tương đương với

$$6x^2\sqrt{x^3-6x+5} = (x^2+2x-6)(x^3+4)$$

$$\Rightarrow 6x^4(x^3-6x+5) = (x^2+2x-6)^2(x^3+4)^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2(x^8+8x^7+20x^6-4x^5-28x^4+56x^3-20x^2+48x+144) = 0 \quad (3)$$

Mà

$$x^8 - 4x^5 = x^5(x^3 - 4) > 0$$

$$8x^7 - 8x^4 = 8x^4(x^3 - 1) > 0$$

$$20x^6 - 20x^4 = 20x^4(x^2 - 1) > 0$$

$$20x^3 - 20x^2 = 20x^2(x - 1) > 0$$

Nên $x^8 + 8x^7 + 20x^6 - 4x^5 - 28x^4 + 56x^3 - 20x^2 + 48x + 144 > 0$, tức là phương trình (3) chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 2$. Thử lại thấy $x = 2$ thỏa hệ đã cho nên đó cũng là nghiệm duy nhất.

Câu III.

Đặt

$$t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$$

$$\Rightarrow xt + 1 = \sqrt{1-2x-x^2}$$

$$\Rightarrow x^2t^2 + 2xt + 1 = 1 - 2x - x^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2-2t}{1+t^2}$$

Vậy

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{d\left(\frac{-2-2t}{1+t^2}\right)}{1+t\left(\frac{-2-2t}{1+t^2}\right)+1}$$

Chú ý rằng

$$d\left(\frac{-2-2t}{1+t^2}\right) = \frac{2(t^2+2t-1)}{(t^2+1)^2} dt$$

Nên

$$\int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{d\left(\frac{-2-2t}{1+t^2}\right)}{1+t\left(\frac{-2-2t}{1+t^2}\right)+1} = \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{-t^2-2t+1}{(t-1)(t^2+1)} dt = \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{dt}{1-t} - 2 \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1}$$

Đặt

$$I = \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{dt}{1-t}, \quad J = \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1}$$

Thì ta được

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = I - 2J$$

□ Tính I

Đặt $l = 1-t$, ta có

$$I = \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{dt}{1-t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{d(1-l)}{l} = - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dl}{l} = -(\ln|l|) \Big|_1^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \ln 2$$

□ Tính J

Đặt $t = \tan h$, ta có

Giả sử hình chóp tam giác đều đó là $S.ABC$. Trên $mp(SAB)$ dựng $AD \perp SB$ tại D . Trên $mp(SCB)$ dựng $CD' \perp SB$ tại D' . Hai tam giác SAB và SCB có cạnh chung SB , $AB = CB$, $SA = SC$ nên chúng bằng nhau. Từ đó suy ra $\widehat{SBA} = \widehat{SCA}$. Hai tam giác BAD và BCD' là hai tam giác vuông có cạnh huyền lần lượt là BA và BC bằng nhau, ngoài ra còn có hai góc nhọn bằng

nhau là $\widehat{SBA} = \widehat{SCA}$. Vậy hai tam giác BAD và BCD' bằng nhau, suy ra $BD = BD'$, tức là $D \equiv D'$ (do cả hai điểm này cùng thuộc cạnh BS).

Vậy hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) có giao tuyến SB có $AD \perp SB$ và $CD \perp SB$, mặt khác góc giữa hai mặt phẳng này là α , nên $\widehat{ADC} = \alpha$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ADC , ta có

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \widehat{ADC}$$

Chú ý rằng $AD = CD$ và $AC = a$, nên từ công thức trên suy ra

$$a^2 = 2AD^2 - 2AD^2 \cos \alpha \Rightarrow AD = \frac{a}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}$$

Đặt $x = \widehat{SBA}$ thì xét tam giác ADB vuông tại D ta có

$$\sin x = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}$$

Vậy

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{1 - 2 \cos \alpha}{2(1 - \cos \alpha)}}$$

(do x luôn là góc nhọn nên $\cos x$ dương)

Suy ra

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}}}{\sqrt{\frac{1 - 2 \cos \alpha}{2(1 - \cos \alpha)}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}$$

Trên $mp(SAB)$ dựng $SE \perp AB$ tại E . Chú ý rằng E cũng là trung điểm AB do tam giác SAB cân tại S . Xét tam giác SEB vuông tại E , ta có

$$SE = EB \tan x = \frac{1}{2} AB \tan x = \frac{a}{2\sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}$$

Gọi O là tâm tam giác đều ABC . Hiển nhiên O thuộc CE do CE là trung tuyến tam giác ABC . Vì tam giác ABC đều nên CE cũng là đường cao, tức là $CE \perp AB$. Ngoài ra cũng có $SE \perp AB$. Vậy $AB \perp (SCE)$. Lại có $AB \subset (ABC)$ nên $(ABC) \perp (SCE)$.

Gọi F là trung điểm AC . Tất nhiên O thuộc BF . Chứng minh tương tự trên ta có $(ABC) \perp (SBF)$.

Vậy ta có

$$(ABC) \perp (SCE)$$

$$(ABC) \perp (SBF)$$

Mà $SO \subset (SCE)$ và $SO \subset (SBF)$ nên SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SCE) và (SBF) . Từ đó kết luận được $SO \perp (ABC)$, suy ra $SO \perp CE$.

Xét tam giác đều ACE vuông tại E , ta có

$$CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Chú ý rằng O đồng thời là trọng tâm tam giác đều ABC , vì thế

$$OE = \frac{1}{3}CE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Xét tam giác SOE vuông tại O , ta có

$$SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4(1 - 2\cos\alpha)} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{\frac{2 + 2\cos\alpha}{3 - 6\cos\alpha}}}{2}$$

Ta có diện tích tam giác đều ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}CE \cdot AB = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vậy thể tích tứ diện $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{\frac{2 + 2\cos\alpha}{3 - 6\cos\alpha}}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2 + 2\cos\alpha}}{24\sqrt{1 - 2\cos\alpha}}$$

Câu V.

Đặt $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$ thì ta có $xyz = 1$ và

$$P = \frac{\sqrt{x^6 + 1} + \sqrt{y^6 + 1} + \sqrt{z^6 + 1}}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{\sqrt{x^6 + x^2y^2z^2} + \sqrt{y^6 + x^2y^2z^2} + \sqrt{z^6 + x^2y^2z^2}}{x^3 + y^3 + z^3}$$

Ta sẽ chứng minh $P \leq \sqrt{2}$, tức là chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x^6 + x^2y^2z^2} + \sqrt{y^6 + x^2y^2z^2} + \sqrt{z^6 + x^2y^2z^2}}{x^3 + y^3 + z^3} \leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & x\sqrt{x^4 + y^2z^2} + y\sqrt{y^4 + z^2x^2} + z\sqrt{z^4 + x^2y^2} \leq \sqrt{2}(x^3 + y^3 + z^3) \\ \Leftrightarrow & \left(x\sqrt{x^4 + y^2z^2} + y\sqrt{y^4 + z^2x^2} + z\sqrt{z^4 + x^2y^2} \right)^2 \leq 2(x^3 + y^3 + z^3)^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho ba cặp số $(x, \sqrt{x^4 + y^2z^2})$, $(y, \sqrt{y^4 + z^2x^2})$, $(z, \sqrt{z^4 + x^2y^2})$, ta có

$$\begin{aligned} & \left(x\sqrt{x^4 + y^2z^2} + y\sqrt{y^4 + z^2x^2} + z\sqrt{z^4 + x^2y^2} \right)^2 \\ & \leq (x^2 + y^2 + z^2)(x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \end{aligned}$$

Việc còn lại là đi chứng minh

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \leq 2(x^3 + y^3 + z^3)^2 \quad (1)$$

Khai triển hai vế của (1), ta viết lại (1) dưới dạng tương đương như sau

$$\begin{aligned} & x^6 + y^6 + z^6 + 4x^3y^3 + 4y^3z^3 + 4z^3x^3 \\ & \geq 2x^2y^2(x^2 + y^2) + 2y^2z^2(y^2 + z^2) + 2z^2x^2(z^2 + x^2) + 3x^2y^2z^2 \\ \Leftrightarrow & 2(x^6 + y^6 + z^6) - 6x^2y^2z^2 \\ & \geq 4x^2y^2(x^2 + y^2 - 2xy) + 4y^2z^2(y^2 + z^2 - 2yz) + 4z^2x^2(z^2 + x^2 - 2zx) \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 + z^2)((x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2) \\ & \geq 4x^2y^2(x - y)^2 + 4y^2z^2(y - z)^2 + 4z^2x^2(z - x)^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 + z^2)((x - y)^2(x + y)^2 + (y - z)^2(y + z)^2 + (z - x)^2(z + x)^2) \\ & \geq 4x^2y^2(x - y)^2 + 4y^2z^2(y - z)^2 + 4z^2x^2(z - x)^2 \\ \Leftrightarrow & [(x^2 + y^2 + z^2)(x + y)^2 - 4x^2y^2](x - y)^2 + [(x^2 + y^2 + z^2)(y + z)^2 - 4y^2z^2](y - z)^2 \\ & + [(x^2 + y^2 + z^2)(z + x)^2 - 4z^2x^2](z - x)^2 \geq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Mà ta có

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)(x + y)^2 \geq (x^2 + y^2)(x + y)^2 \geq 2xy.4xy \geq 4x^2y^2 \\ & (x^2 + y^2 + z^2)(y + z)^2 \geq (y^2 + z^2)(y + z)^2 \geq 2yz.4yz \geq 4y^2z^2 \\ & (x^2 + y^2 + z^2)(z + x)^2 \geq (z^2 + x^2)(z + x)^2 \geq 2zx.4zx \geq 4z^2x^2 \end{aligned}$$

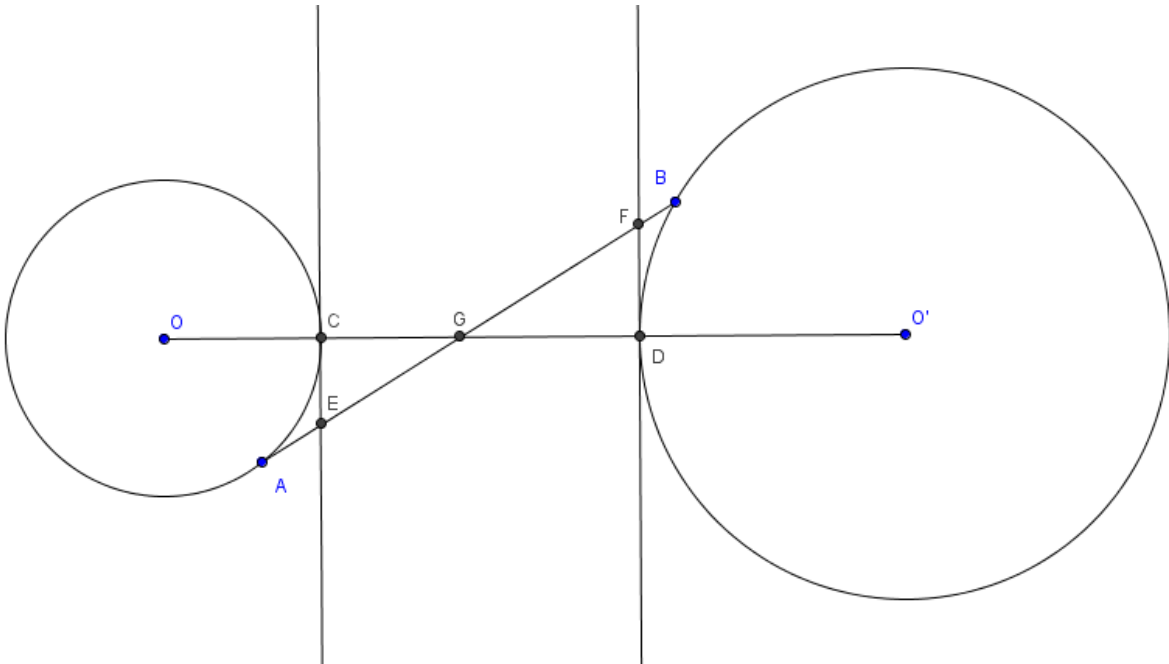
Nên (2) hiển nhiên đúng, tức là (1) cũng đúng. Theo nguyên lý bắc cầu thì bất đẳng thức (*) đúng. Vậy ta đã chứng minh được $P \leq \sqrt{2}$.

Khi $a = b = c = 1$ thì $P = \sqrt{2}$. Vậy kết luận $\max P = \sqrt{2}$.

Câu VIa.

1. Trước hết ta có bổ đề sau: hai điểm lần lượt di động trên hai đường tròn cố định có bán kính lần lượt là R và R' cũng như có đường nối tâm là D thì khoảng cách giữa hai điểm đó không bé hơn $D - R - R'$.

□ Chứng minh bổ đề: xét hai đường tròn (O, R) và (O', R') có đường nối tâm OO' cắt hai đường tròn lần lượt tại C, D . A, B là hai điểm di động lần lượt thuộc (O, R) và (O', R') . Ta cần chứng minh $AB \geq CD$.

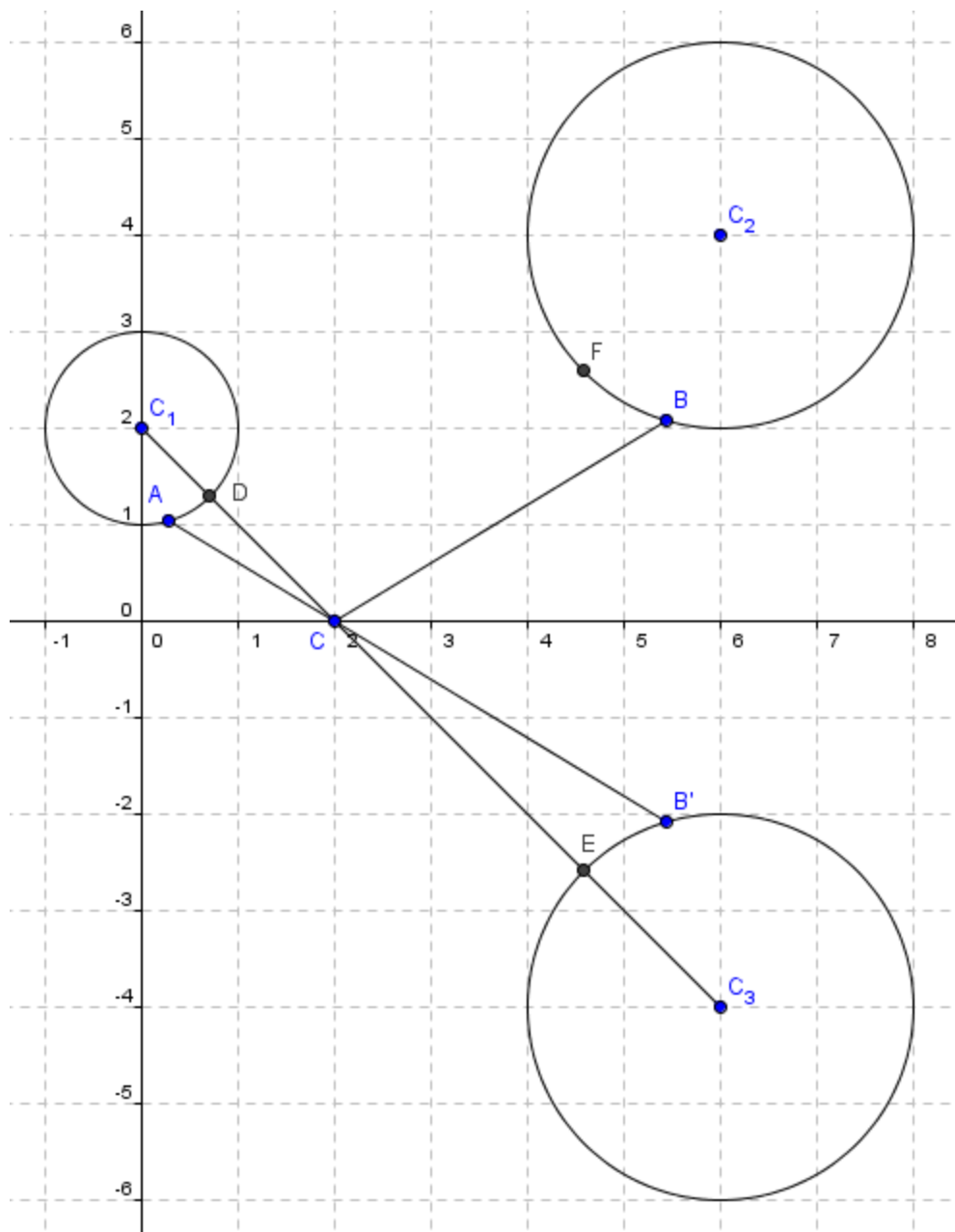


Gọi G là giao điểm của AB và CD , E, F lần lượt là giao điểm của AB với tiếp tuyến tại C của (O, R) và tiếp tuyến tại D của (O', R') . Ta có

$$AB = AG + BG \geq EG + FG \geq CG + DG = CD$$

Vậy bổ đề đã được chứng minh.

□ Trở lại bài toán. Gọi tâm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt là C_1 và C_2 . Dựng đường tròn (C_3) có tâm là C_3 đối xứng với đường tròn (C_2) qua Ox . B' là điểm đối xứng với B qua Ox . (Từ đó suy ra $B' \in (C_3)$).



Ta có $C_1 = (0, 2)$ và $C_2 = (6, 4)$.

Tọa độ C_3 là: $C_3 = (6, -4)$. Vậy phương trình đường tròn (C_3) là $(C_3): (x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 4$

Ta có $AC + CB = AC + CB' \geq AB'$ (1).

Cần tìm giá trị nhỏ nhất của AB' . Gọi D, E lần lượt là giao điểm của C_1C_3 với $(C_1), (C_3)$. Theo bổ đề trên thì $AB' \geq DE$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $AC + CB \geq DE$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv D, B \equiv F$ (với F là điểm đối xứng của E qua Ox), $C = C_1C_3 \cap Ox$.

Ta có $\overrightarrow{C_1C_3} = (6, -6)$, nên nếu gọi $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của đường thẳng C_1C_3 thì $\vec{n} = (6, 6)$. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng C_1C_3 có dạng $6x + 6y + a = 0$. Do $C_1 \in C_1C_3$ nên $6.0 + 6.2 + a = 0 \Leftrightarrow a = -12$. Vậy ta có $(C_1C_3): 6x + 6y - 12 = 0$ hay viết cách khác là $(C_1C_3): x + y - 2 = 0$.

□ D là giao điểm của C_1C_3 với (C_1) và $x_D > x_{C_1}$ nên ta có hệ sau

$$\begin{cases} x_D + y_D - 2 = 0 & (3) \\ x_D^2 + (y_D - 2)^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

Thay $y_D = -x_D + 2$ từ phương trình (3) vào phương trình (4), ta có

$$\begin{aligned} x_D^2 + (-x_D + 2 - 2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x_D^2 &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x_D &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Do $x_D > x_{C_1} = 0$ nên $x_D = \frac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra $y_D = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$. Vậy ta có

$$D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4-\sqrt{2}}{2} \right)$$

Nghĩa là điểm A cần tìm có tọa độ $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4-\sqrt{2}}{2} \right)$

□ E là giao điểm của C_1C_3 với (C_3) và $x_E < x_{C_3}$ nên ta có hệ sau

$$\begin{cases} x_E + y_E - 2 = 0 & (5) \\ (x_E - 6)^2 + (y_E + 4)^2 = 1 & (6) \end{cases}$$

Thay $y_E = -x_E + 2$ từ phương trình (5) vào phương trình (6), ta có

$$\begin{aligned} (x_E - 6)^2 + (-x_E + 2 + 4)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (x_E - 6)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x_E &= 6 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Do $x_E < x_{C_3} = 6$ nên $x_E = 6 - \sqrt{2}$, suy ra $y_E = -4 + \sqrt{2}$. Vậy ta có

$$E = (6 - \sqrt{2}, -4 + \sqrt{2})$$

Vậy suy ra F có tọa độ là

$$F = (6 - \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$$

Nghĩa là điểm B cần tìm có tọa độ là $B = (6 - \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$

□ Điểm C cần tìm là giao điểm của C_1C_3 và Ox nên ta có hệ sau

$$\begin{cases} x_C + y_C - 2 = 0 \\ x_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C là $C = (0, 2)$.

□ Kết luận: các điểm A, B, C cần tìm có tọa độ là

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4 - \sqrt{2}}{2} \right), \quad B = (6 - \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}), \quad C = (0, 2)$$

2. Gọi r là tâm mặt cầu S . Với mọi điểm $I(x, y, z)$ thỏa yêu cầu bài toán, ta đều có

$$r = d(I, (P_1)) = \frac{|2x - y + 2z - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2x - y + 2z - 1|}{3} \quad (1)$$

$$r = d(I, (P_2)) = \frac{|2x - y + 2z + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2x - y + 2z + 5|}{3} \quad (2)$$

$$r = IA = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2} \quad (3)$$

Chú ý rằng nếu $|\alpha| = |\beta|$ mà $\alpha < \beta$ thì $\beta = -\alpha > 0$. Thật vậy, $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = -\beta \end{cases}$ mà $\alpha < \beta$ nên $\alpha = -\beta$. Nếu $\beta < 0$ thì $\alpha > 0$ suy ra $\alpha > \beta$ (vô lí).

Từ (1) và (2) suy ra

$$|2x - y + 2z - 1| = |2x - y + 2z + 5|$$

Mà $2x - y + 2z + 5 > 2x - y + 2z - 1$ nên theo chú ý trên, ta suy ra

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z + 5 &= -2x + y - 2z + 1 \\ \Leftrightarrow 2x - y + 2z + 2 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Vậy điểm I thuộc mặt phẳng (P) : $2x - y + 2z + 2 = 0$ (*).

Từ (1) và (4) ta suy ra $r = 1$. Kết hợp với (3) ta thu được

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = r^2 = 1$$

Vậy điểm I thuộc mặt cầu $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra I thuộc phần giao giữa mặt phẳng $2x - y + 2z + 2 = 0$ và mặt cầu $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$. Nếu tồn tại một phần giao như vậy thì đó là một đường

tròn và ta có điều phải chứng minh. Giờ ta cần kiểm tra xem có tồn tại phần giao này hay không. Rõ ràng $A(-1,1,1)$ là tâm của đường tròn $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Đường tròn này có bán kính là 1. Nếu $d(A, (P)) < 1$ thì phần giao là tồn tại. Thật vậy, ta có

$$d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} < 1$$

Chứng minh hoàn tất. I thuộc đường tròn

$$(O, R): \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 & (5) \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 & (6) \end{cases}$$

Khoảng cách từ đường tròn (5) đến mặt phẳng (6) là $d = d(A, (P)) = \frac{1}{3}$. Suy ra

$$R = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Gọi tọa độ điểm O là $O = (a, b, c)$. Ta có O thuộc mặt phẳng (6) và $AO = d$. Vậy

$$\begin{cases} 2a - b + 2c + 2 = 0 & (7) \\ (a+1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = \frac{1}{9} & (8) \end{cases}$$

Thay $b = 2a + 2c + 2$ từ (7) vào (8), ta thu được

$$\begin{aligned} (a+1)^2 + (2a+2c+1)^2 + (c-1)^2 &= \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5}(5a+4c+3)^2 + \frac{1}{45}(9c-7)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+4c+3=0 \\ 9c-7=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{9} \\ c = \frac{7}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó tính được

$$b = 2a + 2c + 2 = \frac{10}{9}$$

Vậy ta có

$$O = \left(-\frac{11}{9}, \frac{10}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

□ Kết luận: I thuộc đường tròn cố định có phương trình

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Đường tròn này có tâm O và bán kính R , trong đó

$$O = \left(-\frac{11}{9}, \frac{10}{9}, \frac{7}{9}\right), \quad R = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Câu VIIa.

Các số thỏa yêu cầu đề bài có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$, trong đó $a_5 : 2$, $a_1 \neq 0$, và có đúng hai trong năm số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 bằng 0.

Ta có các trường hợp sau:

□ $a_5 = 0$. Khi đó có đúng 3 cách xếp số 0 còn lại vào các vị trí a_2, a_3, a_4 . a_1 và hai vị trí còn lại mỗi vị trí có 9 cách chọn từ các số $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Vậy tất cả có $3 \cdot 9^3$ cách chọn số trong trường hợp này.

□ $a_5 \neq 0$. Khi đó có 4 cách chọn a_5 từ các số $\{2, 4, 6, 8\}$. Xếp hai số 0 vào hai trong ba vị trí a_2, a_3, a_4 có C_3^2 cách. Hai vị trí còn lại mỗi vị trí có 9 cách chọn từ các số $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Vậy tất cả có $4 \cdot C_3^2 \cdot 9^2$ cách chọn số trong trường hợp này.

□ Theo quy tắc cộng, có tổng cộng $3 \cdot 9^3 + 4 \cdot C_3^2 \cdot 9^2 = 3159$ số thỏa đề bài.