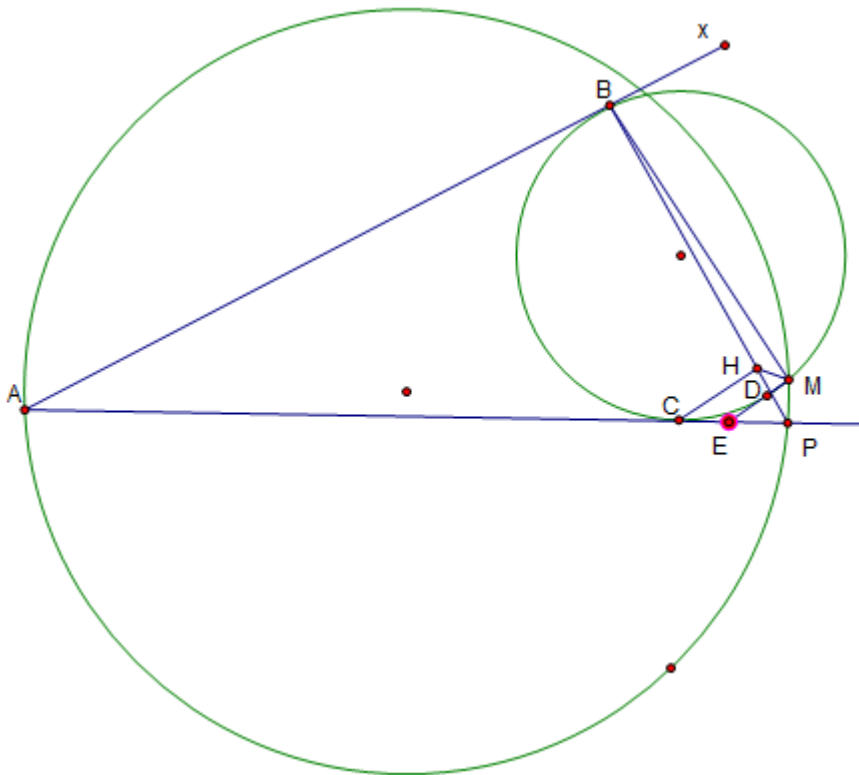




Ta có: $\widehat{xBM} = \widehat{BDM}$

$$\rightarrow \widehat{ABM} = 180^\circ - \widehat{xBM} = \widehat{PDM}$$

Lại có $\widehat{MAB} = \widehat{BPM}$

$$\rightarrow \widehat{PMD} = \widehat{AMB} = \widehat{APB}$$

Đặt $E = DM \cap Ap$

Ta có: $\triangle EPD \sim \triangle EMP$

$\rightarrow E$ là trung điểm PC

Do PHC là tam giác vuông tại H suy ra $EP=EC=EH$

$$\rightarrow \widehat{EHP} = \widehat{EPH} = \widehat{EMP}$$

$\rightarrow EPMH$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{HMP} = \widehat{HEC} = 2\widehat{APB}$ đpcm

Bài 3(Đại số THPT): Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn: $ac - b^2 > 0$ và $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên u, v không đồng thời bằng 0 sao cho

$$|f(u, v)| \leq 2 \sqrt{\frac{D}{3}}$$

(hungvu)

Lời giải.

Đề ý rằng $|-f(x, y)| = |f(x, y)|$ nên ta chỉ cần xét $a \geq 0$ là được. Kết hợp với giả thiết $D = ac - b^2 > 0$, ta có $a > 0$ và $c > 0$. Lúc này ta có

$$f(x, y) = a\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + \frac{D}{a}y^2 \geq 0.$$

Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với việc chỉ ra cặp số nguyên (u, v) không đồng thời bằng 0 sao cho

$$f(u, v) \leq 2 \sqrt{\frac{D}{3}}.$$

Gọi $A = \{(x, y) | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 > 0\}$. Thế thì ta có $f(x, y) > 0$ với mọi $(x, y) \in A$. Gọi $(x, y) \in A$ sao cho $f(u, v) = \min_{(x, y) \in A} f(x, y)$ và đặt $K = f(u, v)$, $K > 0$. Rõ ràng u, v phải là hai số nguyên tố cùng nhau, do đó tồn tại hai số nguyên s, t sao cho

$$us - vt = 1. \quad (*)$$

Đặt $g(x, y) = f(ux + ty, vx + sy)$, ta có

$\min g(x, y) = \min f(ux + ty, vx + sy) = f(u, v) = K$ sao cho $(x, y) \in A$ (đạt được tại $x=1$ và $y=0$). Đặt $L = uta + vsc + btv + usb$, sau một vài tính toán ta viết được

$$g(x, y) = f(ux + ty, vx + sy) = f(u, v).x^2 + 2Lxy + f(t, s).y^2.$$

Từ $(*)$, ta có

$$K \cdot f(t, s) = f(u, v). f(t, s) = L^2 + D,$$

Suy ra

$$f(x, y) = K\left(x + \frac{Ly}{K}\right)^2 + \frac{Dy^2}{K}.$$

Bây giờ, ta chọn số n như sau

$$n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{K} \right\rfloor & \text{nếu } \left\{ \frac{L}{K} \right\} \leq \frac{1}{2} \\ \left\lfloor \frac{L}{K} \right\rfloor + 1 & \text{nếu } \left\{ \frac{L}{K} \right\} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dễ thấy $\left| n - \frac{L}{K} \right| \leq \frac{1}{2}$, do đó

$$K \leq g(n, -1) = K\left(n - \frac{L}{K}\right)^2 + \frac{D}{K} \leq \frac{K}{4} + \frac{D}{K},$$

Suy ra $K^2 \leq \frac{4D}{3}$, hay $K \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}$. (Đpcm)

Bài 4(Giải tích THPT) Tìm tất cả các hàm thức f xác định trên R thỏa mãn điều kiện: $f(f(x) + y) = 2y + f(f(y) - x) \forall x, y \in R$

(hungvu)

Lời giải:

Với $x \in R$ tùy ý ta chọn $\alpha = \frac{f(0)-x}{2}$.

Hay $x = f(0) - 2\alpha$. Lại chọn $\beta = -f(\alpha), \gamma = f(\beta) - \alpha$.

Khi đó $f(\gamma) = f(f(\beta) - \alpha) = f(f(\alpha) + \beta) - 2\alpha = f(0) - 2\alpha = x$.

Vậy f là một toàn ánh do đó có $a \in R$ sao cho $f(a)=0$.

Khi đó với y tùy ý ta có $f(y)=f(f(a)+y)=2a+f(f(y)-a)$.

Với $x \in R$ tùy ý, do f toàn ánh nên có y sao cho

$$f(y)=x+a \rightarrow x = f(y) - a.$$

Khi đó

$$x = f(y) - a = a + f(f(y) - a) = f(x) + a.$$

Suy ra

$$f(x) = x-a. \text{ Thử lại thấy thỏa mãn}$$

Kết luận: Tất cả các hàm cần tìm là $f(x)=x+C$, C là hằng số tùy ý.

Câu 5 (Hình học THPT): Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, 2 đường chéo cắt nhau tại M. Qua trung điểm P của cạnh AB, kẻ đoạn PM, qua trung điểm Q của BC kẻ đoạn QM, chứng minh rằng nếu $PM \perp CD$ thì $QM \perp AD$

BÀI GIẢI

Đặt $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$

Chúng minh được

$$\Delta MAB \sim \Delta MDC \Rightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MB} = k$$

Vậy $MD=kMA$; $MC=k$, do đó

$$\overrightarrow{CM} = \frac{kb}{a} \cdot \vec{a}; \quad \overrightarrow{MD} = \frac{-ka}{b} \cdot \vec{a} \quad \text{với } a=MA \text{ và } b=MB$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

Mặt khác

$$\Rightarrow \overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2} (OD^2 - OA^2) = 0$$

$$\Rightarrow QM \perp AD$$

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{k}{ab} (b^2 \vec{c} - a^2 \vec{b})$$

Theo giả thiết : $PM \perp CD$ nên $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$

Mà :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MP}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})(b^2 \vec{a} + a^2 \vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} (b^2 - a^2) = 0$$

* Nếu $b^2 - a^2 = 0$ hay $a = b$ thì ABCD là hình thang cân hay hình chữ nhật $\Rightarrow$ ĐPCM

* Nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ thì $AC \perp CD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(OD^2 - OA^2) = 0$$

$$\Rightarrow QM \perp AD$$

Bài 6(Olimpiad): Cho $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot x_{i+1} = 1 \quad (1)$$

Với mỗi $1 \leq k \leq n$. Tìm $\max |x_k|$.

(anh qua)

Lời giải

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot x_{i+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \dots + (x_k + x_{k+1})^2 + \dots + x_n^2 = 2.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \dots + (x_{k-1} + x_k)^2 \\ &= x_1^2 + (-x_1 - x_2)^2 + \dots + ((-1)^{k-1} x_{k-1} + (-1)^k x_k)^2 \\ &\geq \frac{1}{k} x_k^2 \end{aligned}$$

Tương tự

$$(x_k + x_{k+1})^2 + \dots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2 \geq \frac{1}{n-k+1} x_k^2$$

Cộng theo vế của 2 bất đẳng thức ta có:

$$2 \geq \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)x_k^2$$

$$\rightarrow |x_k| \leq \sqrt{\frac{2k(n-k+1)}{n+1}}.$$

Đâu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = -x_1 - x_2 = \dots = (-1)^{k-1} \cdot x_{k-1} + (-1)^{k-1} \cdot x_k$ và $x_n = -x_n - x_{n-1} = \dots = (-1)^{n-k+1}(x_{k+1} + x_k)$

$$x_k = \pm \sqrt{\frac{2k(n-k+1)}{n+1}}.$$