Trong các đề thi chọn học sinh giỏi vòng quốc gia hàng năm, bài toán hình học phẳng được xem là bài toán cơ bản, bắt buộc. Để giải chúng, đòi hỏi người học nắm vững các kiến thức căn bản về hình học và năng lực tổng hợp các kiến thức đó. Nhằm phục vụ kỳ thi sắp đến, tôi xin giới thiệu với các em một số bài toán trong các kỳ thi vừa qua, giúp các em có cái nhìn tổng quan về mức độ và kiến thức đòi hỏi trong các bài thi.

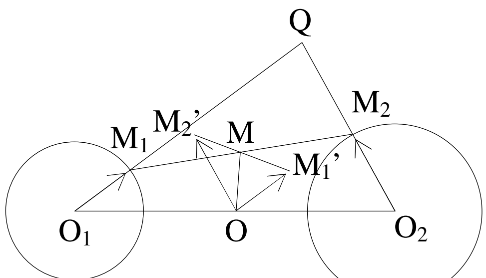
Bài 1. (Bảng B - năm 2000)

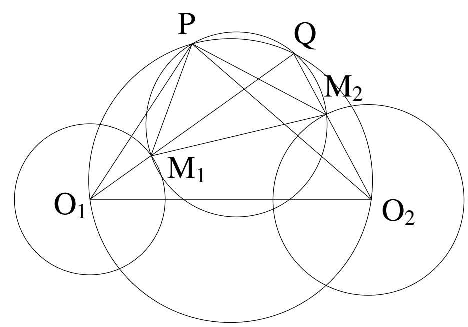
Trên mặt phẳng cho trước cho hai đường tròn $(O_1 ; r_1)$ và $(O_2 ; r_2)$. Trên đường tròn $(O_1 ; r_1)$ lấy một điểm M_1 và trên đường tròn $(O_2 ; r_2)$ lấy một điểm M_2 sao cho đường thẳng O_1M_1 cắt đường thẳng O_2M_2 tại điểm Q. Cho M_1 chuyển động trên đường tròn $(O_1 ; r_1)$, M_2 chuyển động trên đường tròn $(O_2 ; r_2)$ cùng theo chiều kim đồng hồ và cùng với vận tốc góc như nhau.

1) Tìm quỹ tích trung điểm đoạn thẳng M_1M_2.

2) Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác M_1QM_2 với đường tròn ngoại tiếp tam giác O_1QO_2 là 1 điểm cố định.

<u>Giải</u>





1) Gọi O là trung điểm của O_1O_2. Hiển nhiên O là điểm cố định.

Lấy các điểm M'_1, M'_2 sao cho: $\overrightarrow{OM'_1} = \overrightarrow{O_1M_1}$, $\overrightarrow{OM'_1} = \overrightarrow{O_2M_2}$. Vì M_1, M_2 tương ứng chuyển động trên $(O_1 ; r_1)$, $(O_2 ; r_2)$ theo cùng chiều và với cùng vận tốc góc nên M'_1, M'_2 sẽ quay quanh O theo cùng chiều và với vận tốc góc (*).

Ta có : M là trung điểm $M_1M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1M'_1} + \overrightarrow{O_2M'_2})$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của M'_1, M'_2 (**).

Từ (*), (**) suy ra: quỹ tích của M là đường tròn tâm O và bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{2r_1^2 + 2r_2^2 - d^2}$, trong đó d $= M_1M_2 =$ const.

2) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác M_1QM_2 và đường tròn ngoại tiếp tam giác O_1QO_2. Dễ dàng chứng minh được: $\Delta\, PO_1M_1$ đồng dạng $\Delta\, PO_2M_2$. Suy ra $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Do đó, P thuộc đường tròn Apôlôniut dựng trên đoạn O_1O_2 cố định, theo tỷ số không đổi $\frac{r_1}{r_2}$ (1).

Dễ thấy $(\overrightarrow{PO_1}, \overrightarrow{PO_2}) = \alpha = \text{const}$. Suy ra, P thuộc cung chứa góc định hướng không đổi α dựng trên đoạn O_1O_2 cố định (2). Từ (1), (2) suy ra P là điểm cố định (đpcm).

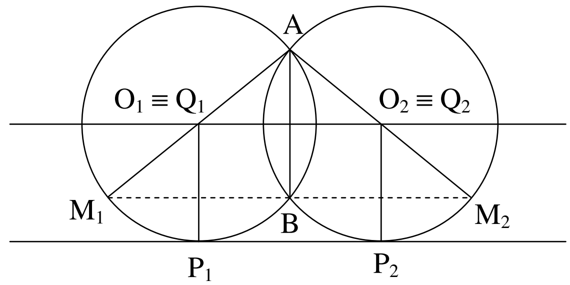
Bài 2. (Bảng B - năm 2001)

Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và P_1 , P_2 là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó ($P_1 \in (O_1)$, $P_2 \in (O_2)$). Gọi Q_1 và Q_2 tương ứng là hình chiếu vuông góc của P_1 và P_2 trên đường thẳng O_1O_2 . Đường thẳng AQ_1 cắt (O_1) tại điểm thứ hai M_1, đường thẳng AQ_2 cắt (O_2) tại điểm thứ hai M_2. Hãy chứng minh M_1 , B, M_2 thẳng hàng .

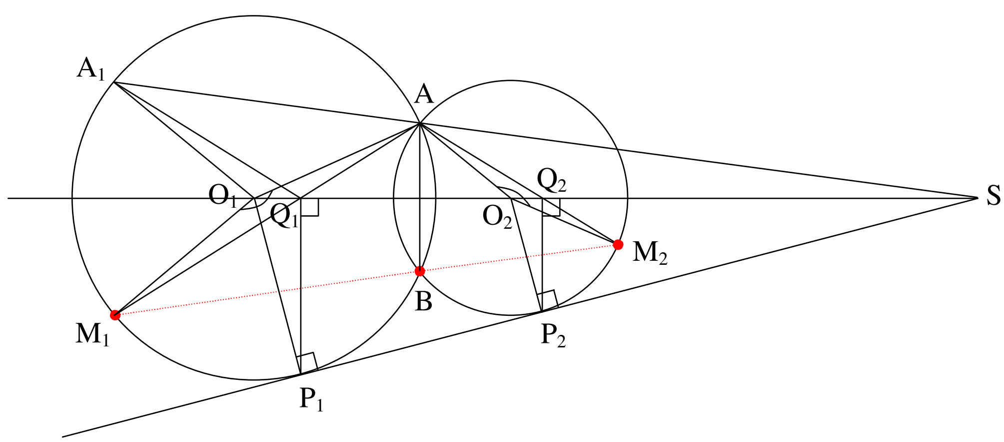
Giải

Gọi R_1 và R_2 tương ứng là bán kính của (O_1) và (O_2).

1) ***Trường hợp 1*** : $R_1 = R_2$. Khi đó $Q_1 \equiv O_1$ và $Q_2 \equiv O_2 \Rightarrow \widehat{M_1BA} = \widehat{M_2BA} = 90^0 \Rightarrow M_1$, B, M_2 thẳng hàng .



2) ***Trường hợp 2*** : $R_1 \neq R_2$. Giả sử $R_1 > R_2$.



Khi đó Q_1 nằm trên đoạn O_1O_2 và Q_2 nằm trên tia đối của tia O_2O_1.

Do đó : $\widehat{M_1BA} + \widehat{M_2BA} = 180^0 - \dfrac{\widehat{M_1O_1A}}{2} + \dfrac{\widehat{M_2O_2A}}{2}$ (*) trong đó $\widehat{M_1O_1A} < 180^0$

Gọi $S = P_1P_2 \cap Q_1Q_2$ thì S là tâm của phép vị tự V_S biến (O_1) thành (O_2).
Gọi A_1 là giao điểm thứ hai của SA và (O_1).

Ta có $V_S : A_1 \to A$; $O_1 \to O_2$; $Q_1 \to Q_2$ nên $\widehat{O_1A_1Q_1} = \widehat{O_2AQ_2}$

Mà $SP_1.SQ_1 = SA.SA_1$ ($= SP_1^2$) $\Rightarrow$ A, Q_1 , O_1 , A_1 cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{O_1A_1Q_1} = \widehat{O_1AQ_1}$.

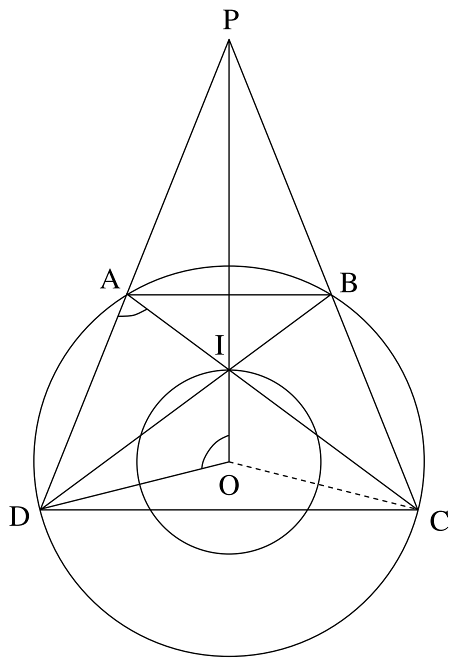
Suy ra $\widehat{O_1AQ_1} = \widehat{O_2AQ_2} \Rightarrow \widehat{M_1O_1A} = \widehat{M_2O_2A}$.

Từ (*) $\Rightarrow \widehat{M_1BA} + \widehat{M_2BA} = 180^0 \Rightarrow M_1$, B, M_2 thẳng hàng .

Bài 3. (Bảng B - năm 2002)

Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cố định (O, R_1) và (O, R_2) có $R_1 > R_2$. Một hình thang ABCD (AB // CD) thay đổi sao cho bốn đỉnh A, B, C, D nằm trên đường tròn (O, R_1) và giao điểm của hai đường chéo AC, BD nằm trên đường tròn (O, R_2). Tìm quỹ tích giao điểm P của hai đường thẳng AD và BC .

Giải



1) Phần thuận :

Gọi I = AC $\cap$ BD. Vì ABCD là hình thang nội tiếp nên nó là hình thang cân.
Suy ra OI là trục đối xứng của hình thang ABCD và O, I, P thẳng hàng.

Vì $\widehat{POD} = \frac{1}{2}(\widehat{DOI} + \widehat{IOC}) = 180^0 - \frac{1}{2}\widehat{DOC} = 180^0 - \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{POD} + \widehat{DAC} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác AIOD nội tiếp $\Rightarrow$ PA.PD = PI.PO = OP(OP – OI) = OP^2 – OP.OI.
Mặt khác : PA.PD = $\mathscr{P}_{P/(O)} = OP^2 - R_1^2$

Suy ra : OP.OI = $R_1^2 \Rightarrow OP = \frac{R_1^2}{OI} = \frac{R_1^2}{R_2}$ = hằng số

$\Rightarrow$ P chuyển động trên đường tròn tâm O, bán kính $\frac{R_1^2}{R_2}$.

2) Phần đảo :

Lấy điểm P bất kỳ trên đường tròn (O; $\frac{R_1^2}{R_2}$). Gọi I là giao điểm của OP và (O, R_2). Dễ dàng dựng được hình thang ABCD nội tiếp đường tròn (O, R_1), nhận I làm giao điểm của hai đường chéo và và nhận P là giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên.

3) Kết luận :

Tập hợp các điểm P là đường tròn tâm O, bán kính $\frac{R_1^2}{R_2}$.

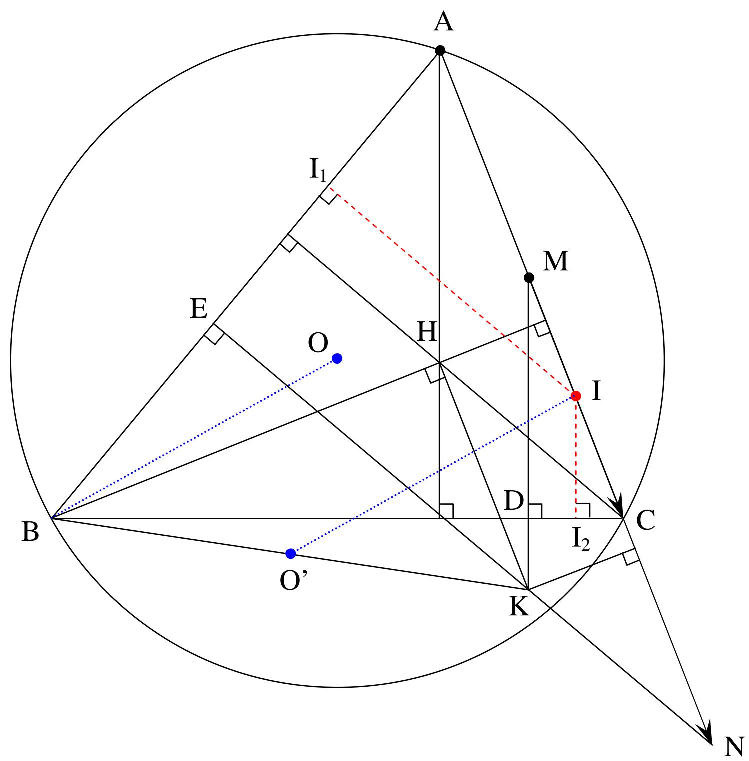
Bài 4. (Bảng B - Năm 2003)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Trên đường thẳng AC lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng BC; E là hình chiếu vuông góc của N trên đường thẳng AB.

1) Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên đường tròn tâm O' ngoại tiếp tam giác BED.

2) Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng AN đối xứng với B qua trung điểm của đoạn thẳng OO'.

Giải



1) Gọi K = MD ∩ NE.

Vì $\widehat{BEK} = \widehat{BDK} = 90^0$ nên đường tròn đường kính BK ngoại tiếp tam giác BED.

Ta có : AH // MK và CH // NK nên $\widehat{HAC} = \widehat{KMN}$ và $\widehat{ACH} = \widehat{MNK}$.

Mặt khác AC = MN, suy ra : ΔAHC = ΔMKN. Do đó : d(H, AC) = d(K, AC).

Mà H và K nằm cùng phía đối với AC nên KH // AC ⇒ BH ⊥ KH

⇒ H nằm trên đường tròn tâm O', đường kính BK ngoại tiếp tam giác BED.

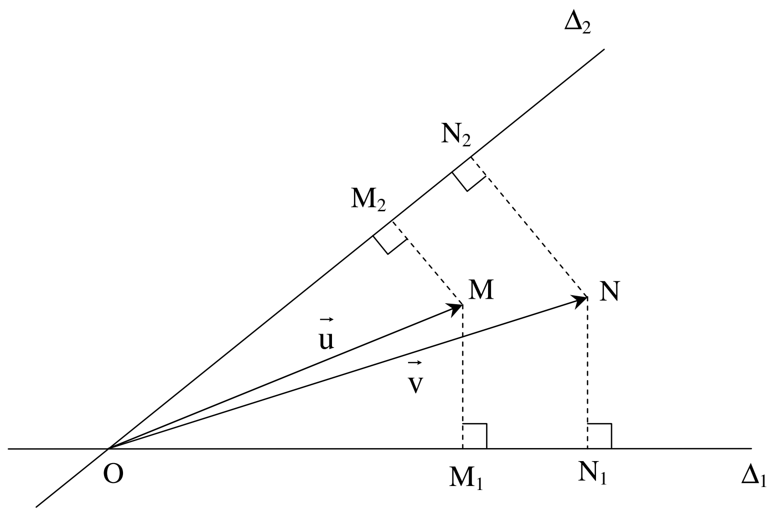
2) Gọi I_1 và I_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên AB và BC thì I_1 là trung điểm AE, I_2 là trung điểm DC. Do đó :

* Hình chiếu vuông góc của $\overrightarrow{O'I}$ trên BA và BC lần lượt bằng $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ và $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

* Hình chiếu vuông góc của $\overrightarrow{BO}$ trên BA và BC lần lượt bằng $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ và $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Vậy : $\overrightarrow{O'I} = \overrightarrow{BO}$ ⇒ BO'IO là hình bình hành ⇒ B và I đối xứng nhau qua trung điểm của OO'.

Ghi chú : Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau. Xét hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
Hình chiếu vuông góc của $\vec{u}$ trên Δ_1 và Δ_2 lần lượt bằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$
Hình chiếu vuông góc của $\vec{v}$ trên Δ_1 và Δ_2 cũng lần lượt bằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$
Giả sử Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại O. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.
Gọi M_1 , M_2 lần lượt là hình chiếu của M trên Δ_1 và Δ_2 thì $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{OM_2}$
Gọi N_1 , N_2 lần lượt là hình chiếu của N trên Δ_1 và Δ_2 thì $\vec{a} = \overrightarrow{ON_1}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{ON_2}$

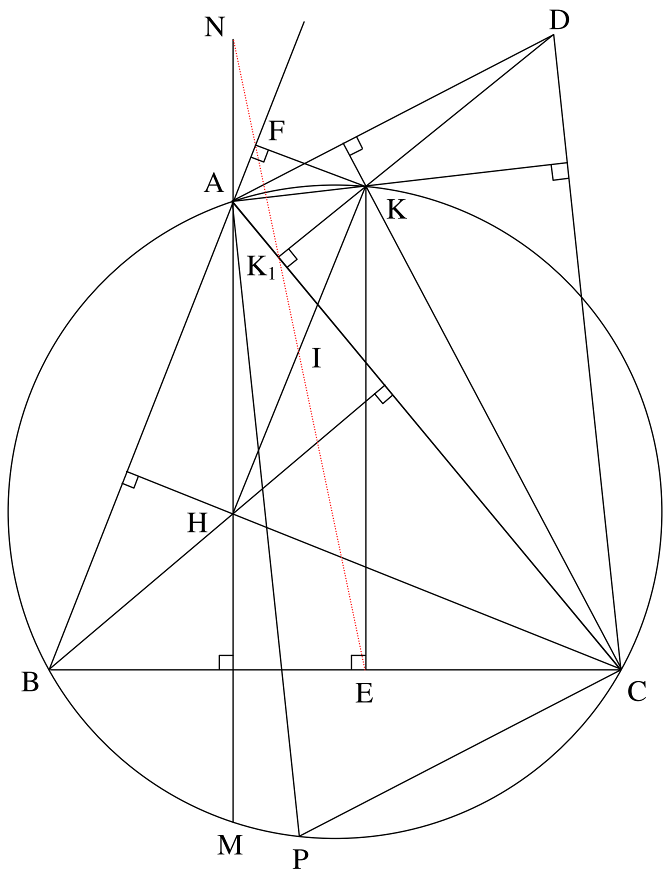


Vì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có cùng điểm gốc O, có cùng hình chiếu trên Δ_1 là $\vec{a}$ nên N nằm trên đường thẳng MM_1. Tương tự $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có cùng hình chiếu trên Δ_2 là $\vec{b}$ nên N nằm trên đường thẳng MM_2. Suy ra $N \equiv M$ hay $\vec{u} = \vec{v}$.

Bài 5. (Bảng B - năm 2004)

Trong mặt phẳng, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Trên cung BC không chứa điểm A của đường tròn (O), lấy điểm P sao cho P không trùng với B và C. Lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PC}$ và gọi K là trực tâm của tam giác ACD. Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của K trên các đường thẳng BC và AB. Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua trung điểm của HK.

<u>Giải</u>



Từ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PC} \Rightarrow$ APCD là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{APC} + \widehat{AKC} = 180^0 \Rightarrow K \in$ (ABC)

Gọi N = AH $\cap$ EF, M = AH $\cap$ (ABC) với M $\neq$ A.

Vì MN và KE cùng vuông góc với BC nên MN // KE.

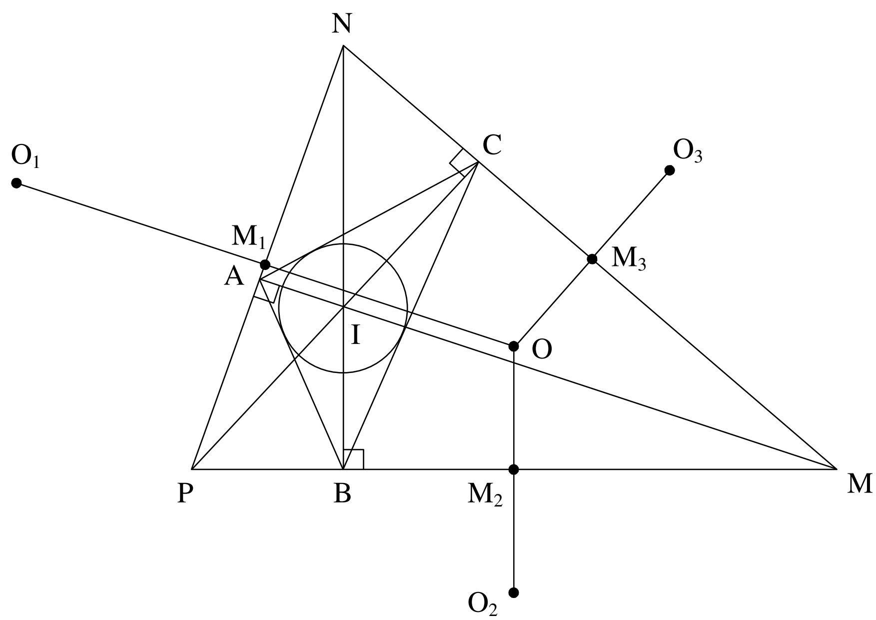
Vì $\widehat{KEB} = \widehat{KFB} = 90^0$ nên tứ giác KFBE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NEK} = \widehat{ABK} = \widehat{NMK} \Rightarrow$ MEKN là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ tứ giác MEKN là hình thang cân $\Rightarrow$ HE // NK $\Rightarrow$ HEKN là hình bình hành $\Rightarrow$ EF đi qua trung điểm I của HK.

Ghi chú : EF là đường thẳng Simson

Bài 6. (Bảng B - năm 2005)

Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi M, N và P lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp gócA, đường tròn bàng tiếp gócB và đường tròn bàng tiếp gócC của tam giác đó. Gọi O_1 , O_2 , O_3 tương ứng là tâm của các đường tròn (INP), (IPM) và (IMN). Chứng minh rằng :
1) Các đường tròn (INP), (IPM) và (IMN) có bán kính bằng nhau.
2) Các đường thẳng MO_1 , NO_2 , PO_3 cắt nhau tại một điểm.

<u>Giải</u>



1) Vì phân giác trong và phân giác ngoài xuất phát từ cùng một đỉnh của tam giác vuông góc nhau nên suy ra I là trực tâm tam giác MNP.
Do đó các đường tròn (INP), (IPM) và (IMN) đối xứng với đường tròn (MNP) tương ứng qua các đường thẳng NP, PM, MN. Vì vậy bán kính của các đường tròn đó bằng nhau.
<u>Ghi chú</u> : Có thể áp dụng định lý hàm sin để chứng minh bán kính các đường tròn (INP), (IPM), (IMN) và (MNP) bằng nhau.

2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (MNP) thì O_1 , O_2 , O_3 đối xứng với O tương ứng qua các đường thẳng PN, PM, MN.
Từ đó suy ra trung điểm M_1 của OO_1 cũng là trung điểm của NP. Lập luận tương tự cho M_2 và M_3.
Do đó: $\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{O_1O_3} = 2\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{PM}$. Suy ra : O_1NMO_2 và O_1PMO_3 là các hình bình hành.
Dùng tính chất hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm mỗi đường để suy ra MO_1 , NO_2 , PO_3 cắt nhau tại một điểm.

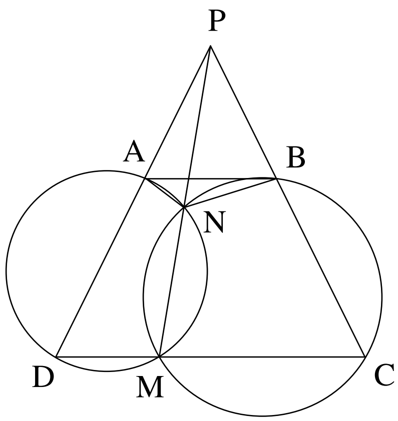
Bài 7. (Bảng B - năm 2006)

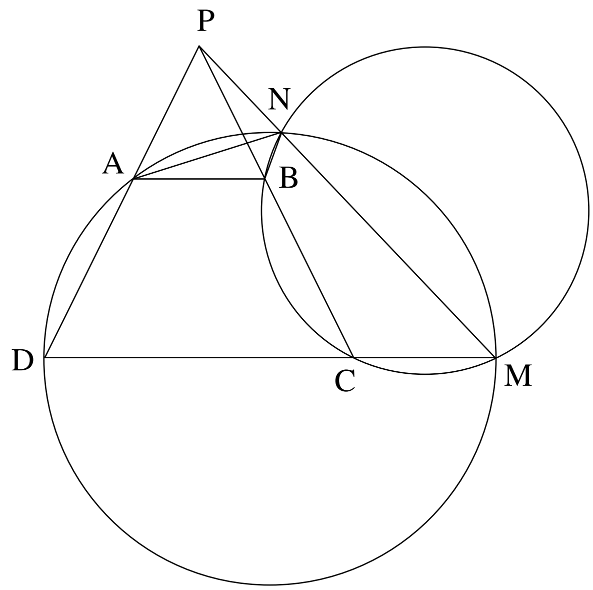
Cho hình thang cân ABCD có CD là đáy lớn. Xét một điểm M di động trên đường thẳng CD sao cho M không trùng với C và với D. Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của đường tròn (BCM) và (DAM). Chứng minh rằng :

1) Điểm N di động trên một đường tròn cố định ;

2) Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

<u>Giải</u>





1) Nếu M nằm trên cạnh CD thì M và N ở cùng phía đối với đường thẳng AB.

Từ các tứ giác nội tiếp ANMD và BNMC, ta có : $\widehat{ANB} = 2\pi - (\widehat{ANM} + \widehat{BNM}) = \widehat{C} + \widehat{D}$

Nếu M nằm ngoài cạnh CD thì M và N ở khác phía đối với đường thẳng AB.

Từ các tứ giác nội tiếp ANMD và BNMC, ta có : $\widehat{ANB} = \pi - (\widehat{C} + \widehat{D})$

Vậy N thuộc đường tròn cố định đi qua A và B.

2) Gọi P = AD $\cap$ BC thì P cố định và PA.PD = PB.PC, suy ra P thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn (BCM) và (DAM) $\Rightarrow$ P $\in$ MN.

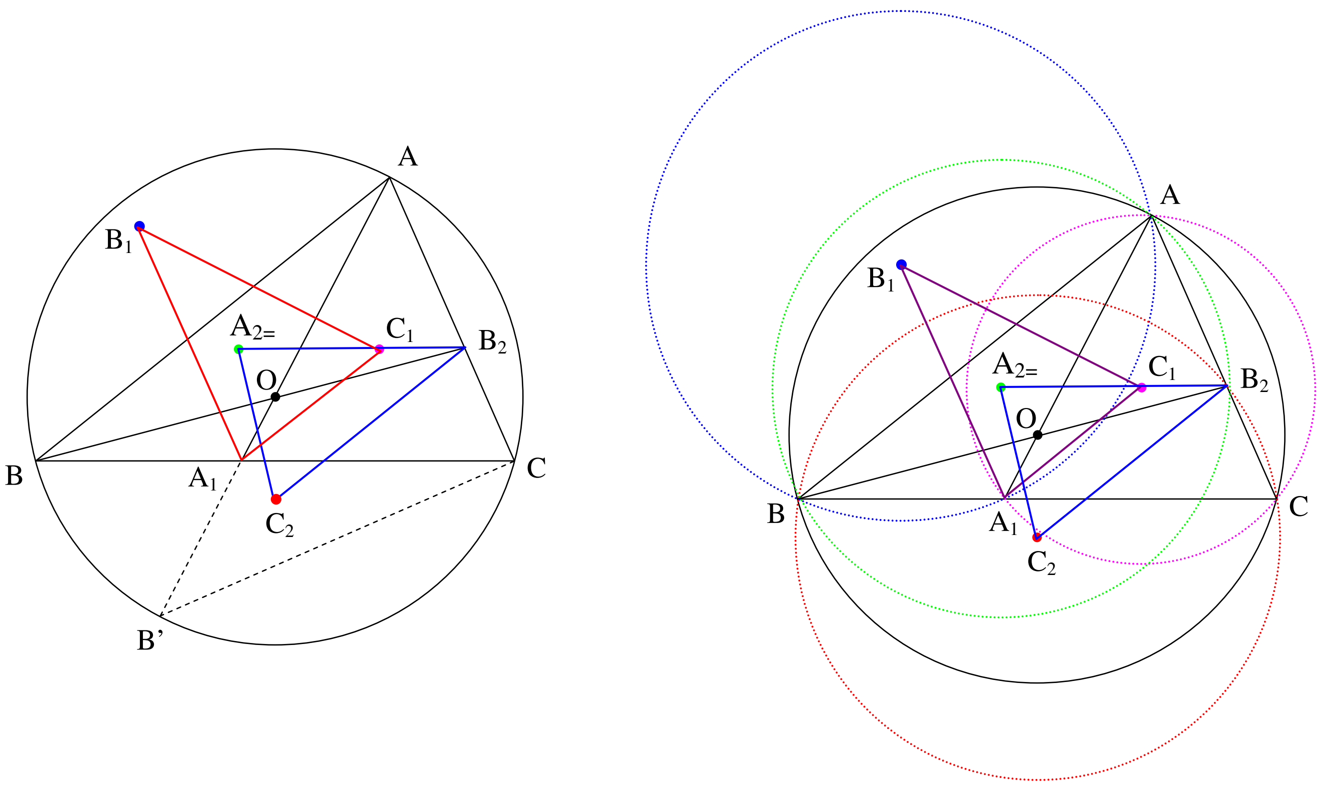
Bài 8. (Bảng B - năm 2006)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O và có BC > AB > AC. Đường thẳng OA cắt đường thẳng BC tại điểm A_1 ; đường thẳng OB cắt đường thẳng CA tại điểm B_2. Gọi B_1 , C_1 , C_2 và A_2 tương ứng là tâm các đường tròn (AA_1B), (AA_1C), (BB_2C) và (BB_2A). Chứng minh rằng :

1) Tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác $A_2B_2C_2$;

2) Tam giác $A_1B_1C_1$ bằng với tam giác $A_2B_2C_2$ khi và chỉ khi góc C của tam giác ABC bằng 60^0.

Giải



1) Ta có : $\widehat{AA_1B} = \widehat{A_1AC} + \hat{C} = 90^0 - \widehat{AB'C} + \hat{C} = 90^0 - \hat{B} + \hat{C}$

Theo định lý hàm sin trong tam giác AA_1B thì : $\dfrac{AB}{A_1B_1} = 2\sin\widehat{AA_1B} = 2\cos(C-B)$

Tương tự : $\dfrac{AC}{A_1C_1} = 2\sin\widehat{AA_1C} = 2\sin(\pi - \widehat{AA_1B}) = 2\sin\widehat{AA_1B} = 2\cos(C-B)$

Suy ra : $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Mặt khác : $\widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{B_1A_1A} + \widehat{C_1A_1A} = (90^0 - \hat{B}) + (90^0 - \hat{C}) = \hat{A}$

Suy ra : $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ theo tỉ số $2\cos(C – B)$

Tương tự : $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$ theo tỉ số $2\cos(A – C)$

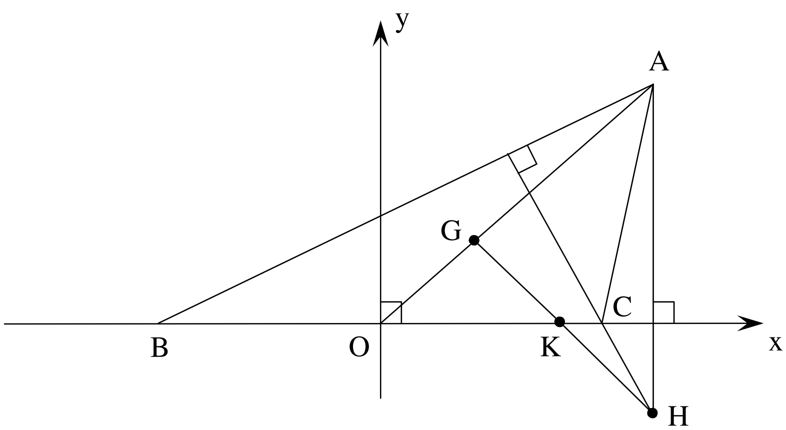
Do đó : $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.

2) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2 \Leftrightarrow \cos(C – B) = \cos(A – C) \Leftrightarrow \hat{C} = 60^0$.

Bài 9. (Năm 2007)

Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Gọi H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm A, biết rằng trung điểm K của HG thuộc đường thẳng BC.

Giải



Chọn hệ trục Oxy với O là trung điểm BC và trục Ox là đường thẳng BC (hình vẽ)

Đặt BC = 2a > 0 thì B(-a ; 0), C(a ; 0). Giả sử A(x_0 ; y_0) với $y_0 \neq 0$.

Từ đó tìm được $H\left(x_0;\dfrac{a^2-x_0^2}{y_0}\right)$; $G\left(\dfrac{x_0}{3};\dfrac{y_0}{3}\right)$. Suy ra : $K\left(\dfrac{2x_0}{3};\dfrac{3a^2-3x_0^2+y_0^2}{6y_0}\right)$

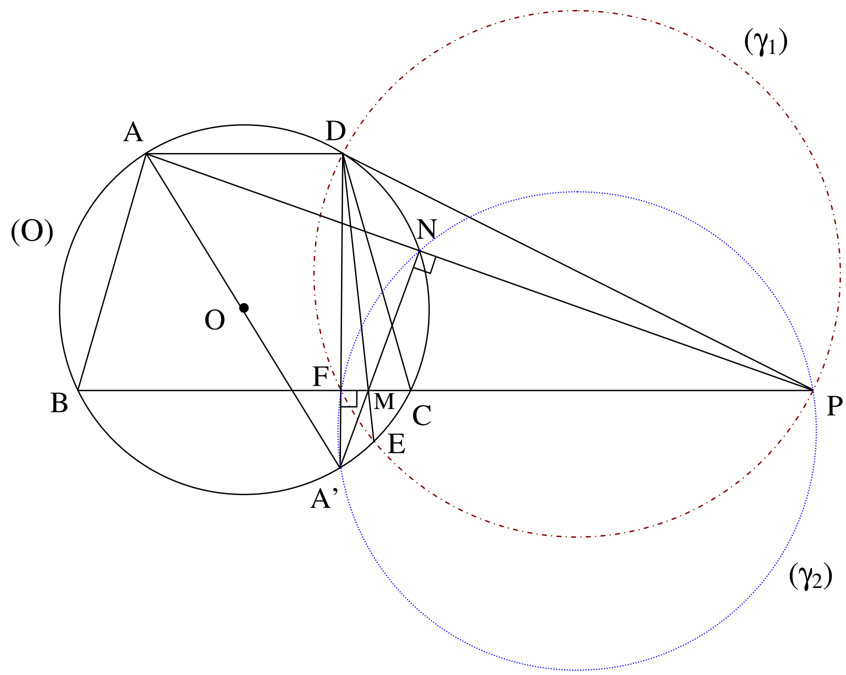
K thuộc đường thẳng BC $\Leftrightarrow 3a^2-3x_0^2+y_0^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{3a^2}=1$ với $y_0 \neq 0$.

Vậy quỹ tích các điểm A là hypebol $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1$ trừ đi hai điểm B, C.

Bài 10. (Năm 2007)

Cho hình thang ABCD có đáy lớn BC và nội tiếp đường tròn (O) tâm O. Gọi P là một điểm thay đổi trên đường thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC sao cho PA không là tiếp tuyến của đường tròn (O). Đường tròn đường kính PD cắt (O) tại E ($E \neq D$). Gọi M là giao điểm của BC với DE, N là giao điểm khác A của PA với (O). Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

Giải



Gọi A' là điểm đối xứng của A qua tâm O. Ta chứng minh N, M, A' thẳng hàng, từ đó suy ra MN đi qua A' cố định.

Thật vậy, ta có DE là trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (γ_1) đường kính PD.

Vì $\widehat{PNA'} = 90°$ nên NA' là trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (γ_2) đường kính PA'.

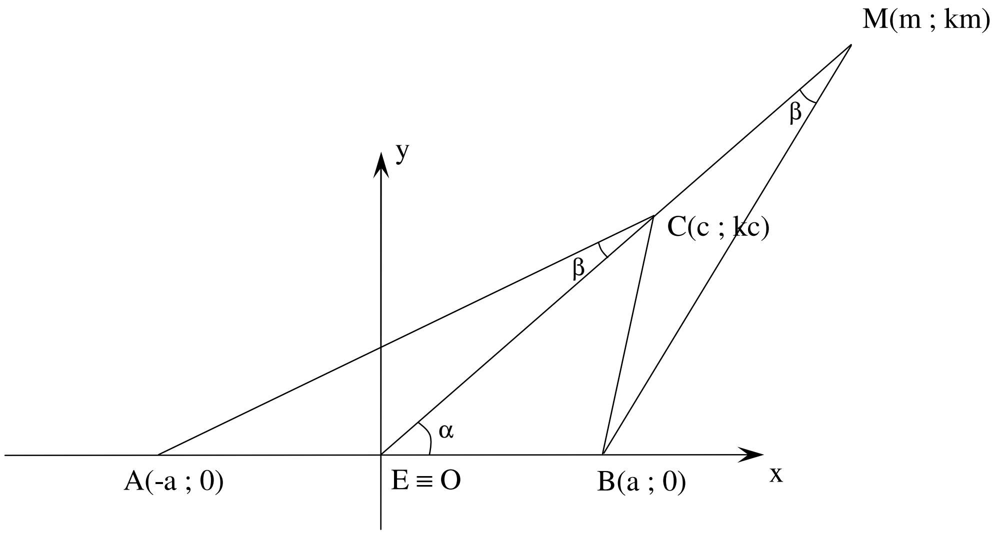
Giả sử DA' cắt BC tại F, do $\widehat{ADA'} = 90° \Rightarrow \widehat{PFA'} = 90°$ nên BC là trục đẳng phương của (γ_1) và (γ_2).

Vì các trục đẳng phương đồng quy tại tâm đẳng phương, suy ra DE, BC và NA' đồng quy tại điểm M. Vậy M, N, A' thẳng hàng.

Bài 11. (Năm 2008)

Cho tam giác ABC. Gọi E là trung điểm của cạnh AB.Trên tia EC lấy điểm M sao cho $\widehat{BME} = \widehat{ECA}$. Kí hiệu α là số đo của góc $\widehat{BEC}$, hãy tính tỉ số $\dfrac{MC}{AB}$ theo α.

Giải



Cách 1

Nếu $\alpha = 90^0$ thì $M \equiv C \Rightarrow \dfrac{MC}{AB} = 0 = \cos\alpha$

Nếu $\alpha \neq 90^0$. Chọn hệ toạ độ Oxy với A(-a ; 0), B(a, 0) với a >0.

Đặt $k = \tan\alpha \neq 0$, thì phương trình đường thẳng CE là $y = kx$.

Giả sử C(c ; kc), M(m ; km) với c > 0 và m > 0.

Khi đó $MC^2 = (c - m)^2 + (kc - km)^2 = (1 + k^2)(c - m)^2$

Ta có : $\overrightarrow{MB} = (a - m; -km)$

$\overrightarrow{MO} = (-m; -km)$

$\overrightarrow{CA} = (-a - c; -kc)$

$\overrightarrow{CO} = (-c; -kc)$

Từ $\widehat{BME} = \widehat{ECA} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MO}}{MB.MO} = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO}}{CA.CO}$

$$\Rightarrow \frac{m(m-a) + k^2m^2}{\sqrt{(a-m)^2 + k^2m^2}\sqrt{m^2 + k^2m^2}} = \frac{c(c+a) + k^2c^2}{\sqrt{c^2 + k^2c^2}\sqrt{(a+c)^2 + k^2c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{m - a + k^2m}{\sqrt{(a-m)^2 + k^2m^2}} = \frac{c + a + k^2c}{\sqrt{(a+c)^2 + k^2c^2}} \quad (*).$$

Đặt $h = 1 + k^2$ với $h > 1$ thì : $(*) \Rightarrow \dfrac{hm - a}{\sqrt{a^2 - 2am + hm^2}} = \dfrac{hc + a}{\sqrt{a^2 + 2ac + hc^2}}$

$$\Rightarrow (hm - a)^2(a^2 + 2ac + hc^2) = (hc + a)^2(a^2 - 2am + hm^2)$$

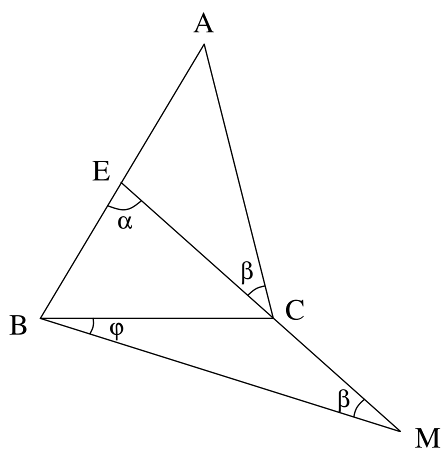
Khai triển và thu gọn, ta được : $m - c = \dfrac{2a}{h} = \dfrac{2a}{1 + k^2}$.

(Còn nếu chọn A(a ; 0), B(-a, 0) với a >0 thì $c - m = \dfrac{2a}{h} = \dfrac{2a}{1+k^2}$)

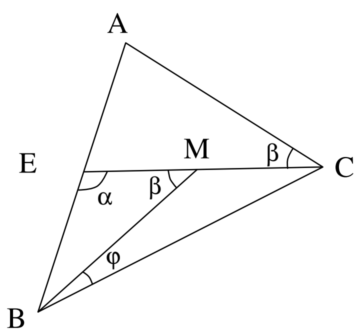
Do đó : $MC^2 = (1+k^2)\dfrac{4a^2}{(1+k^2)^2} = \dfrac{4a^2}{1+k^2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{MC}{2a}\right)^2 = \dfrac{1}{1+k^2} = \cos^2\alpha \Rightarrow \dfrac{MC}{AB} = |\cos\alpha|$

Cách 2



Hình 1



Hình 2

Nếu $\alpha = 90^0$ thì $M \equiv C \Rightarrow \dfrac{MC}{AB} = 0 = \cos\alpha$

Nếu $\alpha < 90^0$ thì M nằm ngoài đoạn EC (*Hình 1*)

Thật vậy, từ $\alpha < 90^0$ ta suy ra AC > AB. Giả sử ngược lại, M thuộc đoạn EC. Do M ≠ E, nên M nằm giữa E và C $\Rightarrow \widehat{ECA} = \widehat{BME} = \widehat{ECB} + \widehat{CBM} \Rightarrow \widehat{ECA} > \widehat{ECB}$. Vì thế, nếu gọi D là giao của đường phân giác trong góc $\widehat{ACB}$ và cạnh AB thì D nằm giữa E và A.

Suy ra $1 < \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB} < 1$. Vô lý.

Nếu $\alpha > 90^0$ thì M nằm giữa E và C (*Hình 2*) (Chứng minh tương tự như trên)

Đặt $\widehat{BME} = \widehat{ECA} = \beta$ và $\widehat{MBC} = \varphi$

Áp dụng định lý hàm sin lần lượt cho các tam giác ACE và BME, ta được :

$\dfrac{AC}{\sin(\pi-\alpha)} = \dfrac{EA}{\sin\beta} = \dfrac{EB}{\sin\beta} = \dfrac{BM}{\sin\alpha} \Rightarrow AC = BM$

Áp dụng định lý hàm côsin vào các tam giác BCM và ABC ta có :

$MC^2 = BC^2 + BM^2 - 2\,BC.BM.\cos\varphi = BC^2 + AC^2 - 2BC.AC.\cos\varphi$

$= AB^2 + 2BC.AC.\cos\widehat{ACB} - 2BC.AC.\cos\varphi = AB^2 - 4BC.AC.\sin\dfrac{\widehat{ACB}+\varphi}{2}\sin\dfrac{\widehat{ACB}-\varphi}{2}$ (*)

- Nếu M nằm ngoài đoạn EC (*Hình 1*) thì : $\dfrac{\widehat{ACB}+\varphi}{2} = \dfrac{(\beta+\widehat{ECB}) + (\widehat{ECB}-\beta)}{2} = \widehat{ECB}$ và

$\dfrac{\widehat{ACB}-\varphi}{2} = \dfrac{\beta+\widehat{ECB}-\varphi}{2} = \dfrac{\beta+\beta}{2} = \beta$

- Nếu M nằm trong đoạn EC (*Hình 2*) thì : $\dfrac{\widehat{ACB}+\varphi}{2}=\dfrac{\beta+\widehat{ECB}+\varphi}{2}=\dfrac{\beta+\beta}{2}=\beta$ và

$\dfrac{\widehat{ACB}-\varphi}{2}=\dfrac{(\beta+\widehat{ECB})-(\beta-\widehat{ECB})}{2}=\widehat{ECB}$

Vậy từ (*) ta có : $MC^2 = AB^2 - 4BC.AC.\sin\beta\sin\widehat{ACB} = AB^2 - 4.(AC.\sin\beta)(BC.\sin\widehat{ACB})$

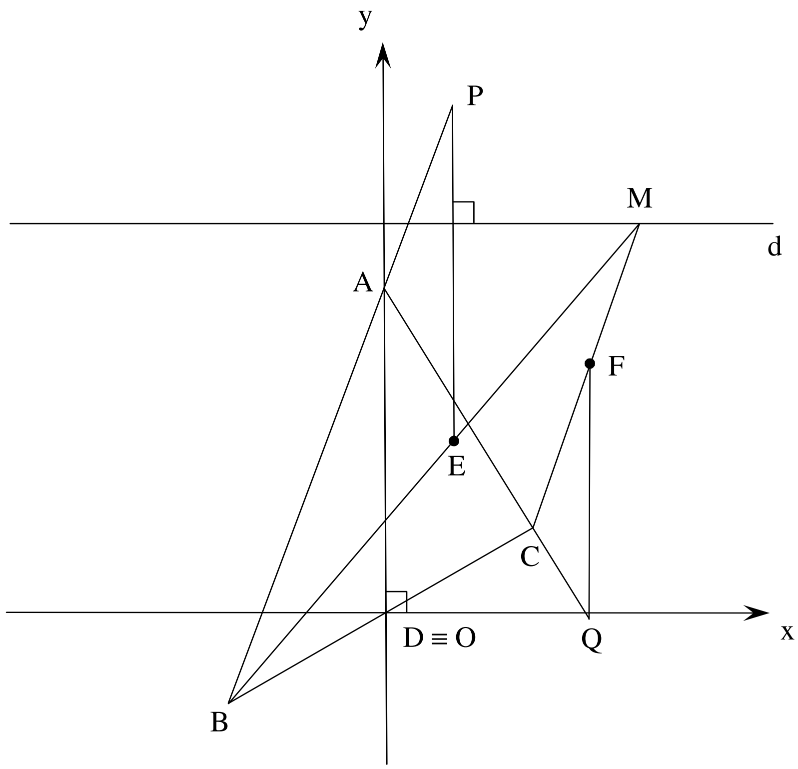
$= AB^2 - 4(EA\sin\alpha)(EB\sin\alpha) = AB^2 - (AB\sin\alpha)^2 = AB^2\cos^2\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{MC}{AB} = |\cos\alpha|$

Bài 12. (Năm 2008)

Cho tam giác ABC, trung tuyến AD. Cho đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AD. Xét điểm M nằm trên d. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MB, MC. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với d cắt đường thẳng AB ở P, đường thẳng đi qua F và vuông góc với d cắt đường thẳng AC ở Q. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua 1 điểm cố định khi điểm M di động trên đường thẳng d.

Giải



Chọn hệ trục Oxy có O≡ D, trục Oy ≡ DA. Khi đó Ox //d. (hình vẽ)

Vì $A \in Oy$ nên A(0 ; a) với $a \neq 0$ (do $A \neq D$)

Giả sử B(b ; c). Do $B \notin Oy$ nên $b \neq 0$. Vì B và C đối xứng nhau qua O nên C(-b ; -c).

Suy ra : AB : $(a - c)x + by - ab = 0$ và AC : $(a + c)x - by + ab = 0$

Do $M \in d$ nên $M(x_M ; h)$ với h là hằng số.

Gọi d_1 , d_2 là các đường thẳng vuông góc với d và lần lượt đi qua E, F thì : $d_1 : \dfrac{x_M + b}{2}$ và $d_2 : \dfrac{x_M - b}{2}$

$$P = d_1 \cap AB \Rightarrow P\left(\frac{x_M + b}{2}; a - \frac{(a-c)(x_M + b)}{2b}\right)$$

$$Q = d_2 \cap AC \Rightarrow Q\left(\frac{x_M - b}{2}; a + \frac{(a+c)(x_M - b)}{2b}\right)$$

Suy ra : $\overrightarrow{PQ} = \left(-b; \dfrac{a.x_M - bc}{b}\right)$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(x_M ; h)$ và vuông góc PQ là :

$$-b(x - x_M) + \frac{ax_M - bc}{b}(y - h) = 0 \text{ hay } b^2\left(x - \frac{bc}{a}\right) - (ax_M - bc)\left(y - h + \frac{b^2}{a}\right) = 0.$$

Vậy Δ đi qua điểm cố định $R\left(\dfrac{bc}{a}; h - \dfrac{b^2}{a}\right)$ khi M di động trên d.

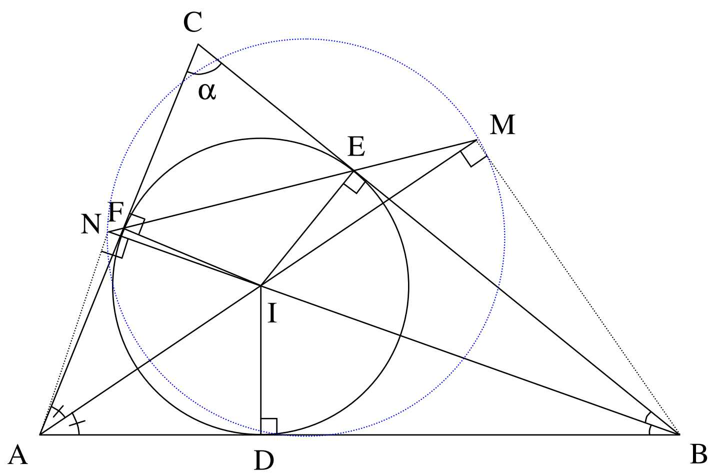
Bài 13. (Năm 2009)

Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định A, B (A ≠ B). Một điểm M di động trên mặt phẳng sao cho $\widehat{ACB} = \alpha$ không đổi ($0^0 < \alpha < 180^0$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt đường thẳng EF lần lượt tại M và N.

1) Chứng minh rằng đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

2) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



1) $\widehat{MIN} = \widehat{AIB} = 180^0 - \frac{A+B}{2} = 90^0 + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \widehat{MIB} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = \widehat{MEB} \Rightarrow$ tứ giác MEIB nội tiếp đường tròn đường kính IB $\Rightarrow \widehat{IMN} = \frac{\hat{B}}{2}$ và $\widehat{IMB} = 90^0 \Rightarrow \Delta\, IMN \sim \Delta\, IBA$

$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IB} = \sin\widehat{IBM} = \cos\widehat{MIB} = \cos(90^0 - \frac{\alpha}{2}) = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow MN = AB\sin\frac{\alpha}{2}$ = không đổi.

2) Gọi P = AN ∩ BM thì I là trực tâm tam giác PAB. Đường tròn (DMN) là đường tròn Euler của tam giác PAB, suy ra đường tròn (DMN) luôn đi qua trung điểm K của AB với K cố định.

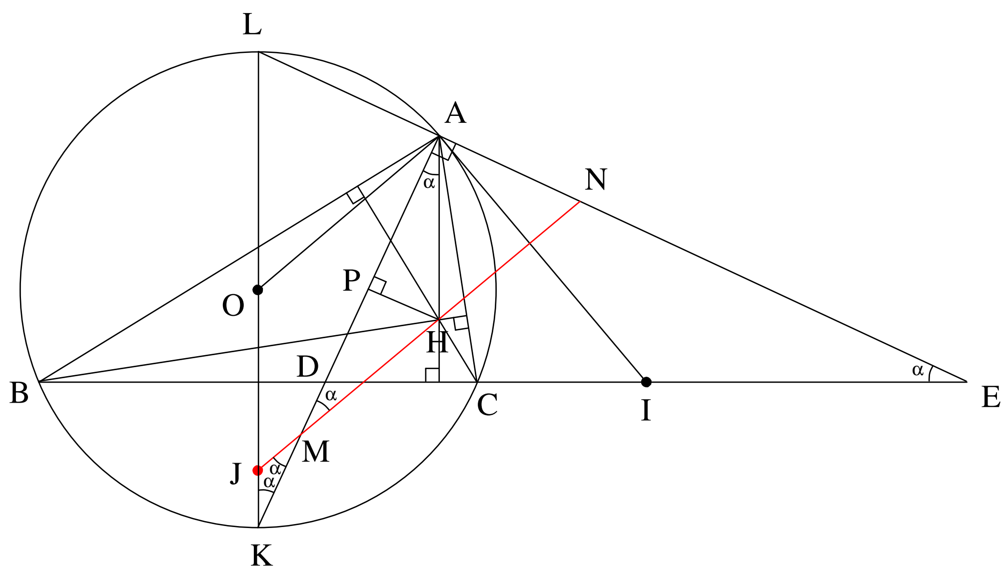
Bài 14. (Năm 2010)

Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C nằm trên đường tròn đó sao cho dây BC không là đường kính. Xét một điểm A di động trên (O) sao cho AB ≠ AC và A không trùng với B, C. Gọi D và E lần lượt là giao điểm của đường thẳng BC với đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Gọi I là trung điểm của DE. Đường thẳng qua trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với AI cắt các đường thẳng AD và AE tương ứng tại M và N.

1) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

2) Xác định vị trí của điểm A sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.

<u>Giải</u>



1) Gọi K là giao điểm thứ hai của AD và (O) thì K là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BC}$.

Dựng đường kính KL của (O) thì L, A , E thẳng hàng. Gọi J = MN ∩ KL.

Phép quay $Q_{(A,+90^0)}$ biến : tia AL → tia AK ; tia AK → tia AE ; tia AO → tia AI.

Suy ra AO ⊥ AI ⇒ AO // JH. Mà OJ // AH nên AOJH là hình bình hành ⇒ OJ = AH.

Mặt khác, nếu kẻ đường kính BB' của (O) thì B' cố định và AHCB' là hình bình hành

Vậy : $OJ = AH = B'C = \sqrt{4R^2 - a^2}$ = hằng số (với a = BC) ⇒ điểm J cố định.

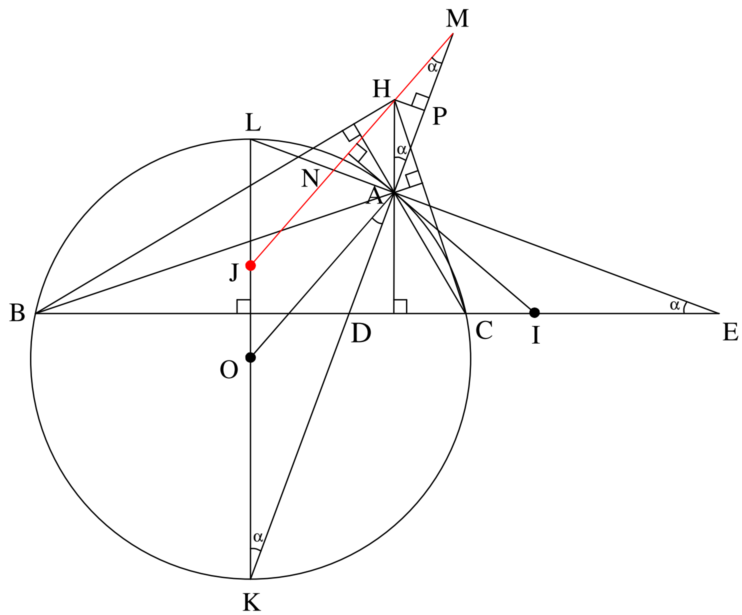
2) Đặt $\widehat{AKL} = \alpha$. Do ΔOKA cân tại O và các tam giác OKA, JKM, HAM đồng dạng nhau nên ΔHAM cân tại H ⇒ $\widehat{HAM} = \widehat{AMH} = \alpha$. Gọi P là trung điểm AM.

Ta có : $AM = 2AP = 2AH.\cos\alpha = 2\sqrt{4R^2 - a^2}.\cos\alpha$

và $AN = 2HP = 2AH.\sin\alpha = 2\sqrt{4R^2 - a^2}.\sin\alpha$.

Do đó : $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AM.AN = (4R^2 - a^2).\sin 2\alpha \le 4R^2 - a^2$

$\text{Max}S_{\Delta AMN} = 4R^2 - a^2 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0$. Từ đó suy ra vị trí của A là trung điểm các cung KL.


M
H
P
L
N
A
J
B
D
C
I
E
O
K
α