

ĐẠI HỌC VINH - KHOA TOÁN



BÀI TẬP LỚN

Đề tài:

**Ứng dụng nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn
trong giải toán hình học**



Giáo viên hướng dẫn : Ths. Nguyễn Chiến Thắng

Sinh viên thực hiện : Hoàng Thị Ngọc Trà

MSSV : 0851000037

Lớp : 49A Toán

Vinh – 2011

Mục lục

	Trang
Lời cảm ơn.....	4
LỜI MỞ ĐẦU	5
1. Lí do chọn đề tài	5
2. Mục đích nghiên cứu.....	5
3. Nhiệm vụ nghiên cứu.	5
4. Phương pháp nghiên cứu.....	6
5. Giải thuyết khoa học.	6
6. Tình hình nghiên cứu đề tài.	6
7. Đóng góp của bài tiểu luận.	6
8. Cấu trúc của bài tiểu luận.	6
CHƯƠNG 1 - NGUYÊN LÝ DIRICHLET	8
1.1. Nhà toán học Dirichlet	8
1.1.1 Vài nét về tiểu sử nhà toán học Dirichlet.	9
1.1.2. Các công trình toán học của Dirichlet.....	23
1.2. Nguyên lý Dirichlet.	26
1.2.1 Nội dung nguyên lý Dirichlet	26
1.2.2 Phương pháp ứng dụng.	30
1.3. Hệ thống bài tập.	30
1.3.2. Bài toán về tô màu hình vẽ	51
2.3.4. Bài toán diện tích.....	68
Chương 2 : Nguyên lý cực hạn.....	70
2.1. Nguyên lý cực hạn	70
2.2. Hệ thống bài tập ứng dụng.....	71

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lời cảm ơn

Nguyên lý Dirichlet và nguyên lý cực hạn là hai nguyên lý có nội dung khá đơn giản, song nó lại là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực lại có thể áp dụng rộng rãi trong việc chứng minh các bài toán tổ hợp, số học, đại số... Nó là công cụ tạo nên nhiều kết quả đẹp trong hình học và là một trong những phương pháp tiếp cận bài toán rất độc đáo. Đặc biệt là đối với các bài toán dành cho học sinh giỏi, thi chọn đội tuyển quốc gia hay các kì thi IMO cũng như các kì thi toán học trên thế giới. Việc sử dụng hai nguyên lý đó không chỉ tạo nên những kết quả đẹp khi giải quyết những bài toán chứng minh trong đại số, lý thuyết số mà cả ở hình học. Vì vậy đề tài «Ứng dụng nguyên lý Dirichlet và nguyên lý cực hạn trong giải toán hình học» là một đề tài rất thiết thực khai thác vào một phương pháp giải toán hình học mà chưa được nhắc tới nhiều.

Trong khuôn khổ giới hạn của đề tài, tôi không đưa ra các khái niệm, định lý, tính chất mới mà chỉ trình bày các nội dung chính thuộc đề tài, các dạng bài tập, thí dụ minh họa và bài tập ứng dụng.

Mặc dù đã tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu cùng với sự nỗ lực của bản thân nhưng do trình độ hiểu biết có hạn nên chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong được sự góp ý của thầy giáo Ths. Nguyễn Chiến Thắng và bạn đọc.

Một lần nữa tôi xin chân thành cảm ơn thầy giáo Ths. Nguyễn Chiến Thắng, cũng như Thư viện Đại học Vinh và toàn thể các bạn sinh viên lớp 49A Toán đã giúp đỡ tôi hoàn thành đề tài này !

Người thực hiện

Sinh viên :

Hoàng Thị Ngọc Trà

LỜI MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Sau gần nửa thế kỉ hình thành và phát triển, có thể nói, giáo dục mũi nhọn (giáo dục năng khiếu) đã thu được nhiều thành tựu rực rỡ với nhiều thành tích và huy chương chói lọi. Các đội tuyển quốc gia tham gia các kì thi Olympic quốc tế (IMO) có bề dày thành tích mang tính ổn định và có tính kế thừa.

Từ nhiều năm nay, các hệ năng khiếu toán học và các trường THPT chuyên thường sử dụng song song sách giáo phổ thông và kết hợp thêm các tài liệu chuyên khoa. Ngoài thị trường hiện tại có rất nhiều tài liệu tham khảo. Song, vấn đề về các tài liệu mang tính chất chuyên đề vẫn còn rất ít, hoặc nói rất mờ nhạt. Đặc biệt là các chuyên đề về hình học. Vì vậy trong bài tiểu luận môn hình học sơ cấp và lịch sử toán này tôi đã chọn đề tài là “*Ứng dụng của nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn trong việc giải toán hình học*”. Hi vọng nó có thể trở thành một tài liệu tham khảo cho quá trình dạy học bộ môn hình học ở trường THPT và dành cho học sinh chuyên toán.

Nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn là hai nguyên lí có nội dung khá đơn giản, song nó lại là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều ứng dụng trong lĩnh vực lại có thể áp dụng rộng rãi trong việc chứng minh các bài toán tổ hợp, số học, đại số... Đặc biệt nó là công cụ tạo nên nhiều kết quả đẹp trong hình học.

Nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của bài tiểu luận là nghiên cứu các cơ sở lý luận và dựa vào thực tiễn qua các kì thi cũng như quá trình dạy học bộ môn hình học ở trường THPT để tổng hợp và đưa ra được các ứng dụng quan trọng của nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn vào việc giải toán hình học.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu.

Để đạt được mục đích nghiên cứu trên bài tiểu luận có nhiệm vụ làm rõ những vấn đề sau:

3.1. Nêu rõ được nội dung của hai nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn.

3.2.Nêu được cách ứng dụng hai nguyên lí trên vào việc giải toán hình học như thế nào.

3.3.Hệ thống lại được các dạng bài tập có ứng dụng hai nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn.

4.Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu các cơ sở lí luận, cơ sở khoa học nhằm cho một cái nhìn tổng quát nhất về nội dung nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn và nhận diện bài toán có thể giải quyết được bằng nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn.

- Phân tích và tổng hợp các dạng bài tập nhằm xây dựng được một hệ thống bài tập đi từ dễ tới khó, từ cụ thể tới tổng quát có ứng dụng nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn.

5.Giải thuyết khoa học.

Nếu xác định được các ứng dụng và hệ thống lại được các dạng bài tập thì sẽ góp phần nâng cao chất lượng dạy học Toán đặc biệt là bộ môn hình học ở trường THPT và bồi dưỡng học sinh giỏi.

6.Tình hình nghiên cứu đề tài.

Trong quá trình tìm hiểu, đề tài “*Ứng dụng của nguyên lí dirichlet và nguyên lí cực hạn và giải toán hình học*” là một đề tài hay, được khá nhiều tài liệu cũng như luận văn đề cập tới nhưng gần như đều dừng lại ở mức chung chung, hoặc chỉ dành cho nó một vài ý nhỏ trong cả nội dung lớn của phần Toán rời rạc.

7.Đóng góp của bài tiểu luận.

7.1. Về mặt lý luận:

Bài tiểu luận này nêu rõ được các ứng dụng của nguyên lí Dirichlet và nguyên lí Cực hạn vào giải toán hình học và hệ thống được các dạng bài tập.

7.2. Về mặt thực tiễn:

Bài tiểu luận sẽ trở thành một tài liệu tham khảo cho các giáo viên giảng dạy ở trường THPT cũng như quá trình dạy học sinh giỏi.

8.Cấu trúc của bài tiểu luận.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo. bài tiểu luận gồm có 2 chương:

Chương 1 : Nguyên lí Dirichlet

Chương 2: Nguyên lý Cực hạn.

CHƯƠNG 1 - NGUYÊN LÝ DIRICHLET

1.1.Nhà toán học Dirichlet

Giới thiệu chung:

Toán học ở Đức trong nửa đầu của thế kỷ thứ XIX đã đạt tới một mức độ lớn, nó được đánh dấu bởi các công trình nghiên cứu lớn của CF Gauss (1777-1855), CGJ Jacobi (1804-1851), và G. Lejeune-Dirich (1805-1859). Trong thực tế, hầu như tất cả các nhà toán học hàng đầu của Đức vào giai đoạn này đã có vai trò rất quan trọng trong công tác giảng dạy và truyền thụ lại kiến thức. Điều này đặc biệt đúng cho Jacobi và Dirichlet, những người thành công nhất trong công tác giáo dục và đã đạt được một cấp độ mới về giảng dạy theo định hướng nghiên cứu hiện tại của họ trong khi Gauss lại là một người "thực sự không thích" việc giảng dạy – hay nói đúng hơn là việc giảng dạy không được Gauss quan tâm nhiều lắm trong sự nghiệp nghiên cứu của mình. Vai trò hàng đầu của toán học Đức trong nửa sau của thế kỷ XIX và thậm chí đến năm 1933 định mệnh sẽ là không thể tưởng tượng nếu không có cơ sở đặt bởi Gauss, Jacobi, và Dirichlet. Nhưng trong khi Gauss và Jacobi đã được vinh danh thì có lẽ tên tuổi của nhà toán học Dirichlet lại chỉ có một vài bài báo, bài viết ngắn bằng tiếng Anh. Vì vậy trong bài tiểu luận của tôi hôm nay xin được trích nguyên một phần để nói về nhà toán học lỗi lạc này: G. Lejeune-Dirich

Phần này bao gồm các ý như sau:

1. Vài nét về tiểu sử nhà toán học Dirichlet.
2. Các công trình toán học.



Chân dung nhà toán học Dirichlet

1.1.1 Vài nét về tiểu sử nhà toán học Dirichlet.

G. Lejeune-Dirich tên đầy đủ là Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, sinh ra tại Duren – vùng đất nằm giữa Cologne và Aachen vào ngày 13 tháng 2 năm 1805. Ông là người con thứ bảy và cũng là con út của Johann Arnold Lejeune Dirichlet (1762-1837) cùng vợ là Anna Elisabeth. Cha của Dirichlet là một bưu điện viên, nhà lái buôn và cũng ủy viên hội đồng thành phố ở Duren với chức danh là chính ủy Poste. Năm 1807, sau khi toàn bộ khu vực bờ trái của dòng sông Rhine nhận sự cai trị của Pháp – kết quả của cuộc chiến tranh giữa cách mạng Pháp và Napoleon, các thành viên của gia đình Dirichlet đã trở thành công dân Pháp. Cuối cùng thất bại của Napoleon Bonaparte tại trận chiến Waterloo và sự tổ chức lại Châu Âu tại Hội nghị Vienna (1814-1815), một vùng

rộng lớn của khu vực bờ trái sông Rhine bao gồm Bonn, Cologne, Aachen và Duren đã thuộc Phổ, và gia đình Dirichlet đã trở thành công dân Phổ.

Cái tên "Lejeune Dirichlet" xuất hiện một cách khá bình thường cho một gia đình người Đức. Chúng tôi xin giải thích ngắn gọn nguồn gốc của nó : ông của Dirichlet là Antoine Lejeune Dirichlet – ông nội của Dirichlet (1711 - 1784) được sinh ra ở Verviers (gần EGE `Li, Bi) và định cư ở Duren, nơi ông đã kết hôn với một cô con gái của một gia đình Duren. Cha của G. Lejeune-Dirich là người đầu tiên mang tên "Lejeune Dirichlet" (có nghĩa là "Dirichlet trẻ") để phân biệt với tên của ông nội, người đầu tiên cùng tên. Tên gọi "Dirichlet" (hoặc "Derichelette") có nghĩa là "tới từ Richelette" - một thị trấn nhỏ ở Bỉ. Chúng tôi đề cập đến điều này với mục đích là tránh sai lầm rằng Dirichlet là hậu duệ của một gia đình Huguenot Pháp.

Cha mẹ của Dirichlet rất có năng khiếu nuôi dạy con. Điều này chắc chắn sẽ không là một vấn đề dễ dàng đối với họ, vì gia đình họ thực sự không mấy khá giả.

Đầu tiên Dirichlet tham dự một trường tiểu học tư thục. Ở đó, ông đã được hướng dẫn bằng tiếng Latin nó như là một bước chuẩn bị cho trường trung học nơi mà việc nghiên cứu các ngôn ngữ cổ xưa như là một phần thiết yếu của việc đào tạo. Tài năng toán học Dirichlet bộc lộ từ rất sớm. Khi chưa đầy 12 tuổi ông đã sử dụng tiền túi của mình để mua sách về toán học, và khi họ nói rằng ông không thể hiểu chúng, ông đã trả lời rằng , dù sao đi nữa rằng ông cũng sẽ đọc chúng cho đến khi thực sự hiểu chúng.

Lúc đầu, cha mẹ của Dirichlet muốn con trai của họ trở thành một thương gia. Và ông đã mạnh mẽ phản đối kế hoạch này và nói rằng ông muốn học, cha mẹ của ông đã đồng ý và gửi ông tới trường trung học ở Bonn năm 1817. Ở đây có những cậu bé 12 tuổi được quan tâm, chăm sóc và giám sát của Peter Joseph Elvenich (1796-1886), một học sinh xuất sắc về các ngôn ngữ cổ đại và triết học, người đã được làm quen với gia đình Dirichlet. Đối với Dirichlet, Elvenich đã không phải giám sát nhiều. Ông là một học sinh chăm chỉ và tốt với cách cư xử dễ chịu, ông đã nhanh chóng giành được sự yêu mến của tất cả những người cùng làm việc với ông. Đối với đặc điểm này, chúng ta có rất

nhiều người đương thời nổi tiếng làm chứng như A. von Humboldt (1769 - 1859), CF Gauss, Jacobi CGJ, Fanny Mendelssohn Bartholdy Hensel nee (1805 - 1847), Felix Mendelssohn Bartholdy (1809-1847), KA Varnhagen von Ense (1785 - 1858), B. Riemann (1826-1866), R. Dedekind (1831-1916). Dirichlet cho thấy một sự quan tâm đặc biệt trong toán học và lịch sử.

Sau hai năm Dirichlet chuyển tới trường trung học Jesuiter tại Cologne. Khi đó Elvenich đã trở thành một nhà ngữ văn tại trường trung học ở Koblenz và được thăng làm giáo sư tại trường Đại học Bonn và Breslau, và luôn nhận thông tin về công việc cũng như bằng tốt nghiệp bác sĩ của Dirichlet. Tại Cologne, Dirichlet đã được tham dự bài giảng về toán học của Georg Simon Ohm (1789-1854) – người nổi tiếng với những phát hiện về định luật Ohm (1826). Năm 1843 Ohm phát hiện ra rằng nam thanh chuẩn được mô tả bởi

dao động hình sin. Phát hiện này đã mở đường cho việc áp dụng giải tích Fourier vào việc phân tích âm thanh. Dirichlet đã đạt được những tiến bộ nhanh chóng trong toán học theo sự chỉ đạo của Ohm cùng với sự nghiên cứu siêng năng của ông về những luận án toán học, vì vậy mà ông đã sớm có được một kiến thức rộng lớn ngay cả ở độ tuổi này. Ông học tại trường trung học tại Cologne năm chỉ có một, bắt đầu vào mùa đông năm 1820, và sau đó bỏ đi với một chứng chỉ bỏ học. Trên chứng chỉ đó đã khẳng định rằng Dirichlet đã vượt qua kì thi Abitur, nhưng kiểm tra một trong các tài liệu cho thấy rằng không phải như thế. Các quy định về việc kiểm tra Abitur yêu cầu các ứng viên phải có khả năng thực hiện một cuộc trò chuyện bằng tiếng Latinh - ngôn ngữ chung của thế giới học thức trong nhiều thế kỷ. Kể từ khi Dirichlet vào trường trung học chỉ mới ba năm, có lẽ ông đã có những vấn đề trong việc thỏa mãn điều kiện quan trọng này. Hơn nữa ông cũng không cần Abitur để học toán học – những gì mà ông mong ước. Tuy vậy, sự thiếu khả năng nói La tinh của ông đã làm ông gặp khó khăn nhiều trong suốt sự nghiệp của mình như chúng ta sẽ thấy sau này. Trong mọi trường hợp, Dirichlet đã bất thường rời khỏi trường trung học ở độ tuổi 16 với chứng chỉ đã rời trường học nhưng không có một kiểm tra Abitur.

Cha mẹ của ông bây giờ muốn anh học luật để đảm bảo một cuộc sống tốt để họ con trai. Dirichlet tuyên bố ông sẵn sàng cống hiến hết mình cho việc học hằng ngày trong thời gian ban ngày - nhưng sau đó ông sẽ nghiên cứu toán học vào ban đêm. Sau này cha mẹ của ông đã đồng ý để ông nghiên cứu toán học.

- Học tại Paris.

Khoảng 1820 các điều kiện để nghiên cứu toán học ở Đức là khá xấu cho học sinh thực sự sâu sắc quan tâm đến toán học. Nhà toán học nổi tiếng thế giới duy nhất là CF Gauss ở Gottingen, nhưng lại giữ một cái ghế cho thiên văn học. Gauss vị giám đốc đầu tiên Sternwarte, với gần như tất cả các khóa học của mình đã dành cho thiên văn học, đo đạc, và áp dụng toán học. Hơn nữa, Gauss không thích giảng dạy - ít nhất là không phải từ cấp độ thấp theo lệ thường ở thời đó. Ngược lại, các điều kiện ở Pháp lúc đó thực sự là tốt hơn. Các nhà khoa học nổi tiếng như P.-S. Laplace (1749-1827), A.-M. Legendre (1752-1833), J. Fourier (1768-1830), S.-D. Poisson (1781-1840), A.-L. Cauchy (1789-1857) đều hoạt động ở Paris, làm cho thủ đô của nước Pháp trở thành một thế giới của toán học. Gia đình của Dirichlet cũng có một vài mối quan hệ khá tốt với một số gia đình người Pháp tại Paris và họ đã để cho con trai của họ đi đến Paris vào tháng 5 năm 1822 để nghiên cứu toán học. Dirichlet học tại Sb EGE `de France và ở Faculte des Sciences, nơi ông tham dự các bài giảng của các giáo sư lưu ý như SF Lacroix (1765-1843), J.-B. Biot (1774-1862), JNP Hachette (1769-1834), và Francœur LB (1773-1849). Ông cũng xin phép tham dự các bài giảng là một sinh viên khách mời nổi tiếng Ecole Polytechnique. Nhưng đại biện phía Phở tại Paris đã từ chối yêu cầu đó nếu không có một sự cho phép đặc biệt từ bộ trưởng Phở của các công tác tôn giáo, giáo dục, và y học, hay của chính Freiherr Karl Zooming volt Stein Altenstein. 17 tuổi một sinh viên như Dirichlet tới từ Rhenisch, một tỉnh lẻ không có cơ hội để kiếm được một sự cho phép như vậy..

Chi tiết về các khóa học Dirichlet là dường như không được biết. Chúng tôi biết rằng Dirichlet, không chỉ những khóa học đó, bài luận văn kiệt tác về số học của Gauss cũng được Dirichlet chú ý. Theo yêu cầu của Dirichlet, mẹ của ông đã mua một bản sao của bài luận văn và gửi tới Paris cho ông trong tháng

mười một năm 1820 Không còn nghi ngờ gì nữa, những nghiên cứu về những kiệt tác lớn của Gauss đã để lại cho Dirichlet 1 ấn tượng lâu dài, cái mà có tầm quan trọng ko thua kém gì so với ấn tượng mà các khóa học. Chúng ta biết rằng việc nghiên cứu Dirichlet về bài luận văn số học diễn ra thường xuyên trong cuộc đời của ông, và chúng ta có thể giả định chắc chắn rằng ông là nhà toán học người Đức đầu tiên nắm rõ về nghiên cứu độc đáo này.

Ông không bao giờ đặt bản sao đó trên kệ của mình, vì nó luôn luôn nằm trên bàn của ông. Sartorius von Waltershausen ([Sa], trang 21) đã viết rằng Dirichlet đã luôn luôn mang theo bản sao đó bên mình trên tất cả các chuyến đi của mình điều đó giống như việc các giáo sĩ luôn luôn bên mình mang theo cuốn sách cầu nguyện của họ. Sau một năm sống yên tĩnh trong sự tách biệt, chỉ tận tâm tới những sự nghiên cứu của mình, cuộc sống của Dirichlet đã có một sự thay đổi cơ bản trong mùa hè năm 1823. Tướng MS Foy (1775 - 1825) đang tìm kiếm một người giám hộ riêng để dạy ngôn ngữ Đức và văn học cho các con của mình. Nói về tướng MS Foy, đó là một vị tướng lỗi lạc có trình độ học vấn cao, một vị anh hùng nổi tiếng đóng vai trò lãnh đạo trong suốt 20 năm trong cuộc chiến tranh của cách mạng Pháp và Napoleon Bonaparte. Ông đã dành được rất nhiều sự mến mộ vì chính những chiến lược của ông mà quân đội tránh được những tổn thất nặng nề không cần thiết. Năm 1819 Foy được bầu vào Viện đại biểu nơi mà ông là người đứng đầu phe đối lập tấn công mạnh mẽ nhất vào các chính sách mà phần lớn được bỏ phiếu có lợi cho vua chúa cũng như giáo sĩ cực đoan. Bằng sự giúp đỡ của Larchet de Charmont, một người bạn cũ của Tướng Foy và người bạn của cha mẹ Dirichlet, Dirichlet đã được giới thiệu với gia đình Foy và ông đã nhận được một công việc với mức lương tốt, để ông không còn phải phụ thuộc vào sự hỗ trợ tài chính của cha mẹ. Công việc giảng dạy rất vừa phải, Dirichlet có đủ thời gian cho những sự nghiên cứu của mình... Ngoài ra, với sự giúp đỡ của Dirichlet, Mme Foy ôn lại tiếng Đức của cô, và, ngược lại, cô đã giúp Dirichlet thoát khỏi giọng Đức của mình khi nói tiếng Pháp. Dirichlet được đối xử như là thành viên của gia đình Foy và cảm thấy rất thoải mái khi ở vị trí may mắn này. Ngôi nhà của Tổng Foy là một điểm hẹn của nhiều nhân vật nổi tiếng ở thủ đô nước Pháp và chính điều này đã cho phép Dirichlet đạt được sự tự tin trong mặt xã hội của ông - điều đó có tầm

quan trọng trong cuộc sống tương lai của ông. Dirichlet nhanh chóng làm quen được với các giáo viên trong viện hàn lâm của mình.

Công việc đầu tiên mang tính chất hàn lâm của Dirichlet là một bản dịch tiếng Pháp của một bài báo của JA Eytelwein (1764 - 1848), thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia ở Berlin, về thủy động lực học ([EY]). Giáo viên của Dirichlet là Hachette sử dụng bản dịch này khi ông đã đưa ra một báo cáo công việc này cho những người ở Pari, Societe Paris Philomatique tháng 5 năm 1823, và ông xuất bản một bài phê bình lại trong Bulletin des Khoa học mệnh Societe la Philomatique de Paris, 1823, trang 113-115. Bản dịch đã được in vào năm 1825 ([EY]), và Dirichlet gửi một bản sao cho Viện Hàn lâm Khoa học tại Berlin năm 1826 ([Bi.8], trang 41).

Công trình khoa học đầu tiên của Dirichlet có tên Memoire sur l'impossibilite de quelques indeterminees du `cinqui EME degre ([Q.1], trang 10-20 và tr 21-46) ngay lập tức được đánh giá cao trong giới khoa học.

34.

Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré.

(Par Mr. *Lejeune Dirichlet*, professeur en mathématiques.)

Lu a l'académie royale des sciences (institut de France), le 11. Juillet 1825, par l'auteur.

(D'après le rapport de MM. Lacroix et Legendre, ce mémoire a été approuvé, et doit être imprimé dans le recueil des mémoires de savans étrangers *).)

On sait que la théorie des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, est encore très peu avancée; il est vrai qu'il y a une infinité d'équations de tous les degrés dont on peut démontrer l'impossibilité en faisant voir que quelles que soient les valeurs que l'on attribue aux indéterminées, les deux membres de l'équation proposée ne peuvent jamais donner le même reste lorsqu'on les divise par un certain nombre ou module; mais lorsqu'une équation ne peut pas être traitée par ce moyen, il devient difficile de prouver qu'elle est impossible, et on n'y est parvenu, jusqu'à présent, que pour un très petit nombre d'équations.

“Memoire sur l'impossibilite de quelques indeterminees du `cinqui EME degre”

Công việc này liên quan chặt chẽ đến Định lý Fermat lớn của năm 1637, định lý phát biểu rằng phương trình:

$$x^n + y^n = z^n$$

không thể được giải quyết trong tập số nguyên, $(x, y, z \neq 0, n \geq 3, n \in \mathbb{N})$.

Chủ đề này vẫn còn đang có nhiều tranh cãi, do đó Viện Hàn lâm Khoa học Pháp đã treo một giải thưởng cho người chứng minh được giả thuyết này, các giải pháp phải được gửi trước tháng 1 năm 1818. Trong thực tế, chúng ta biết rằng Wilhelm Olbers (1758 - 1840) đã gây ra sự chú ý của Gauss cho câu hỏi này, hy vọng rằng sẽ Gauss có thể dành được giải thưởng, một huy chương vàng trị giá 3.000 Franc ([O.1] tr 626-627). Tại thời điểm đó, lời giải cho phương trình Fermat đối với các số nguyên khác không chỉ được chứng minh cho hai số mũ n , cụ thể là cho $n = 4$ của Fermat, và cho $n = 3$ của Euler.

Vì đã được chứng minh đầy đủ với $n = 4$ và cho tất cả n số nguyên tố lẻ $= p \geq 3$, vấn đề đã được mở cho tất cả các số nguyên tố $p \geq 5$. Dirichlet bắt đầu nghiên cứu các trường hợp $p = 5$ và bắt đầu xem xét phương trình:

$$x^5 \pm y^5 = az^5$$

trong tập các số nguyên, trong đó a là một số nguyên cố định. Ông đã chứng minh cho nhiều giá trị đặc biệt của a , ví dụ:

Cho $a = 4$ và cho $a = 16$, mà phương trình này thừa nhận giải pháp không tầm thường trong tập số nguyên. Đối với các phương trình Fermat, Dirichlet đã chỉ ra rằng đối với bất kỳ giả thuyết không tầm thường cơ bản x, y, z , một trong những con số phải được chia cho 5, và ông suy ra một mâu thuẫn theo giả định rằng con số này là số chẵn. Những "trường hợp kỳ lạ" còn lại được giải quyết đầu tiên.

Dirichlet gửi nghiên cứu của mình cho Viện Hàn lâm Khoa học Pháp và nhận được sự cho phép thuyết trình về công việc của mình cho các thành viên của Học viện. Điều này phải được coi là một sự kiện đáng ghi nhớ vì lúc đó ông là một sinh viên pháp 20 tuổi, chưa từng được công bố bất cứ điều gì và thậm chí ông chưa có một bằng cấp nào. Dirichlet thuyết trình bài giảng của mình vào

ngày 11 tháng sáu 1825, và một tuần sau đó được Lacroix và Legendre viết một bài báo ngưỡng mộ ông, nhờ vào đó mà Học viện quyết định để bài báo được in trong bản Ghi nhớ Recueil des des Savansetrangers. Tuy nhiên, dự định về việc xuất bản không trở thành hiện thực. Năm 1825, Dirichlet đã phải tự mình xuất bản, và xuất bản nó sau này dưới hình thức chi tiết hơn trong tập thứ ba của của Tạp chí Crelle (tạp chí được thành lập bởi August Leopold Crelle (Berlin) vào năm 1826 và chỉnh sửa bởi ông cho đến khi qua đời vào năm 1855) Sau đó Legendre đặt vấn đề cho các trường hợp lẻ đã nói ở trên, và Dirichlet cũng tiếp tục xử lý trường hợp này bằng các phương pháp của mình. Điều này giải quyết các trường hợp $n = 5$ một cách hoàn chỉnh.

Dirichlet đã có đóng góp đáng kể đầu tiên cho phát biểu của Fermat sau hơn 50 năm sau khi Euler, và ngay lập tức tạo được danh tiếng cho ông như là một nhà toán học tài ba. Bảy năm sau đó, ông cũng đã chứng minh rằng phương trình của Fermat cho số mũ 14 thừa nhận phương pháp số nguyên không tầm thường. (Các trường hợp $n = 7$ đã được giải quyết chỉ vào năm 1840 bởi G. Lamé (1795-1870).) Một điểm đáng chú ý của công việc của Dirichlet về vấn đề của Fermat dựa trên các dạng toàn phương, đó là, trong

$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ với $n = 5$, và $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ với $n = 14$.

Ông dường như đã dành nhiều suy nghĩ về vấn đề này, khi năm 1843 E. Kummer (1810-1893) đã cho anh ta một danh sách có chứa một cách chứng minh chung chung cho phát biểu của Fermat. Dirichlet trả lại bản thảo và nhấn mạnh rằng đây thực sự sẽ là một phương pháp chứng minh hợp lệ. Nếu Kummer đã không chỉ đưa ra phân số cho bất kỳ số nguyên nào dưới lĩnh vực...thành một phân số tối giản. Tuy nhiên, điều này không đúng. Ở đây và trong phần thứ hai 'của Gauss về biquadratic dư lượng chúng ta phân biệt được sự khởi đầu của lý thuyết số đại số.

Các bài giảng cho các học viện đã cho Dirichlet tiếp xúc gần gũi hơn với một vài học thuật nổi tiếng, đặc biệt là với Fourier và Poisson, người đã đánh thức niềm say mê của ông trong vật lý toán học. Những người quen với Fourier và nghiên cứu của Theorie analytique de la chaleur của ông rõ ràng đã cho anh động lực để sau này của ông kỷ nguyên làm việc trên chuỗi Fourier.

- **Tham gia dịch vụ quân sự nước Phổ.**

Cho đến tận 1807 Alexander von Humboldt (1769-1859) vẫn còn sống ở Paris và làm việc một mình trên 36 thể tích minh họa lãng phí về đánh giá khoa học của đoàn thám hiểm nghiên cứu của ông trong những năm 1799-1804 với A. Bonpland (1773-1858) đến phía Nam và Trung Mỹ. Cuộc thám hiểm này đã đem về cho anh danh tiếng rất lớn trên toàn thế giới, và ông trở thành một viện sĩ thông tấn của Học viện hàn lâm Pháp năm 1804 và một thành viên quốc tế vào năm 1810. Von Humboldt đã có một niềm đam mê rất lớn đối với khoa học tự nhiên và trên đó, ông đã hào phóng dùng sự nổi tiếng của mình để hỗ trợ trẻ tài năng trong bất kỳ loại hình nghệ thuật hay khoa học, thậm chí ngay cả khi ông không còn một xu trong túi. Khoảng năm 1825 ông đã được về để hoàn thành công việc tuyệt vời của mình và quay trở lại Berlin giống như một quý ông và được sự quan tâm của vua Phổ Friedrich Wilhelm III, là người cũng muốn có tiếng tăm bên khoa học.

Với sự giới thiệu của Fourier và Poisson, Dirichlet đã tiếp xúc với A. von Humboldt. Đối với Dirichlet việc tìm kiếm một việc làm cố định đã trở thành một vấn đề cấp bách trong 1825-1826, kể từ khi Tướng Foy lâm chung vào tháng 11 năm 1825, và việc đó đồng nghĩa với công việc gia sư sẽ chấm dứt sớm. J. Liouville (1809-1882) đã lặp đi lặp lại nhiều lần rằng Dirichlet sẽ sẵn sàng ở lại tại Paris nếu ông có việc, thậm chí chỉ là một vị trí với mức lương khiêm tốn ([T], phần đầu tiên, trang 48, chú thích). Nhân dịp chuyến thăm đầu tiên của ông với A. von Humboldt, Dirichlet bày tỏ mong muốn cho một cuộc hẹn tại Phổ quê hương của mình. Von Humboldt ủng hộ ông trong kế hoạch và đề nghị giúp đỡ ông cùng một lúc. Mục tiêu của việc tuyên bố này là để biến Berlin thành một trung tâm về nghiên cứu về toán học và khoa học tự nhiên ([Bi.5]).

Với sự giúp đỡ von Humboldt, đơn xin việc ở Berlin được viết một cách đầy hứa hẹn: Ngày 14 Tháng 5, 1826, Dirichlet đã viết một lá thư xin việc cho tướng Phổ von Altenstein và thêm một tái bản cuốn luận văn của mình về những vấn đề của Fermat và một lá thư giới thiệu của von Humboldt tới người bạn cũ của ông von Altenstein. Dirichlet cũng đã gửi các bản sao của cuốn luận

văn của ông về các vấn đề Fermat và bản dịch của ông về công việc của Eytelwein cho Viện Hàn lâm ở Berlin cùng với một giấy giới thiệu của A. von Humboldt, rõ ràng là hy vọng để được hỗ trợ bởi các viện sĩ và các nhà thiên văn học Eytelwein JF Encke (1791-1865), ---một sinh viên của Gauss, và là thư ký Viện Hàn lâm. Thứ ba, ngày 28 tháng 5 năm 1826, Dirichlet gửi một bản sao bản luận văn của ông về vấn đề Fermat với một lá thư kèm theo đến CF Gauss ở Göttingen, giải thích tình hình của ông và yêu cầu Gauss gửi đánh giá của mình tới một trong những cộng sự của ông ở Berlin. Vì chỉ có rất ít người có đủ hiểu biết về chủ đề của bài báo, Dirichlet đã lo ngại rằng công việc của mình có thể đánh giá thấp ở Berlin. (Thư này được công bố trong [D.2], trang 373-374.) Ông cũng kèm theo một lá thư giới thiệu của Gauss và von A. Humboldt để ảnh hưởng tới ý kiến của Fourier và Poisson, Dirichlet trẻ đã có một tài năng xuất sắc nhất và tiếp tục trên con đường tốt nhất Euler. Và von Humboldt rõ ràng yêu cầu Gauss hỗ trợ của Dirichlet bằng sự nổi tiếng của ông ([Bi.6], trang 28-29).

Bây giờ các vấn đề tiến hành suôn sẻ: Gauss đã viết cho Encke cho thấy rằng Dirichlet là một tài năng xuất sắc, Encke đã viết cho một quan chức hàng đầu trong Bộ thực hiện việc đó, theo sự hiểu biết của mình, Gauss chưa bao giờ có những lời khen như vậy cho bất cứ nhà khoa học nào. Sau khi Encke đã thông báo với Gauss về trạng thái đầy hứa hẹn của công việc, Gauss đã biên thư lại vào ngày 13 tháng chín, 1826, như là một người cha đối với Dirichlet, thể hiện sự hài lòng của mình: "từ một bức thư nhận được từ các thư ký của Học viện ở Berlin, rằng chúng ta có thể hy vọng rằng con sẽ sớm nhận được một vị trí thích hợp ở quê hương con" ([D.2], tr 375-376; [G.1], tr 514-515).

Dirichlet trở lại Duren để chờ đợi những sự kiện của khóa học. Trước khi ông trở về, ông đã có một cuộc họp tại Paris mà có thể có dấu vết để lại lâu dài trong lịch sử của toán học.

Vào ngày 24 Tháng 10 Năm 1826, NH Abel (1802-1829) đã viết từ Paris cho giáo viên của mình và người bạn BM Holmboe (1795-1850), rằng ông đã gặp "Herrn Lê- Jeune Dirichlet, một người nước Phổ, người đến thăm tôi khác ngày, kể từ khi ông coi tôi như là một người đồng đồng hương. Ông là một nhà

toán học rất khôn ngoan. Đồng thời với Legendre ông đã chứng minh phương trình:

$$x^5 + y^5 = z^5$$

là không giải quyết được trong số nguyên và những kết quả rất đẹp khác "[A], văn bản tiếng Pháp trên trang 45 và văn bản Na Uy p. 41). Cuộc gặp mặt giữa Abel và Dirichlet có thể có được sự khởi đầu của một tình bạn lâu dài giữa các nhà toán học đương thời, vì trong thời điểm đó những kế hoạch được thực hiện cho một viện bách khoa ở Berlin, và Abel, Dirichlet, Jacobi, và nhà hình học J. Steiner (1796-1863) đã được xem xét như là các thành viên hàng đầu của hội. Tuy nhiên, các kế hoạch này, không thể thành hiện thực được. Abel qua đời sớm vào năm 1829 chỉ hai ngày trước khi Crelle gửi tin nhắn cuối cùng của ông, rằng Abel chắc chắn sẽ được gọi đến Berlin. Abel và Dirichlet không bao giờ gặp nhau sau cuộc gặp gỡ ngắn ngủi của mình ở Paris. Trước cái kết thúc không mấy tốt đẹp ở AL Crelle (1780-1855) ông đã thực hiện mọi nỗ lực để tạo ra một vị trí mới của Abel ở Berlin, và ông đã khá lạc quan về dự án này cho đến tháng Bảy, 1828, khi ông viết cho Abel những tin tức khủng khiếp rằng kế hoạch có thể không được thực hiện tại thời điểm đó, kể từ khi một đối thủ cạnh tranh mới "đã rơi ra khỏi bầu trời" ([A], văn bản tiếng Pháp, trang 66, Na Uy văn bản, trang 55) Người ta đã phỏng đoán rằng Dirichlet chính là đối thủ cạnh tranh mới, mặc dù Abel chưa hề biết đến tên ông, nhưng những cuộc điều tra gần đây bởi G. Schubring (Bielefeld) cho thấy điều này không đúng.

Đáp lại đơn xin việc ,Bộ trưởng von Altenstein đã cấp cho Dirichlet một vị trí giảng dạy tại Đại học Breslau (Silesia, bây giờ Wrocław, Ba Lan) với cơ hội cho một kỳ thi có tên Habilitation- kỳ thi yêu cầu để có thể trở thành một giảng viên tại trường đại học với một mức lương khiêm tốn hàng năm là 400 talers, đó là mức lương khởi đầu khiêm tốn của một giáo sư tại thời điểm đó. (Điều này không phải là quá tệ đối với một chàng trai trẻ 21 tuổi không có bất kỳ bằng cấp gì) Von muốn Dirichlet chuyển đến Breslau ngay tuần sau vì ở đó có vị trí trống. Ông nói thêm, nếu Dirichlet vẫn chưa vượt qua kì thi tiến sĩ, ông có thể gửi một đơn xin việc đến khoa triết học của Đại học Bonn mà cấp cho ông tất cả các thiết bị phù hợp theo đúng luật ([Sc.1]).

Tuy nhiên, việc trao giải thưởng của tiến sĩ mất nhiều thời gian hơn so von Altenstein và Dirichlet đã dự đoán. Các thủ tục thông thường là không thể vì một số lý do chính thức sau: Dirichlet đã không học tại một trường đại học Phổ; luận án của mình về các vấn đề Fermat, đã không được viết bằng tiếng Latin, và Dirichlet thiếu kinh nghiệm trong nói trôi chảy tiếng Latin và do đó không đưa ra một cuộc tranh luận trước công chúng bằng tiếng Latin. Một sự thăng tiến như vậy là không thể, vì Bộ trưởng Bộ von Altenstein đã cấm các loại thủ tục để nâng cao trình độ của tiến sĩ. Để chính thức phá vỡ những vấn đề này một số giáo sư tại Bonn đề xuất các nghị thêm một danh hiệu tiến sĩ danh dự. Đề nghị này đã bị phản đối bởi các thành viên khác của các giảng viên của khoa, mà theo họ cách này phá hoại các quy tắc thông thường.

Các cuộc thảo luận kéo dài một thời gian, cuối cùng các giảng viên đã bỏ phiếu nhất trí. Ngày 24 tháng 2 năm 1827, người bạn cũ của Dirichlet Elvenich, tại thời điểm đó phó giáo sư ở Bonn, thông báo ông về những kết thúc có hậu, và một vài ngày sau đó Dirichlet nhận được bằng tốt nghiệp tiến sĩ của mình.

Bởi vì sự chậm trễ Dirichlet không thể tiếp tục trách nhiệm giảng dạy của mình tại Breslau vào mùa đông năm 1826-27. Thêm vào đó, một vấn đề nghiêm trọng hơn cần phải được giải quyết một cách bí mật bởi Bộ. Trong những ngày Trung và Đông Âu bị sự cai trị khắc nghiệt của Liên minh Thánh Holy (1815), các Nghị định Carlsbad (1819) được thực hiện tỉ mỉ, và bị cáo buộc “kẻ mị dân” đã bị khởi tố (1819). Dân Phổ tại Paris đã nhận được một bức thư từ Bộ tại Berlin hỏi về vấn đề những nghi ngờ kích động chính trị có thể được phát hiện ra về người nộp đơn, vì đã có những tin đồn rằng Dirichlet đã sống trong nhà vị tướng Foy quá cố, một kẻ thù quyết liệt của chính phủ. Sau khi kiểm tra các vấn đề, và báo cáo rằng không có chứng cứ nào về sự phung phí trong quan điểm và hành động của Dirichlet, và rằng ông dường như đã sống chỉ dành cho khoa học của mình.

- **Habilitation và giáo sư ở Breslau.**

Trong quá trình cải cách Phổ sau các cuộc chiến tranh Napoleon, một số trường đại học được thành lập dưới sự chỉ đạo của Wilhelm von Humboldt (1767-1835), - anh trai của Alexander von Humboldt, cụ thể là, các trường Đại

học Berlin (1810), Breslau (1811), và Bonn (1818), và Đại học quân sự được thành lập ở Berlin vào năm 1810, theo sáng kiến của Tổng Phổ GJD von Scharnhorst (1755-1813). Trong suốt sự nghiệp của ông Dirichlet đã phải làm với tất cả các tổ chức này. Chúng tôi đã đề cập đến tiến sĩ danh dự từ Bonn.

Vào mùa xuân năm 1827, Dirichlet chuyển từ Duren đến Breslau để thực hiện cuộc gặp gỡ của ông. Trên hành trình dài đó ông đã thực hiện một đường vòng lớn qua Göttingen để gặp Gaub (ngày 18 Tháng Ba 1827), và thông qua Berlin. Trong một lá thư cho mẹ của mình Dirichlet nói rằng Gaub đã đối xử với ông một cách rất thân thiện. Tương tự như vậy, từ một bức thư khác của Gauss gửi Olbers ([O.2], trang 479), chúng ta biết rằng Gauss cũng đã rất vui khi được gặp mặt trực tiếp Dirichlet và ông bày tỏ sự vui mừng của mình và rõ ràng chính đề nghị của ông đã giúp Dirichlet được bổ nhiệm. Gauss cũng đã nói một số thứ về các chủ đề của cuộc hội thoại này, và ông nói rằng ông đã ngạc nhiên khi biết Dirichlet, rằng sự đánh giá các vấn đề toán học của ông hoàn toàn đồng ý với của Fourier, đáng chú ý trên cơ sở hình học.

Đối với Dirichlet, nhiệm vụ đầu tiên ở Breslau là chuẩn bị tư cách để nhận vào giảng dạy-tập giảng (đủ điều kiện như trường đại học giảng viên). Theo quy định hiện hành, ông đã:

- a) tập giảng (giảng thử),
- b) để viết một luận án (Habilitationsschrift) trong tiếng Latin, và
- c) bảo vệ luận án của mình trong một cuộc tranh luận công cộng sẽ được tổ chức bằng tiếng Latinh.

Điều kiện a) và b) không gây rắc rối nghiêm trọng, nhưng Dirichlet đã khó khăn đáp ứng điều kiện c) vì không có khả năng nói trôi chảy tiếng Latin. Do đó ông đã viết thư cho Bộ trưởng Bộ von Altenstein yêu cầu miễn cho cuộc tranh luận này. Bộ trưởng đã chấp nhận – mặc dù có rất nhiều người trong khoa không hài lòng về quyết định đó.

Để đáp ứng điều kiện a), Dirichlet đã cho một bài giảng thử nghiệm về bảng chứng của Lambert về sự vô lý của số π . Và với điều kiện b), ông đã viết một

luận án về số vấn đề lý thuyết sau (xem [Q.1], trang 45-62): Cho x, b là các số nguyên, b không phải là bình phương của một số nguyên, và mở rộng:

$$(x + \sqrt{b})^n = u + v\sqrt{b}$$

Với u và v là các số nguyên. Vấn đề là xác định các hình thức tuyến tính bao gồm các số nguyên tố chia v , khi biến x giả sử là tất cả các số nguyên dương và nguyên âm nguyên tố cùng nhau với b . Vấn đề này được giải quyết trong hai trường hợp, tức là:

(I) nếu n là một nguyên tố lẻ,

(II) nếu n là một lũy thừa của 2.

Các kết quả được minh họa trên các ví dụ đặc biệt. Một điều đáng chú ý là sự giới thiệu trong đó Dirichlet xem xét các ví dụ từ các lý thuyết về biquadratic residues và đề cập đến công việc tuyệt vời của ông về biquadratic residues, được xuất hiện trong của Crelle tạp chí thời bấy giờ.

Luận án đã được in vào đầu năm 1828, và được gửi đến von Altenstein, và kết quả là Dirichlet được thăng quân hàm phó giáo sư. A. von Humboldt thêm lời hứa của bố trí chuyển Dirichlet đến Berlin càng sớm càng tốt. Theo Hensel ([H.1], vol. 1 p. 354) Dirichlet không cảm thấy thoải mái ở Breslau, ông không thích tính chất bề phái rộng rãi ở đây. Rõ ràng, ông bỏ lỡ việc trao đổi quan điểm với các nhà nghiên cứu có trình độ mà ông rất thích ở Paris. Mặt khác, ở đó có các đồng nghiệp ở Breslau là những người xem Dirichlet với sự tôn trọng cao, như trong một lá thư của đồng nghiệp của Dirichlet H. Steffens (1773-1845) đến Bộ ([Bi.1], trang 30): Steffens chỉ ra rằng Dirichlet thường được đánh giá cao vì am hiểu của ông, và cũng được mọi người rất thích vì sự khiêm tốn tuyệt vời của mình.

Hơn nữa, ông đã viết rằng đồng nghiệp của mình - như Gauss vĩ đại ở Göttingen - đã không có nhiều sinh viên, nhưng những người trong hàng ghế người nghe, những người mà nghiêm túc với toán học, đã biết cánh đánh giá Dirichlet và làm thế nào để tận dụng tốt ông.

Thời gian ở Breslau quan điểm Dirichlet khoa học được chứng minh là khá thành công. Trong tháng tư 1825, Gauss có xuất bản một thông cáo ngắn gọn

đầu tiên - như ông đã được sử dụng để làm - các nghiên cứu của ông về biquadratic residues.

Cuộc đời nghiên cứu toán học của nhà toán Dirichlet là một chuyến hành trình dài qua bao niềm quê với một niềm đam mê lớn. Với Dirichlet bắt đầu tuổi vàng của toán học tại Berlin .Vào năm 1831, ông thành hôn với Rebecca Henriette Mendelssohn Bartholdy, một cô gái thuộc gia đình danh giá đã chuyển đổi từ đạo Do Thái sang Thiên chúa giáo; cô là cháu gái của triết gia Moses Mendelssohn, con gái của Abraham Mendelssohn Bartholdy và là em của nhà soạn nhạc Felix Mendelssohn Bartholdy và Fanny Mendelssohn. Ferdinand Eisenstein, Leopold Kronecker, và Rudolf Lipschitz là học trò của ông. Sau khi ông qua đời, các bài giảng của Dirichlet và các kết quả khác trong ngành số học được sưu tập, biên khảo và xuất bản bởi đồng nghiệp và cũng là bạn ông là nhà toán học Richard Dedekind dưới tựa đề Vorlesungen über Zahlentheorie (Các bài giảng về số học).

1.1.2. Các công trình toán học của Dirichlet.

Những đóng góp của Dirichlet đến toán học. Đóng góp của ông vào Định lý Fermat được thực hiện cuối năm 1825. Khoảng thời gian này, ông cũng xuất bản một bản giấy lấy cảm hứng từ Gauss 's làm việc trên quy luật trùng phương.

Năm 1837, ông đã chứng minh được với một cặp số cộng có dạng $an + b$, Cho $n = 1, 2, \dots$, chứa vô hạn các số nguyên tố, a và b là nguyên tố cùng nhau, tức là $(a, b) = 1$. Kết quả này đã được phỏng đoán bởi Gauss (Derbyshire năm 2004, p. 96), nhưng lần đầu tiên được chứng minh bởi Dirichlet (1837).

Phân tích lý thuyết số có thể cho biết để bắt đầu với công việc của Dirichlet, và đặc biệt với cuốn hồi ký của 1.837 Dirichlet về sự tồn tại của số nguyên tố trong một cặp số cộng nhất định.

Ngay sau khi tác phẩm này được xuất bản giấy, Dirichlet đã thêm về lý thuyết số phân tích, một trong năm 1838 với sự tiếp theo trong năm sau. Những giấy tờ giới thiệu loạt Dirichlet và xác định, trong số những thứ khác, công thức cho số lớp học cho các hình thức bậc hai.

Tác phẩm của ông về các đơn vị trong số đại số lý thuyết über Vorlesungen Zahlentheorie (xuất bản 1863) có công việc quan trọng về lý tưởng. Ông cũng đề nghị năm 1837 định nghĩa hiện đại của một hàm:

Nếu một y biến như vậy là liên quan đến một biến x rằng bất cứ khi nào một số giá trị được gán cho x , có một quy tắc theo đó một giá trị duy nhất của y được xác định, sau đó y được gọi là một chức năng của x . biến độc lập

Trong cơ khí, ông điều tra các trạng thái cân bằng của hệ thống và lý thuyết tiềm năng. Những điều tra đã bắt đầu vào năm 1839 với giấy tờ mà đã cho phương pháp để đánh giá tích phân nhiều và ông này áp dụng cho vấn đề của việc thu hút hấp dẫn của một ellipsoid trên điểm cả hai bên trong và bên ngoài. Ông quay sang Laplace 's vấn đề chứng minh sự ổn định của hệ thống năng lượng mặt trời và sản xuất phân tích mà tránh được vấn đề của việc sử dụng mở rộng loạt với các thuật ngữ bậc hai và cao hơn disregarded. Công việc này đã dẫn ông đến các vấn đề liên quan đến chức năng Dirichlet hài hòa với điều kiện biên nhất định. Một số hoạt động trên cơ học sau này trong sự nghiệp của mình là có tầm quan trọng khá nổi bật. Năm 1852, ông nghiên cứu các vấn đề của một mặt cầu đặt trong một chất lỏng incompressible, trong quá trình điều tra này trở thành người đầu tiên tích hợp các phương trình Thủy động lực học chính xác.

Dirichlet cũng nổi tiếng với những tác phẩm của ông về điều kiện cho sự hội tụ của chuỗi lượng giác. Những chuỗi đã được sử dụng trước đây của Fourier trong giải phương trình vi phân. Tác phẩm của Dirichlet được xuất bản trong Tạp chí Crelle của năm 1828.

Bởi vì điều này làm việc Dirichlet được coi là người sáng lập ra học thuyết của Fourier series. Riemann, một sinh viên của Dirichlet, đã viết trong phần giới thiệu cho luận án của mình trên Habilitation Chuỗi Fourier rằng nó đã được Dirichlet:

“... người học giả đầu tiên sâu sắc về chủ đề này”.

Nhân vật Dirichlet và chất lượng giảng dạy được tóm tắt như sau:

“Ông là một giáo viên giỏi, luôn luôn thể hiện mình với độ rõ nét tuyệt vời. Lăn theo cách của ông đã được khiêm tốn; trong những năm sau đó ông đã được nhút nhát và lúc reserved. Ông ít khi phát biểu tại cuộc họp và đã miễn cưỡng để làm xuất hiện công khai”.

Ở tuổi 45 Dirichlet được Thomas Hirst miêu tả như sau:

“Ông là khá cao, lanky-tím người đàn ông, với bộ râu ria và vẻ để biến màu xám với một giọng nói hơi thô và thay đổi. Ông đã không có tắm rửa, với ly cà phê của mình và xì gà. Một trong những thiếu sót của mình là quên thời gian, ông đã kéo mình ra xem, thấy ba vừa qua, và chạy ra mà không hề kết thúc câu”.

Koch viết về sự đóng góp của Dirichlet như sau:

“... phần quan trọng của toán học bị ảnh hưởng bởi Dirichlet. Chứng minh của ông characteristically bắt đầu với các quan sát đáng ngạc nhiên đơn giản, tiếp theo là phân tích cực kỳ sắc nét của vấn đề còn lại...”.

1.2. Nguyên lý Dirichlet.

1.2.1 Nội dung nguyên lý Dirichlet

Nguyên lý Dirichlet - còn gọi là nguyên lý chim bồ câu (The Pigeonhole Principle)-hoặc nguyên ý những cái lồng nhốt thỏ hoặc nguyên lý sắp xếp đồ vật vào ngăn kéo (The Drawer Principle) - đưa ra một nguyên tắc về phân chia phần tử các lớp.

Nguyên lý này được Dirichlet phát biểu đầu tiên năm 1834.

Nguyên lý Dirichlet là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lý này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi.

Nội dung của nguyên lý này hết sức đơn giản và dễ hiểu nhưng lại có tác dụng rất lớn, có nhiều hiệu quả bất ngờ trong giải toán. Sử dụng nó, chúng ta có thể chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc của Toán học. Đôi khi có những bài toán người ta đã dùng rất nhiều phương pháp khác nhau để giải mà vẫn chưa đi đến được kết quả, nhưng nhờ nguyên lý Dirichlet mà bài toán trở nên dễ dàng giải quyết.

• Nguyên lý Dirichlet cơ bản:.

Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

• Nguyên lý Dirichlet tổng quát:

Mệnh đề: Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật.

(Ở đây, $[x]$ là giá trị của hàm trần tại số thực x , đó là số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x . Khái niệm này đối ngẫu với $[x]$ – giá trị của hàm sàn hay hàm phần nguyên tại x – là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x .)

Chứng minh:

Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ vật. Khi đó tổng số đồ vật là;

$$k \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil = N.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có N đồ vật cần xếp.

• **Nguyên lý Dirichlet đối ngẫu.**

Cho tập hữu hạn $S \neq \emptyset$ và $S_1, S_2, \dots, S_n$ là các tập con

của S sao cho $|S_1| + |S_2| + \dots + |S_n| > k \cdot |S|$. Khi đó, tồn tại một phần tử $x \in S$ sao cho x là phần tử chung của k+1 tập S_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

• **Nguyên lý Dirichlet mở rộng.**

Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất

$$\left\lceil \frac{n+m-1}{m} \right\rceil \text{ con thỏ, ở đây kí hiệu } [\alpha] \text{ để chỉ phần nguyên của số } \alpha.$$

Ta chứng minh nguyên lý Dirichlet mở rộng như sau : Giả sử trái lại mọi chuồng thỏ không có đến

$$\left\lceil \frac{n+m-1}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{m} + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + 1$$

con, thì số thỏ trong mỗi chuồng đều nhỏ hơn hoặc bằng $\left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil$ con.

Từ đó suy ra tổng số con thỏ không vượt quá $m \cdot \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil \geq n-1$ con

Điều này vô lý vì có n con thỏ. Vậy giả thiết phản chứng là sai.

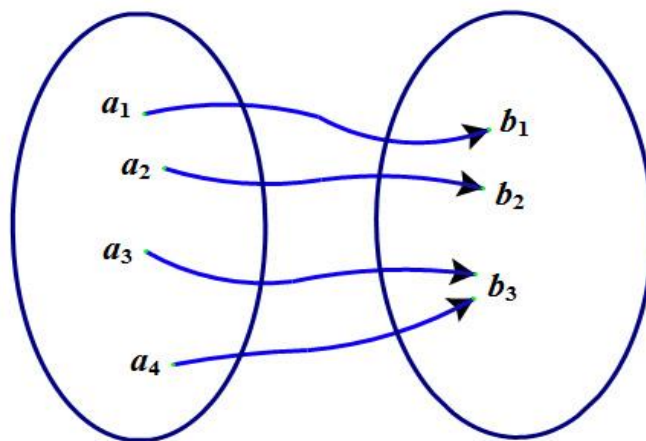
Nguyên lý Dirichlet mở rộng được chứng minh. Nguyên lý Dirichlet tưởng chừng đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lý này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ

thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi. Nguyên lý Dirichlet thực chất là một định lý về tập hữu hạn. Người ta có thể phát biểu chính xác nguyên lý này dưới dạng sau đây.

• **Nguyên lý Dirichlet dạng tập hợp.**

Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B . Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B , thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B .

Với cùng một cách như vậy, nguyên lý Dirichlet mở rộng có dạng sau đây.



Hình 1

• **Nguyên lý Dirichlet dạng tập hợp mở rộng**

Giả sử A, B là hai tập hợp hữu hạn và $S(A), S(B)$ tương ứng kí hiệu là các số lượng phần tử của A và B . Giả sử có một số tự nhiên k nào đó mà $S(A) > k \cdot S(B)$ và ta có quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử của A với một phần tử của B . Khi đó tồn tại ít nhất $k+1$ phần tử của A mà chúng tương ứng với cùng một phần tử của B .

Chú ý: Khi $k = 1$, ta có ngay lại nguyên lý Dirichlet.

Vì chương này dành để trình bày phương pháp sử dụng nguyên lý Dirichlet để giải các bài toán hình học sơ cấp. Vì lẽ đó, tôi xin trình bày luôn một số mệnh đề sau (thực chất là một số phát biểu khác của nguyên lý Dirichlet áp dụng cho độ

dài các đoạn thẳng, diện tích các hình phẳng, thể tích các vật thể) rất hay được sử dụng đến trong nhiều bài toán hình học được đề cập tới trong chương này.

• **Nguyên lý Dirichlet cho diện tích:**

Nếu K là một hình phẳng, còn $K_1, K_2, \dots, K_n$ là các hình phẳng sao cho $K_i \subseteq K$ với $i = \overline{1, n}$, và $|K| < |K_1| + |K_2| + \dots + |K_n|$, ở đây $|K|$ là diện tích của hình phẳng K , còn $|K_i|$ là diện tích hình phẳng K_i , $i = \overline{1, n}$, thì tồn tại ít nhất hai hình phẳng H_i, H_j ($1 \leq i < j \leq n$) sao cho H_i, H_j có điểm trong chung.

(Ở đây ta nói rằng P là điểm trong của tập hợp A trên mặt phẳng nếu như tồn tại hình tròn tâm P bán kính đủ bé sao cho hình tròn này nằm trọn trong A)

Tương tự như nguyên lý Dirichlet cho diện tích, ta có các nguyên lý Dirichlet cho độ dài các đoạn thẳng, thể tích các vật thể ...

• **Nguyên lý Dirichlet vô hạn:**

Nếu chia một tập hợp vô hạn các quả táo vào hữu hạn ngăn kéo, thì phải có ít nhất một ngăn kéo chứa vô hạn các quả táo.

Nguyên lý Dirichlet mở rộng cho trường hợp vô hạn này đóng vai trò cũng hết sức quan trọng trong lý thuyết tập điểm trù mật trên đường thẳng. Nó có vai trò quan trọng trong lý thuyết số nói riêng và toán học rời rạc nói chung (trong đó có hình học tổ hợp)

• **Nguyên lý Dirichlet đối ngẫu vô hạn phần tử.**

*Tập phần tử là một khoảng trên đường thẳng.

Trong mục này ta kí hiệu $d(I)$ là độ dài của khoảng $I \in \mathbb{R}$.

+ Cho A là một khoảng giới nội, $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các khoảng sao cho $A_i \subset A$ ($i = 1, 2, \dots, n$) và $d(A) < d(A_1) + d(A_2) + \dots + d(A_n)$. Khi đó ít nhất có hai khoảng trong số các khoảng trên có một điểm trong chung.

Chứng minh.

Thật vậy, giả sử không có cặp nào trong những khoảng đã cho có điểm trong chung.

Khi đó, $d(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = d(A_1) + d(A_2) + \dots + d(A_n) > d(A)$.

Mặt khác, từ $A_i \subset A$ ($i = 1, 2, \dots, n$) suy ra $d(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq d(A)$.

Các bất đẳng thức trên mâu thuẫn với nhau. Vậy ít nhất có hai khoảng trong số các khoảng trên có điểm trong chung.

- Tập phân tử là miền phẳng giới hạn bởi một đường cong phẳng khép kín

Trong mục này ta kí hiệu $S(A)$ là diện tích miền A trong một mặt phẳng.

+ Nếu A là một miền giới hạn bởi một đường cong phẳng khép kín, còn

$A_1, A_2, \dots, A_n$ là các miền sao cho $A_i \subset A$ ($i = 1, 2, \dots, n$) và $S(A) < S(A_1) + S(A_2) + \dots + S(A_n)$, thì ít nhất có hai miền trong số các miền nói trên có điểm trong chung.

Chứng minh. Tương tự như chứng minh Định lí 1.

1.2.2 Phương pháp ứng dụng.

Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng như đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nguyên lí Dirichlet cũng được áp dụng cho các bài toán của hình học, điều đó được thể hiện qua hệ thống bài tập sau:

Để sử dụng nguyên lí Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt “thỏ” vào “chuồng” và thỏa mãn các điều kiện :

- + Số “thỏ” phải nhiều hơn số chuồng
- + “Thỏ” phải được nhốt hết vào các “chuồng”, nhưng không bắt buộc chuồng nào cũng phải có thỏ.

Thường phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng. Ngoài ra nó còn có thể áp dụng với các phép biến hình.

1.3. Hệ thống bài tập.

1.3.1. Bài toán về các điểm, các đường thẳng.

Bài toán 1:

Trong hình vuông cạnh bằng 1, đặt 51 điểm bất kì, phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất 3 trong số 51 điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Giải:

Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh bằng $\frac{1}{5}$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình vuông con a chứa ít nhất ba điểm trong số 51 điểm đó. Đường tròn ngoại tiếp (a) có bán kính $\frac{1}{5\sqrt{2}} \leq \frac{1}{7}$.

Vậy ba điểm nói trên nằm trong hình tròn đồng tâm với đường tròn (a) có bán kính $\frac{1}{7}$.

Tổng quát hóa bài toán:

Dựa vào bài giải bài toán trên ta có thể tổng quát hóa bài toán trên với a là kích thước của cạnh hình vuông, m là số điểm đặt bất kì, phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất n trong số m điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính

$$\frac{a^2}{\sqrt{2 \cdot \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil}}. \text{ (trong đó kí hiệu } \lceil a \rceil \text{ là phần nguyên của } a \text{)}.$$

Cách giải:

Chia hình vuông đã cho thành $\left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil$ hình vuông con bằng nhau có cạnh bằng $\frac{a^2}{\sqrt{2 \cdot \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil}}$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình vuông con có chứa ít nhất n điểm trong số m điểm đó.

$$\text{Đường tròn ngoại tiếp (c) có bán kính } \frac{a^2}{\sqrt{2 \cdot \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil}} \leq \frac{a^2}{\sqrt{2 \cdot \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil}}.$$

Vậy n điểm trên nằm trong hình tròn đồng tâm với đường tròn (c) có bán kính

$$\frac{a^2}{\sqrt{2 \cdot \left\lceil \frac{m}{n-1} \right\rceil}}.$$

Bài toán 2:

Cho (x_i, x_i, x_i) , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ là một tập hợp gồm 9 điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trong không gian.

Chứng minh rằng trung điểm của đường nối ít nhất một trong các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

Giải:

Gọi tọa độ hai điểm bất kì trong không gian là A (a, b, c) và B (d, e, f)

Vậy trung điểm của đoạn AB là $O(\frac{a+d}{2}, \frac{b+e}{2}, \frac{c+f}{2})$.

Các tọa độ của điểm O nguyên nếu và chỉ nếu a và d; b và e; c và f cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Vì có $2^3 = 8$ bộ ba chẵn lẻ khác nhau ((c, c, c); (l, l, l); (c, c, l); (c, l, l); (c, l, c); (l, c, c); (l, c, l); (l, l, c)) nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 2 trong 9 điểm có cùng bộ ba chẵn lẻ như nhau.

Vậy có ít nhất một cặp điểm mà điểm chính giữa của chúng có tọa độ nguyên.

Tổng quát hóa bài toán:

Cho tập hợp gồm m điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trong không gian.

Chứng minh rằng trung điểm của đường nối ít nhất $\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{m}{8} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil$ trong các cặp

điểm này có tọa độ nguyên.

Cách giải:

Gọi tọa độ hai điểm bất kì trong không gian là A (a, b, c) và B (d, e, f)

Vậy trung điểm của đoạn AB là: $O(\frac{a+d}{2}, \frac{b+e}{2}, \frac{c+f}{2})$.

Các tọa độ của điểm O nguyên nếu và chỉ nếu a và d; b và e; c và f cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

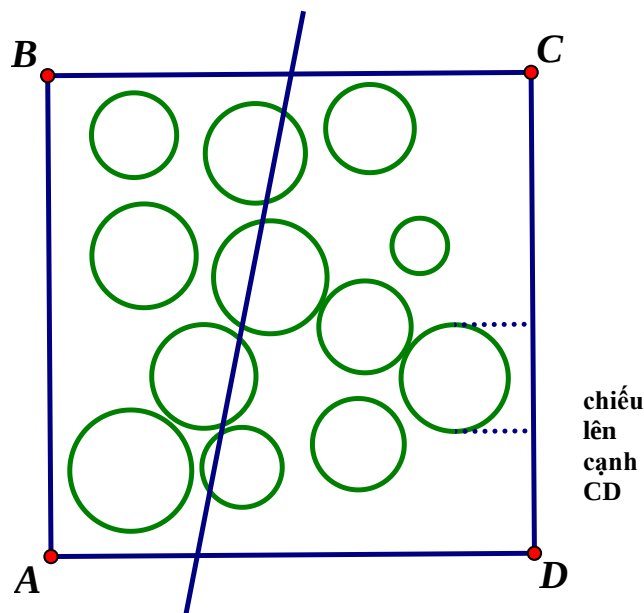
Vì có $2^3 = 8$ bộ ba chẵn lẻ khác nhau ((c, c, c); (l, l, l); (c, c, l); (c, l, l); (c, l, c); (l, c, c); (l, c, l); (l, l, c)) nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất $\left\lceil \frac{m}{8} \right\rceil + 1$ trong m điểm có cùng bộ ba chẵn lẻ như nhau.

Vậy có ít nhất $\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{m}{8} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil$ cặp điểm mà điểm chính giữa của chúng có tọa độ nguyên.

Bài toán 3:

Trong một hình vuông có cạnh là 1 chứa một số đường tròn. Tổng tất cả chu vi của chúng là 10. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất 4 đường tròn trong những đường tròn đó?

Giải.



Hình 3

Ta chọn một cạnh hình vuông rồi chiếu vuông góc các đường tròn xuống cạnh đó (xem hình 1). Ta có, hình chiếu của một đường tròn bán kính R xuống AB là một đoạn thẳng có độ dài $2R$. Vì vậy trên cạnh hình vuông đã chọn có những đoạn thẳng chiếu xuống với tổng độ dài là $\frac{10}{\pi}$. Mà $\frac{10}{\pi} > 3$. Nên theo nguyên lý Dirichlet đối ngẫu suy ra có một điểm M nào đó thuộc AB là điểm trong chung của ít nhất 4 đoạn thẳng đã chiếu xuống. Khi đó, đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt ít nhất 4 trong những đường tròn đó.

Tổng quát bài toán:

Cho hình vuông có cạnh 1 chứa một số đường tròn. Tổng độ dài của các đường tròn là 10. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng mà nó cắt ít nhất bốn trong những đường tròn này (giả sử số đường tròn đã cho lớn hơn hoặc bằng 4).

Giải:

Chọn một cạnh hình vuông chẳng hạn là AB rồi chiếu vuông góc các đường tròn xuống cạnh nào đó. Dễ thấy rằng hình chiếu của một đường tròn bán kính R sẽ là một đoạn thẳng có độ dài $2R$. Gọi $C_1, C_2, \dots, C_n$ là chu vi của n đường tròn đã cho. Khi đó theo giả thiết, thì :

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = 10$$

Mặt khác, đường tròn với chu vi C_i sẽ có bán kính : $R_i = \frac{C_i}{2\pi}$.

Vậy hình chiếu của hình tròn với chu vi C_i sẽ là đoạn thẳng với độ dài là :

$$\frac{2C_i}{2\pi} = \frac{C_i}{\pi}.$$

Tổng độ dài hình chiếu của n đường tròn trên cạnh đã cho là:

$$\frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\pi} + \dots + \frac{C_n}{\pi} = \frac{10}{\pi}.$$

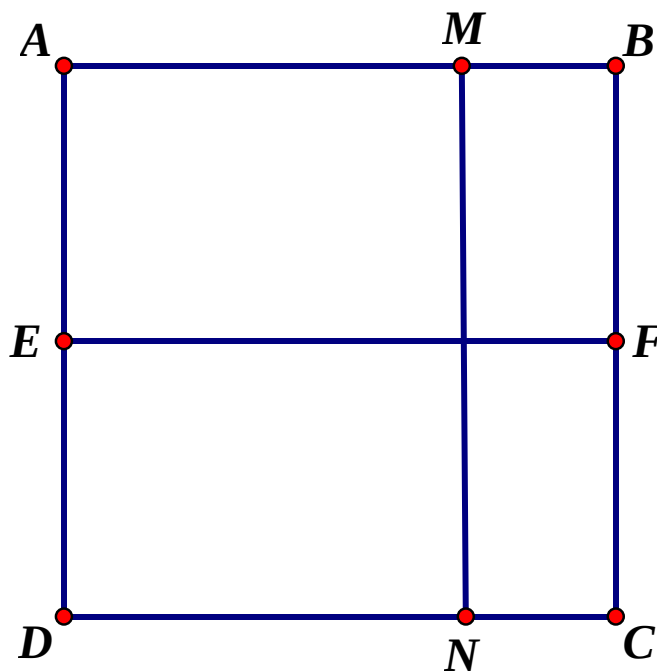
Mà $\frac{10}{\pi} > 3$. Nên theo nguyên lý Dirichlet đối ngẫu suy ra có một điểm M nào đó thuộc AB là điểm trong chung của ít nhất 4 đoạn thẳng đã chiếu xuống.

Khi đó, đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt ít nhất 4 trong những đường tròn đó. Đpcm.

Bài toán 4:

Cho một hình vuông và 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích 2 : 3. Chứng minh rằng trong số 13 đường thẳng đã cho, có ít nhất 4 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

Giải:



Hình 4

Gọi d là đường thẳng chia hình vuông ABCD thành hai tứ giác có tỉ số diện tích

là 2 : 3.

Đường thẳng d không thể cắt hai cạnh kề nhau của hình vuông

Giả sử d cắt hai cạnh AB và CD tại M và N, khi đó nó cắt đường trung bình

EF tại I Giả sử $S_{AMND} = \frac{2}{3} S_{BMNC}$ thì $EI = \frac{2}{3} IF$

Như vậy mỗi đường thẳng đã cho chia các đường trung bình của hình vuông theo tỉ số 2 : 3

Có 4 điểm chia các đường trung bình của hình vuông ABCD theo tỉ số 2 : 3

Có 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua một trong 4 điểm

Vậy theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 4 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm.

Bài toán 5 .

Chứng minh rằng một đường thẳng chỉ có thể nhiều lắm hai cạnh của một tam giác ở phần trong của các cạnh này.

Giải:

Một đường thẳng d bất kì luôn chia mặt phẳng ra làm hai miền, cho nên theo nguyên tắc Dirichlet, tồn tại một miền chứa ít nhất hai đỉnh, không mất tổng quát ta giả sử đó là hai đỉnh A và B. Khi đó cạnh AB nằm hoàn toàn trong nửa mặt phẳng này và không thể cắt d được.

Bài toán 6.

Trong một cái bát hình vuông cạnh 18 cm có 128 hạt vừng. Chứng minh rằng tồn tại hai hạt vừng có khoảng cách tới nhau nhỏ hơn 2 cm.

Giải:

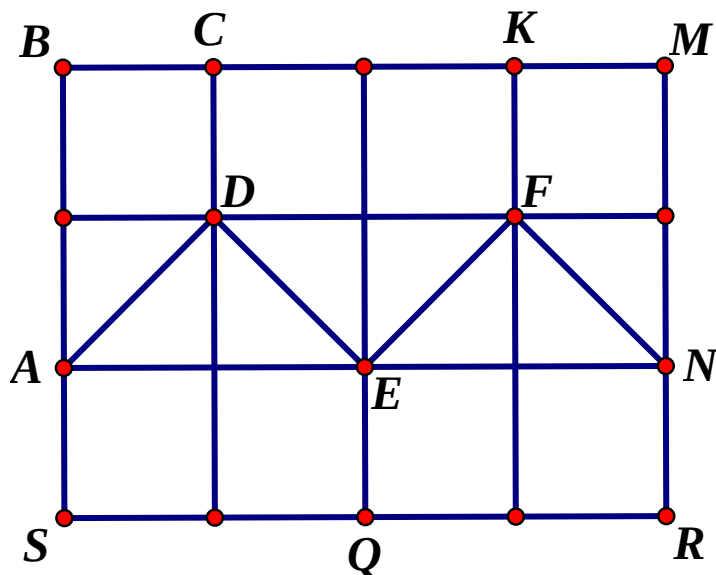
Lấy mỗi hạt vừng làm tâm dựng hình tròn bán kính 1 cm . Các hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông có cạnh 20cm thu được từ hình vuông đã cho bằng cách tịnh tiến bốn cạnh của nó một khoảng 1cm ra phía ngoài.

Tổng diện tích của các hình tròn bán kính 1cm này là $128\pi > 402,112 > 400$. Do đó tổng diện tích các hình tròn này lớn hơn diện tích hình vuông cạnh 20 cm.

Bài toán 7:

Trong hình chữ nhật 3x4 đặt 6 điểm. Chứng minh rằng trong số đó luôn tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng không lớn hơn .

Giải:



Hình 7

Chia hình chữ nhật đã cho thành năm hình ABCD, DCKEF, KFNM, NFEQR, QEDAS.

Vì có 6 điểm nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong năm hình trên, mà hình này chứa ít nhất hai trong 6 điểm đã cho.

Ta đưa vào khái niệm sau:

Giả sử P là một hình .

Đặt $d(P) = \max_{M, N \in P} \{MN\}$, và đại lượng $d(P)$ gọi là đường kính của hình P. Dễ

thấy cả năm hình trên đều có đường kính bằng $\sqrt{5}$.

(Thí dụ: $d(ABCD) = AC = \sqrt{5}$, $d(DCKFE) = CE = KE = CF = DK = \sqrt{5}$)

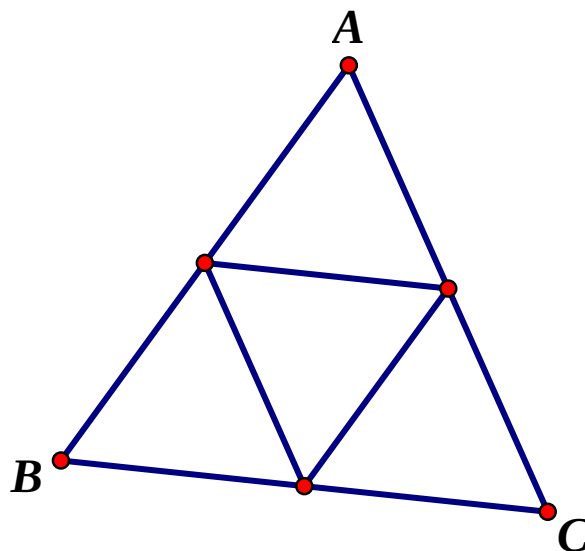
Từ đó suy ra luôn tìm được 2 điểm trong số 6 điểm đã cho có khoảng cách không lớn hơn $\sqrt{5}$. Đó là điều phải chứng minh.

Từ đó ta có các bài toán tương tự như sau:

Bài toán 7.1:

Bên trong tam giác đều ABC cạnh 1 đặt 5 điểm. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 0,5

Giải:



Hình 7.1

Các đường trung bình của tam giác đều cạnh 1 sẽ chia nó ra làm 4 tam giác đều cạnh 0,5.

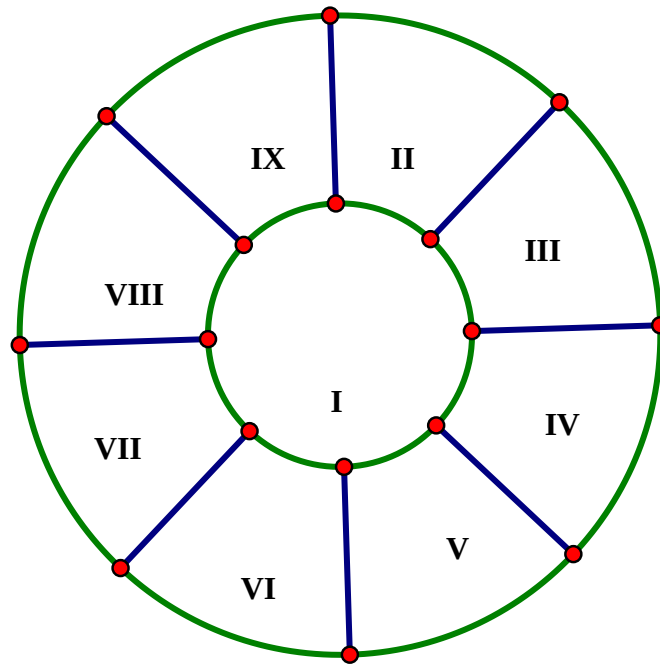
Do đó trong một tam giác nhỏ đó có ít nhất 2 điểm đã cho, và các điểm đó không thể rơi vào các đỉnh của tam giác ABC. Vậy khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn 0,5.

Bài toán 7.2

Trong hình tròn đường kính bằng 5 có 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bé hơn hoặc bằng 2.

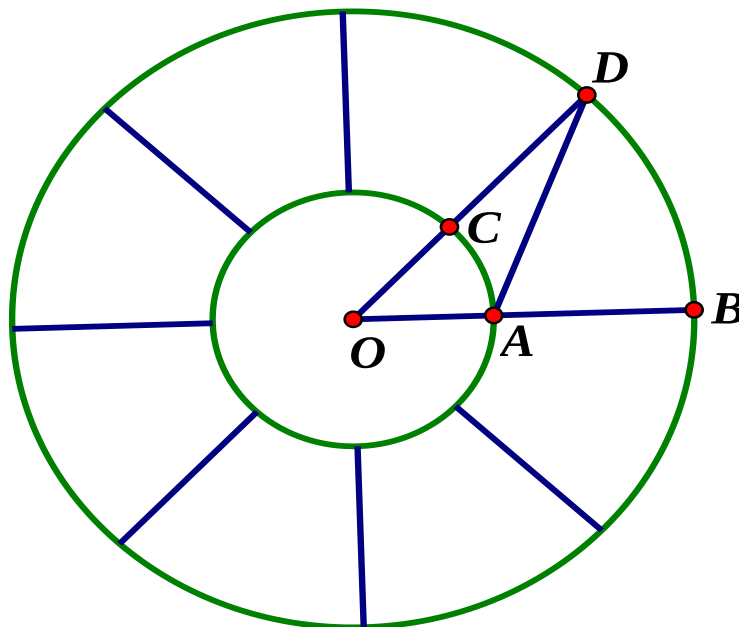
Giải:

Thật vậy, trong đường tròn tâm O đường kính 5, vẽ đường tròn đồng tâm và đường kính 2. Chia hình tròn đã cho thành 9 phần (xem hình 7.2) đường tròn đường kính 2 và 8 phần bằng nhau II, III, ..., IX mà mỗi phần là $\frac{1}{8}$ hình vành khăn. Rõ ràng I có đường kính bằng 2.



Hình 7.2

Xét chẳng hạn hình III ABCD (có là 1/8 hình vành khăn). Ta hãy tính đường kính của nó. Có thể thấy ngay đường kính của III là $d = AD = BC$.



Hình 7.3

Vì $\angle DOA = 45^\circ$, nên

$$d^2 = DA^2 = DO^2 + AO^2 - 2DO.OA.\cos 45^\circ$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{24}{4} + 1 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } d^2 < \frac{29}{4} - \frac{5}{2} \cdot 1,4 \text{ (do } \sqrt{2} = 1,4142\dots) \Rightarrow d < 2.$$

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai điểm rơi vào một trong các miền I, II, III, ..., IX có đường kính bằng 2, còn các miền II, ..., IX có đường kính bằng nhau và bằng d ($d > 2$), từ đó suy ra tồn tại hai trong số 10 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng 2. Đó là đpcm.

Bài toán 8 :

Trên mặt phẳng cho 25 điểm. Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Giải:

Lấy A là một trong số 25 điểm đã cho. Xét hình tròn $O_1(A, 1)$ tâm A bán kính 1.

Chỉ có hai khả năng sau có thể xảy ra:

- 1) Nếu tất cả các điểm đã cho nằm trong $O_1(A, 1)$ thì kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.
- 2) Tồn tại điểm $B \neq A$ (B thuộc trong số 25 điểm đã cho), sao cho $B \notin O_1(A, 1)$, vì $B \notin O_1(A, 1)$, nên $AB > 1$.

Xét hình tròn $O_2(B, 1)$ tâm B, bán kính 1. Lấy C là điểm bất kì trong số 25 điểm đã cho sao cho $C \neq A, C \neq B$. Theo giả thiết (và dựa vào $AB > 1$), ta có $\min\{CA, CB\} < 1$.

Vì thế $C \in O_1(A, 1)$, hoặc $C \in O_2(B, 1)$.

Điều này chứng tỏ rằng các hình tròn $O_1(A,1)$, $O_2(B,1)$ chứa tất cả 25 điểm đã cho. Vì thế theo nguyên lý Dirichlet, ít nhất 1 trong hai hình tròn trên chứa 13 điểm đã cho. Đó là đpcm.

Tổng quát bài toán :

Cho $2n+1$ điểm trên mặt phẳng (với $n \geq 3$). Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Khi đó tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn $n+1$ điểm đã cho.

Bài toán 9:

Tìm hình vuông có kích thước bé nhất, để trong hình vuông đó có thể sắp xếp năm hình tròn bán kính 1, sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm chung.

Giải:

Giả sử hình vuông ABCD có tâm O và cạnh a, chứa năm hình tròn không cắt nhau và đều có bán kính bằng 1. Vì cả năm hình tròn này đều nằm trọn trong hình vuông, nên các tâm của chúng nằm trong hình vuông $A'B'C'D'$ có tâm O và cạnh $a-2$, ở đây $A'B' \parallel AB$.

Các đường thẳng nối các trung điểm của các cạnh đối diện của hình vuông $A'B'C'D'$ chia $A'B'C'D'$ thành 4 hình vuông nhỏ. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một trong 4 hình vuông nhỏ mà trong hình vuông này chứa ít nhất hai trong số 5 tâm hình tròn nói trên (không mất tính tổng quát ta giả sử là O' và O'').

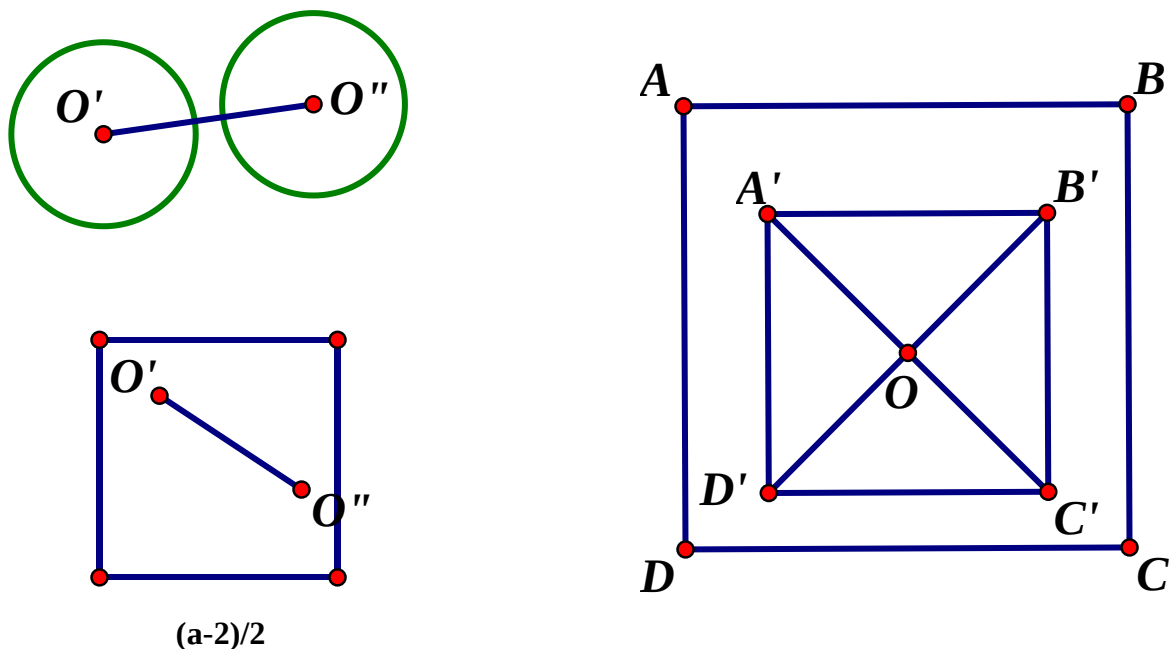
Để ý rằng vì không có hai hình tròn nào (trong số năm hình tròn) cắt nhau, nên $O'O'' \geq 2$. (1)

Mặt khác do O' , O'' cùng nằm trong một hình vuông nhỏ (cạnh của hình vuông nhỏ đó bằng $\frac{a-2}{2}$) nên ta lại có $O'O'' \leq \frac{a-2}{2} \cdot \sqrt{2}$.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{a-2}{2} \cdot \sqrt{2} \geq 2 \Rightarrow a \geq 2\sqrt{2} + 2. \quad (3)$$



Hình 9

Vậy mọi hình vuông cạnh a thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta đều có (3).

Bây giờ xét hình vuông $ABCD$ có $a = 2\sqrt{2} + 2$. Xét năm hình tròn có tâm là O, A', B', C', D' (xem hình 9), thì mọi yêu cầu của đề bài thỏa mãn. Tóm lại, hình vuông có kích thước bé nhất cần tìm là hình vuông với cạnh $2\sqrt{2} + 2$.

Bài toán 10:

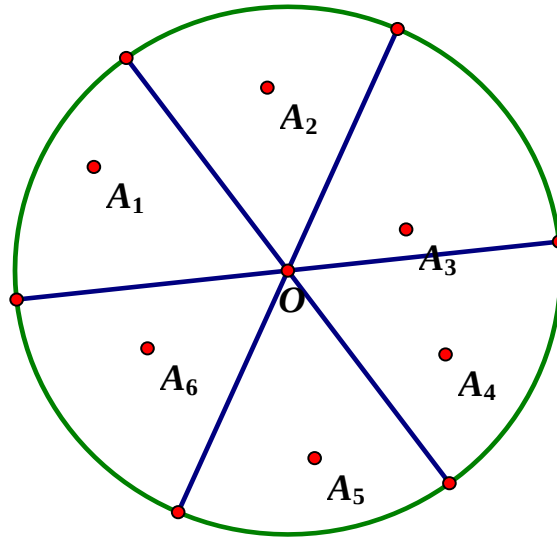
Chứng minh rằng trong một hình tròn bán kính 1, không thể chọn được quá 5 điểm mà khoảng cách giữa hai điểm tùy ý trong chúng đều lớn hơn 1.

Giải:

Chia hình tròn thành 6 hình quạt bằng nhau (tâm các hình quạt đều tại tâm O đã cho).

Ta biết rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong một hình quạt nhỏ hơn hoặc bằng 1, vì thế từ giả thiết suy ra tại mỗi hình quạt có không quá 1 điểm rơi vào. Giả thiết phản chứng chọn được quá năm điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vì lí do trên nên số điểm không thể quá 7 (vì nếu số điểm chọn được mà lớn hơn

hoặc bằng 7 thì theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai điểm được chọn nằm trong một cung hình quạt. mà điều này mâu thuẫn với nhận xét trên.).



Hình 10

Vậy từ giả thiết phản chứng suy ra tồn tại sáu điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ và mỗi điểm nằm trong một hình quạt sao cho khoảng cách giữa hai điểm tùy ý trong chúng đều lớn hơn 1.

Do $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + \angle A_4OA_5 + \angle A_5OA_6 + \angle A_6OA_1 = 360^\circ$.

Khi đó suy ra: $\min_{i=1,6} \angle A_iOA_{i+1} \leq \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (ở đây đặt $A_7 \equiv A_1$).

Xét tam giác A_kOA_{k+1} (với $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_7 \equiv A_1$) và $\min_{i=1,6} \angle A_iOA_{i+1} = \angle A_kOA_{k+1}$

khi đó: $\angle A_kOA_{k+1} \leq 60^\circ$.

Vì $OA_k \leq 1, OA_{k+1} \leq 1, \angle A_kOA_{k+1} \leq 60^\circ$ nên từ đó suy ra:

$$A_kA_{k+1} \leq \max\{A_kA_{k+1}O, OA_kA_{k+1}\}.$$

Từ đó thao mỗi liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác A_kOA_{k+1} , thì

$$A_kA_{k+1} \leq \max\{OA_k, OA_{k+1}\} \leq 1.$$

Điều này mâu thuẫn với $A_k A_{k+1} > 1$ (vì hệ sáu điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài). Từ đó ta thấy giả thiết phản chứng là sai. Điều đó có nghĩa là không thể chọn quá 5 điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài. Đpcm.

Bài toán 11:

Cho hình tròn có bán kính n , ở đây n là số nguyên dương. Trong hình tròn có $4n$ đoạn thẳng đều có độ dài bằng 1. Cho trước một đường thẳng d . Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng d' hoặc song song với d , hoặc là vuông góc với d sao cho d' cắt ít nhất hai đoạn thẳng đã cho.

Giải:

Giả sử AB là đoạn thẳng có độ dài bằng 1, a và a' là hai đường thẳng bất kì vuông góc với nhau. Gọi $A'B'$ và $A''B''$ là các hình chiếu của AB lên a và a' . Khi đó ta có:

$$A'B' + A''B'' \geq AB \text{ hay } A'B' + A''B'' \geq 1.$$

Áp dụng vào bài toán ta gọi d'' là đường thẳng bất kì vuông góc với d . Chiếu vuông góc tất cả $4n$ đoạn thẳng lên d và d'' . từ (1) suy ra tổng độ dài hình chiếu của tất cả $4n$ đoạn thẳng không bé hơn $4n$.

Vì vậy, theo nguyên lí Dirichlet trong hai đường thẳng d và d'' có ít nhất một đường thẳng mà tổng độ dài của hình chiếu các đoạn thẳng lên nó không bé hơn $2n$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là d .

Mặt khác, mỗi đoạn thẳng đều nằm trọn trong hình tròn bán kính n (đường kính $2n$), nên hợp các hình chiếu của chúng trên d có độ dài không vượt quá $2n$.

Vì vậy, theo nguyên lí Dirichlet trên d tồn tại ít nhất một điểm M thuộc vào hình chiếu của ít nhất hai đoạn thẳng trong số $4n$ đoạn thẳng đã cho. Gọi d' là đường thẳng vuông góc với d tại M . Đường thẳng d' chính là đường thẳng cần tìm.

Chú ý: Nếu ở trên thay d bởi d'' thì đường thẳng phải tìm sẽ có dạng song song với d (vì nó vuông góc với d'').

Bài toán 12

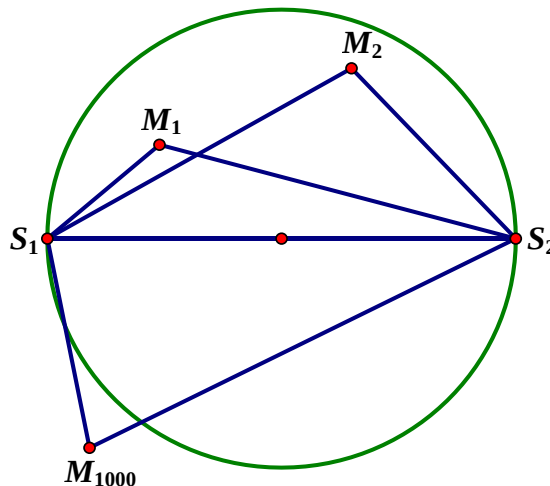
Cho 1000 điểm $M_1, M_2, \dots, M_{1000}$ trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho

$$SM_1 + SM_2 + \dots + SM_{1000} \geq 1000.$$

Giải

Xét một đường kính S_1S_2 tùy ý của đường tròn, ở đây S_1, S_2 là hai đầu của đường kính. Vì $S_1S_2=2$, nên ta có;

$$\begin{cases} S_1M_1 + S_2M_1 \geq S_1S_2 = 2 \\ S_1M_2 + S_2M_2 \geq 2 \\ \dots \\ S_1M_{1000} + S_2M_{1000} \geq 2 \end{cases}$$



Hình 12

Cộng từng vế của 1000 bất đẳng thức trên ta có:

$$((S_1M_1 + S_1M_2 + \dots + S_1M_{1000}) + (S_2M_1 + S_2M_2 + \dots + S_2M_{1000})) \geq 2000 \quad (1)$$

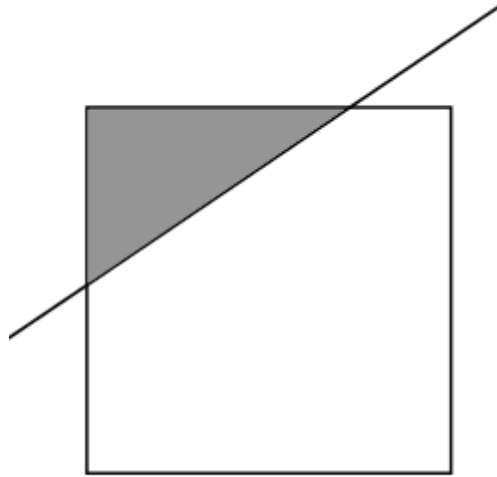
Từ (1) và theo nguyên lí Dirichlet suy ra trong hai tổng của vế trái của (1), có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000.

Giả sử $S_1M_1 + S_1M_2 + \dots + S_1M_{1000} \geq 1000$. khi đó lấy $S=S_1$. Đó là đpcm.

Bài toán 13:

Cho chín đường tròn cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Giải:

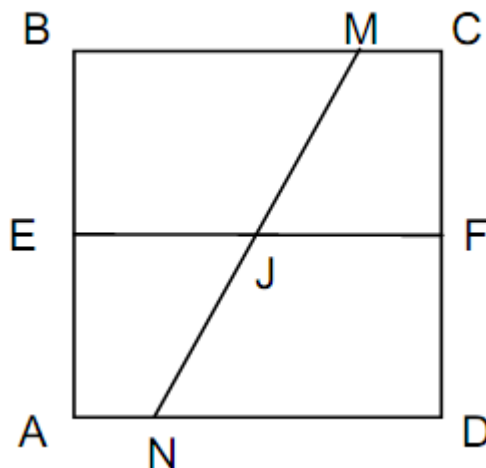


Hình 13.1

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải là chia hình vuông thành hai tứ giác).

Vì lẽ đó, mọi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và dĩ nhiên không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N.



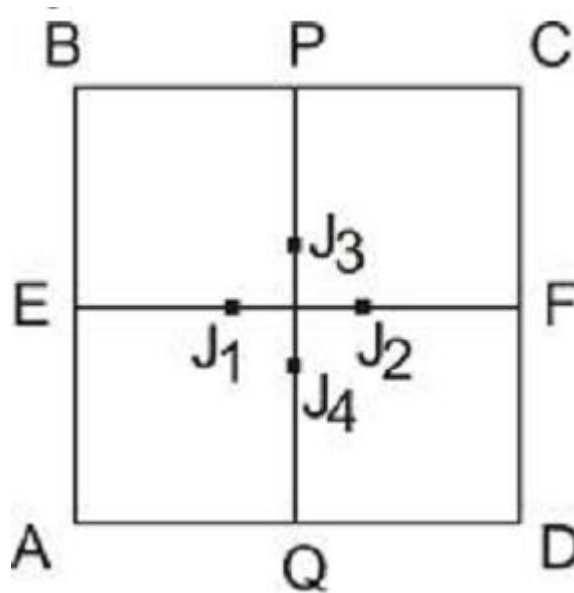
Hình 13.2

$$\text{Ta có: } \frac{S_{ABMN}}{S_{MCDN}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot (BM + AN)}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (MC + ND)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{2}{3}.$$

(ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng).

Gọi E, F, P, Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD. Gọi J_1, J_2, J_3, J_4 là các điểm sao cho J_1, J_2 nằm trên EF, J_3, J_4 nằm trên PQ và thỏa mãn :

$$\frac{EJ_1}{J_1F} = \frac{FJ_2}{J_2F} = \frac{PJ_3}{J_3Q} = \frac{QJ_4}{J_4P} = \frac{2}{3}.$$



Hình 13.3

Khi đó từ đó lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thỏa mãn yêu cầu của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 nói trên. Vì có chín đường thẳng, nên theo nguyên lí dirichlet phải tồn tại ít nhất một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 sao cho nó có ít nhất ba trong 9 đường thẳng đã cho đi qua.

Vậy có ít nhất 3 đường thẳng trong 9 đường thẳng đã cho đi qua một điểm. ☺

Bài toán 14:

Cho một bảng có kích thước $2n \times 2n$ ô vuông. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

Giải :

Chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất.

Ta chứng minh rằng các ô được đánh dấu còn nhỏ hơn hoặc bằng n . Giả sử

	×		×	×	
		×		×	
	×				×
		×			
			×		

Hình 14

ngược lại không phải như vậy, tức là số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $n + 1$. Số các hàng còn lại chưa chọn là n . Vậy theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (tổng số n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đã đánh dấu.

Chú ý rằng theo cách chọn thì n hàng đã chọn có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong số n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn có không ít hơn $2n$ ô đã được đánh dấu. Như vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n + (n + 1) \geq 3n$. Vô lý vì chỉ có $3n$ ô được đánh dấu. Vậy nhận xét được chứng minh.

Như vậy, sau khi đã chọn ra n hàng (với cách chọn như trên), theo nhận xét còn lại có không quá n ô được đánh dấu. Vì thế cùng lắm là có n cột chứa chúng. Vì lẽ đó sẽ không thấy còn ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn.

Bài toán 15:

Trong mặt phẳng cho tập hợp A có n điểm ($n \geq 2$). Một số cặp điểm được nối với nhau bằng đoạn thẳng. Chứng minh rằng tập hợp A đã cho, có ít nhất hai điểm được nối với cùng số lượng các điểm khác thuộc A .

Giải:

Giả sử $a \in A$. Ta kí hiệu $S(a)$ là số lượng các điểm của A nối với a mà $S(a) = 2, S(b) = 3, S(c) = 1, S(d) = 2, S(e) = 2$.

Bài toán đã cho trở thành: Chứng minh rằng tồn tại $a_1, a_2 \in A (a_1 \neq a_2)$, mà

$$S(a_1) = S(a_2). \text{ Rõ ràng với mọi } a \in A, \text{ ta có: } 0 \leq S(a) \leq n-1. \quad (1)$$

Mặt khác, dễ thấy không tồn tại hai điểm

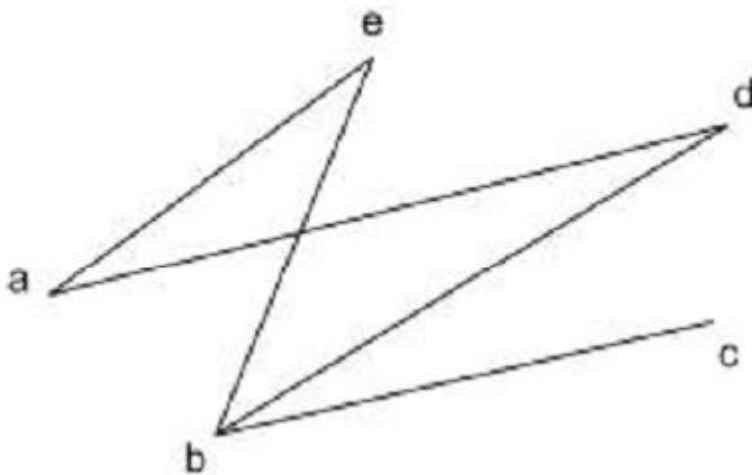
$$\bar{a} \in A, \bar{b} \in A \text{ mà } S(\bar{a}) = n-1 \text{ và } S(\bar{b}) = 0 \quad (2)$$

Thật vậy: nếu có (2), thì từ $S(\bar{a}) = n-1$, ta suy ra $\bar{a}$ nối với tất cả $n-1$ điểm còn lại, tức là $\bar{a}$ cũng nối với $\bar{b}$. Điều đó có nghĩa là $S(\bar{b}) \geq 1$, vẫ dẫn đến mâu thuẫn với $S(\bar{b}) = 0$

Gọi S là tập hợp các giá trị mà các đại lượng $S(\bar{a})$ nhận, $a \in A$, tức là:

$$S = \{m / m = S(a), a \in A\}.$$

Như vậy từ (1) suy ra tập hợp S có tối đa n giá trị. Tuy nhiên từ (2) suy ra $(n-1)$ và 0 không đồng thời thuộc S , vì thế tập S tối đa nhận $(n-1)$ giá trị. Theo nguyên lí Dirichlet suy ra tồn tại ít nhất $a_1 \in A, a_2 \in A (a_1 \neq a_2)$, mà $S(a_1) = S(a_2)$.



Hình 15

Bài toán 16: Chứng minh rằng trong mọi đa giác lồi với số cạnh chẵn, tồn tại đường chéo không song song với một cạnh nào của đa giác.

Giải:

Ta giả thiết rằng nếu một đa giác có n cạnh, thì có $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Xét một đa giác lồi bất kì với số cạnh là chẵn (đa giác lồi $2k$ cạnh $k \geq 2$).

Khi đó số đường chéo của nó là $s = \frac{2k(2k-3)}{2}$.

Ta có: $s = k(2k-3) = 2k(k-2) + k$, hay suy ra :

$$s > 2k(k-2). \quad (1)$$

Giả sử ngược lại đa giác này có tính chất: mỗi đường chéo của nó đều song song với một cạnh nào đó của đa giác. Đa giác này có $2k$ cạnh, vì thế từ (1) suy ra tồn tại ít nhất $(k-1)$ đường chéo $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}$ mà các đường chéo này cùng song song với một cạnh a nào đó của tam giác đã cho (thật vậy, nếu ngược lại mỗi cạnh tối đa là song song $k-2$ đường chéo thì tối đa ta chỉ có $2k(k-2)$ đường chéo và $s \leq 2k(k-2)$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Như thế ta có k đường thẳng song song với nhau $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}, a$.

Mặt khác đa giác đã cho là đa giác lồi nên các đường chéo $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xác định cạnh a .

Không mất tính tổng quát có thể cho d_1 là đường chéo xa nhất đối với a . Ta có tất cả k đoạn thẳng phân biệt, nên mỗi đỉnh của đa giác đều là đầu mút của một đoạn nào đó trong k đoạn trên. Từ đó suy ra toàn bộ đa giác nằm hẳn về một nửa mặt phẳng xác định bởi d_1 . Do d_1 là đường chéo, nên điều này mâu thuẫn với tính lồi của đa giác.

Vậy giả thiết phản chứng là sai.

Bài toán 17:

Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11 000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính 1 chứa ít nhất 6 điểm trong số 11 000 điểm đã cho.

Giải:

Chia mỗi cạnh của hình lập phương thành 13 phần bằng nhau. Như thế hình lập phương đã cho được chia thành $13^3 = 2197$ hình lập phương nhỏ. Do $11\,000 > 5 \cdot 2197 - 10\,985$, nên tồn tại ít nhất 1 hình lập phương nhỏ, mà hình lập phương này chứa ít nhất 6 điểm. Như đã biết, nếu gọi cạnh hình lập phương bằng a , thì hình cầu ngoại tiếp

có bán kính R , với $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Vì thể hình cầu ngoại tiếp hình lập phương nhỏ (cạnh của nó là $\frac{15}{13}$) là

$$R = \frac{1}{2} \frac{15}{13} \sqrt{3} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \left(\frac{15}{13} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{675}{169}} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1.$$

Hình cầu bán kính R này dĩ nhiên chứa ít nhất 6 điểm trong số 11 000 điểm đã cho.

1.3.2. Bài toán về tô màu hình vẽ

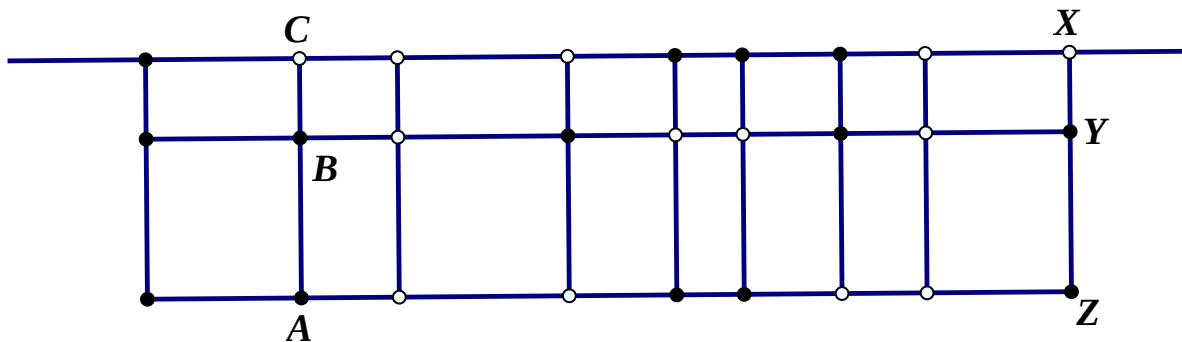
Bài toán 18:

Giả sử mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong 2 màu đen và trắng.

Chứng minh tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Giải :

Giả sử ta có một lưới ô vuông tạo bởi 3 đường nằm ngang và 9 đường thẳng đứng , mỗi nút lưới được tô bởi một màu trắng hoặc đen.



Hình 18

Xét 3 nút lưới của một đường dọc , mỗi nút có hai cách tô màu nên mỗi bộ ba nút trên đường dọc ấy có $2.2.2 = 8$ cách tô màu. Có 9 đường dọc, mỗi đường có 8 cách tô màu nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai đường có cách tô màu như nhau. Chẳng hạn hai bộ ba điểm đó là A, B, C và X, Y, Z

Vì 3 điểm A, B, C chỉ được tô bởi hai màu nên tồn tại hai điểm cùng màu , chẳng hạn B và C khi đó hình chữ nhật BYZC có 4 đỉnh cùng một màu.

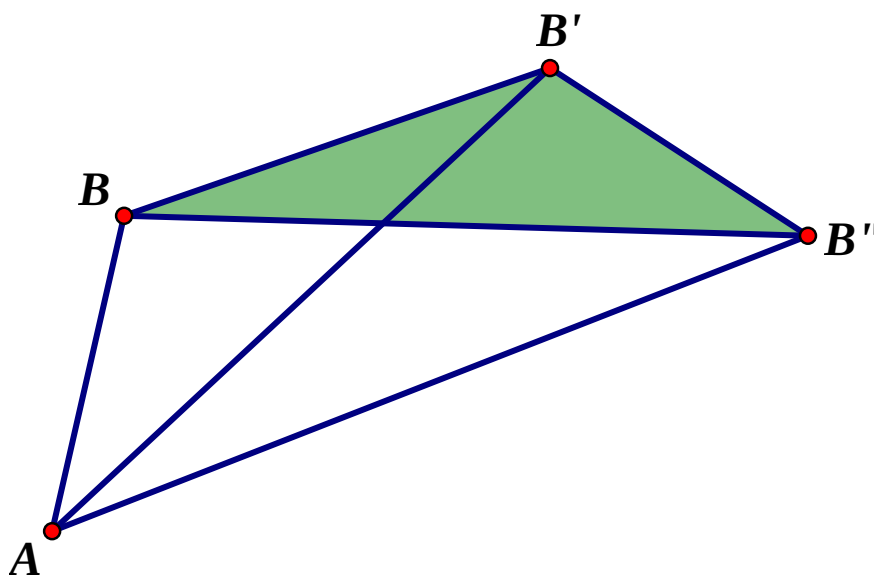
Bài toán 19:

Trong mặt phẳng cho 6 điểm. trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp điểm được bôi màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong số sáu điểm đã cho, sao cho chúng là các đỉnh của một tam giác mà các cạnh của nó được bôi cùng một màu.

Giải:

Xét A là một trong số 6 điểm đã cho. Khi đó xét năm đoạn thẳng(mỗi đoạn thẳng nối điểm A với năm điểm còn lại).

Vì mỗi đoạn thẳng được bôi chỉ màu đỏ hoặc màu xanh, nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất ba trong năm đoạn nói trên cùng màu. Giả sử đó là các đoạn AB, AB' và AB'' và có thể cho rằng chúng cùng màu xanh. Chỉ có hai khả năng xảy ra:



Hình 19

- 1) Nếu ít nhất một trong ba đoạn BB', B'B'', B''B màu xanh, thì tồn tại một tam giác với ba cạnh xanh và kết luận của bài toán đúng trong trường hợp này.
- 2) Nếu không phải như vậy, tức là BB', B'B'', B''B màu đỏ, thì ba điểm phải tìm là B, B', B'' vì BB'B'' là tam giác có ba cạnh màu đỏ. Đpcm.

Từ đó ta có các bài toán tương tự sau:

Bài toán 19.1:

Trên mặt phẳng cho 18 điểm, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối từng cặp điểm với nhau và tô màu cho mọi đoạn thẳng thu được một trong hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng:

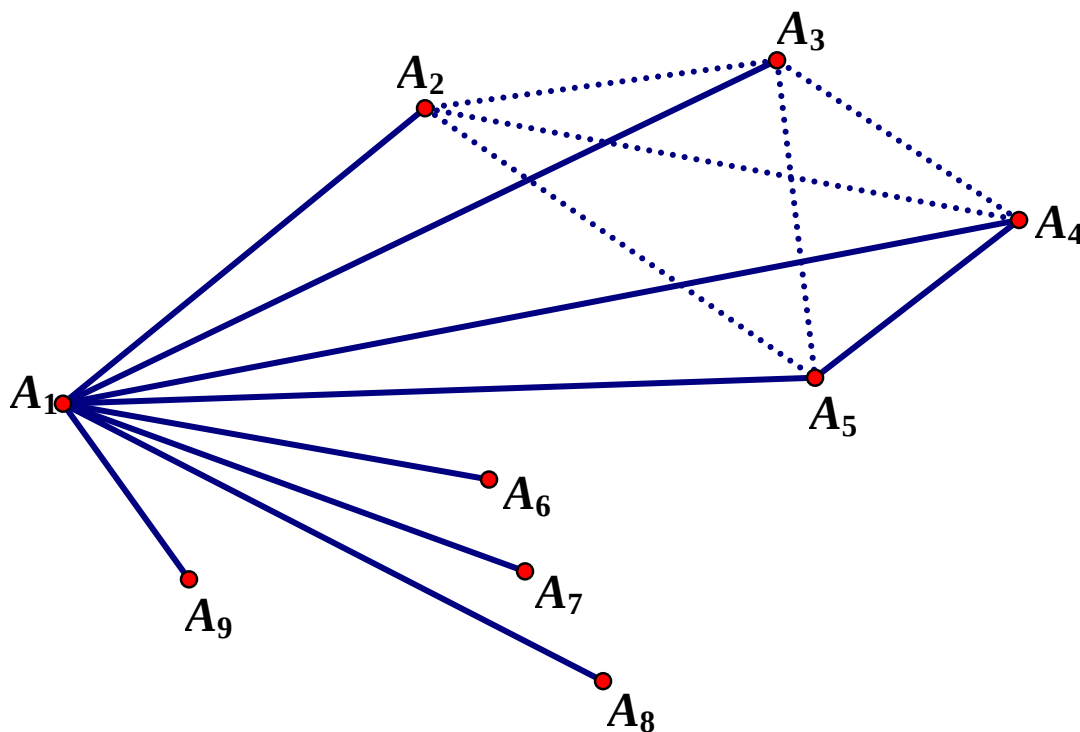
Luôn tìm được một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong tập điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo của nó cùng màu.

Giải:

Giả sử $A_i (i = \overline{1,18})$ là 18 điểm đã cho. Xuất phát từ A_1 có 17 đoạn thẳng

$A_1 A_i (i = \overline{2,18})$. Mười bảy đoạn thẳng đó chỉ có hai màu xanh hoặc đỏ, nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất chín đoạn thẳng cùng màu. Không giảm tính tổng quát giả sử đó là các đoạn thẳng $A_1 A_2, A_1 A_3, \dots, A_1 A_{10}$, và chúng cùng màu đỏ.

Xét chín điểm $A_2, A_3, \dots, A_{10}$ chỉ có thể xảy ra hai trường hợp sau:



Hình 19.1

1) Hoặc là tồn tại điểm $A_j (2 \leq j \leq 10)$ sao cho trong tám đoạn thẳng

$A_j A_k (2 \leq k \leq 10, k \neq j)$ có ít nhất bốn đoạn màu đỏ. Không mất tính tổng quát có thể cho là $A_2 A_3, A_2 A_4, A_2 A_5, A_2 A_6$ màu đỏ. Đến đây lại chỉ còn hai khả năng :

- Hoặc là mọi đoạn thẳng $A_3A_4, A_3A_5, A_3A_6, A_4A_5, A_4A_6, A_5A_6$, đều màu xanh. Khi đó $A_3A_4A_5A_6$ là tứ giác xanh thỏa mãn yêu cầu.

- Tồn tại một đoạn thẳng $A_i, A_j (3 \leq i < j \leq 6)$ màu đỏ. Khi đó $A_1A_2A_iA_j (3 \leq i < j \leq 6)$ là tứ giác đỏ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Hoặc là với mọi điểm $A_j (2 \leq j \leq 10)$, thì trong tám đoạn thẳng

$A_jA_k (2 \leq k \leq 10, k \neq j)$ có tối đa ba đoạn màu đỏ mà thôi. Khi đó phải tồn tại một điểm (chẳng hạn A_2) mà trong các đoạn $A_2A_k (3 \leq k \leq 10, k \neq j)$ có tối đa hai đoạn màu đỏ thôi (thật vậy, nếu với mọi $A_j (2 \leq j \leq 10)$ mà có đúng ba đoạn $A_jA_k (2 \leq k \leq 10, k \neq j)$ màu đỏ, thì số đoạn thẳng màu đỏ nội trong nội

bộ 9 điểm đó là $\frac{9.3}{2}$ là số nguyên. Vô lí. Vì $A_2A_k (3 \leq k \leq 10, k \neq j)$ có tối đa

hai đoạn màu đỏ mà thôi, nên trong số các đoạn $A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, \dots, A_2A_{10}$ có ít nhất sáu đoạn màu xanh. Không mất tính tổng quát ta cho

$A_2A_5, A_2A_6, \dots, A_2A_{10}$ màu xanh.

Xét sáu điểm $A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$. Đó là sáu điểm mà trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, và mỗi đoạn thẳng nối hai điểm chỉ có hai màu xanh hoặc đỏ. Theo bài 19 thì luôn luôn tồn tại ít nhất một tam giác mà ba đỉnh chọn trong $\{A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$ sao cho ba cạnh cùng màu.

Lại có hai khả năng:

- a) Giả sử tồn tại tam giác $A_i, A_j, A_k (5 \leq i < j < k \leq 10)$ màu xanh. Khi đó tứ giác $A_2A_iA_jA_k (5 \leq i < j < k \leq 10)$ là tứ giác xanh thỏa mãn yêu cầu đề bài.
- b) Nếu tồn tại tam giác $A_i, A_j, A_k (5 \leq i < j < k \leq 10)$ màu đỏ, thì $A_1A_2A_iA_k$ là tứ giác cần tìm.

Như vậy ta luôn chứng minh được tồn tại một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong tám điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo cùng màu.

• **Ta có bài toán phức tạp hơn:**

Bài toán 19.2:

Cho sáu điểm trên mặt phẳng, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Các đoạn thẳng nối từng cặp điểm được tô màu đỏ hoặc màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác (mà các đỉnh của chúng thuộc tập hợp sáu điểm đã cho) mà các cạnh của chúng cùng màu.

Giải:

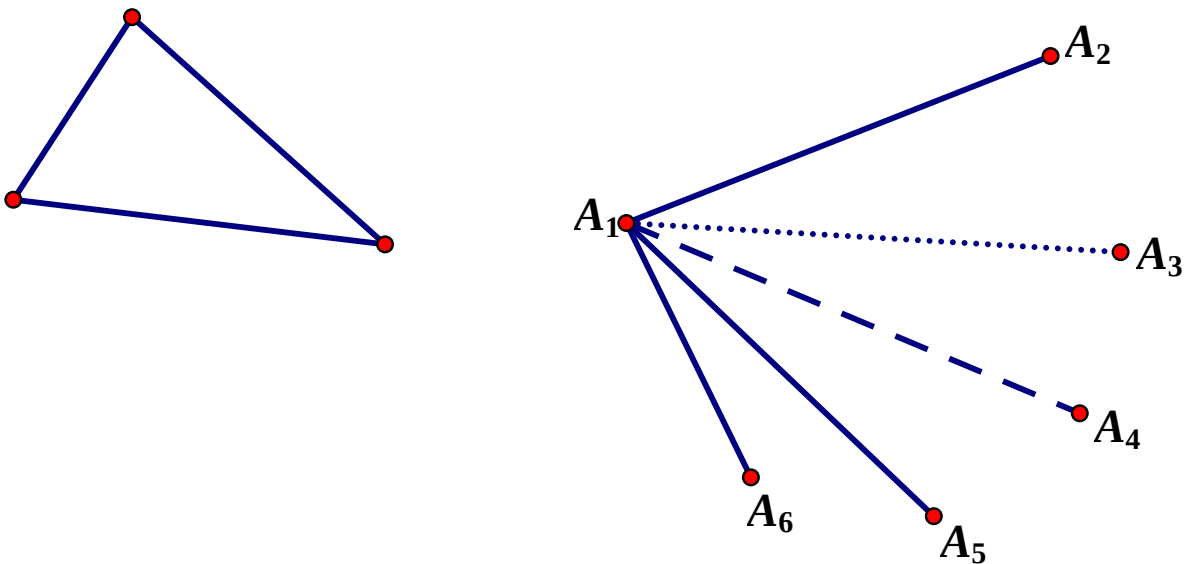
(Để ý rằng trong bài toán trên chỉ đòi hỏi : chứng minh rằng có ít nhất một tam giác cùng màu).

Số tất cả các tam giác tạo thành từ sáu điểm đã cho là:

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20 \text{ tam giác.}$$

Gọi x là số các tam giác mà ba cạnh cùng màu, khi đó số các tam giác mà ba cạnh không cùng màu sẽ là: $20 - x$

Nếu hai đường cùng màu xuất phát từ một điểm thì ta có một góc đồng màu. Trong mỗi tam giác cùng màu ta có ba góc đồng màu, còn trong tam giác không cùng màu chỉ có đúng một góc đồng màu.



Hình 19.2

Vì thế số góc đồng màu là: $3x + (20 - x) = 20 + 2x$ góc. (1)

Xét tại điểm A_1 . Giả sử xuất phát từ A_1 có r đoạn thẳng màu đỏ và $5 - r$ đoạn thẳng màu xanh. Khi đó có thể thấy ngay tại điểm A_1 số góc đồng màu là $C_r^2 + C_{5-r}^2$.

(Ở đây ta quy ước sử dụng kí hiệu $C_n^k=0$ nếu $0 \leq n < k$)

Nếu $0 \leq r \leq 1 \Rightarrow C_r^2 = 0$ còn $5-r \geq 4 \Rightarrow C_{5-r}^2 \geq C_4^2 = 6$.

Nếu $0 \leq 5-r \leq 1 \Rightarrow C_{5-r}^2 = 0$ mà $r \geq 4 \Rightarrow C_r^2 \geq C_4^2 = 6$.

Xét khi $2 \leq r \leq 3 \Rightarrow C_r^2 + C_{5-r}^2 = 4$.

Tóm lại ta luôn chứng minh được $C_r^2 + C_{5-r}^2 \geq 4$.

Điều đó có nghĩa là tại mỗi điểm $A_i (i = \overline{1,6})$ số góc đồng màu có đỉnh tại A_i luôn lớn hơn hoặc bằng $6.4 = 24$. Kết hợp với (1) ta có: $20 + 2x \geq 24 \Rightarrow x \geq 2$.

Vậy luôn luôn tồn tại ít nhất hai tam giác cùng màu (đỉnh của các tam giác này thuộc vào tập sáu điểm đã cho).

Đpcm.

- Ta đưa ra một ví dụ minh học đẹp mắt cho bài toán như sau:

Bài toán 19.3:

Chứng minh rằng từ sáu số vô tỉ tùy ý có thể chọn ra được ba số (ta gọi ba số đó là a, b, c) sao cho $a + b, b + c, c + a$ cũng là số vô tỉ.

Giải:

Xét trên mặt phẳng sáu điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Với mỗi điểm ta sẽ gán cho nó một số vô tỉ. Như vậy sáu điểm được gán sáu số vô tỉ đã cho.

Hai điểm mang số a và b sẽ được nối với nhau bằng một đoạn thẳng màu đỏ nếu

$a + b$ là số vô tỉ, còn sẽ có màu xanh khi $a + b$ là số hữu tỉ.

Theo đề bài, tồn tại ít nhất một tam giác cùng màu. Giả sử tam giác đó có ba đỉnh được gán số là a, b, c . Chỉ có hai khả năng xảy ra:

- 1) Nếu tam giác đó là tam giác xanh. Khi ấy $a + b, b + c, a + c$ là 3 số hữu tỉ. Lúc này $(a + b) + (b + c) - (c + a) = 2b$ cũng là một số hữu tỉ. Điều này vô lí vì b là số vô tỉ.

- 2) Nếu tam giác đỏ là tam giác đỏ. Khi ấy $a + b, b + c, a + c$ là 3 số vô tỉ.

Đpcm.

Nhận xét: Bài toán bề ngoài có vẻ không liên quan gì tới hình học nhưng lại có thể quy về bài toán hình học với một lời giải đẹp mắt như vậy.

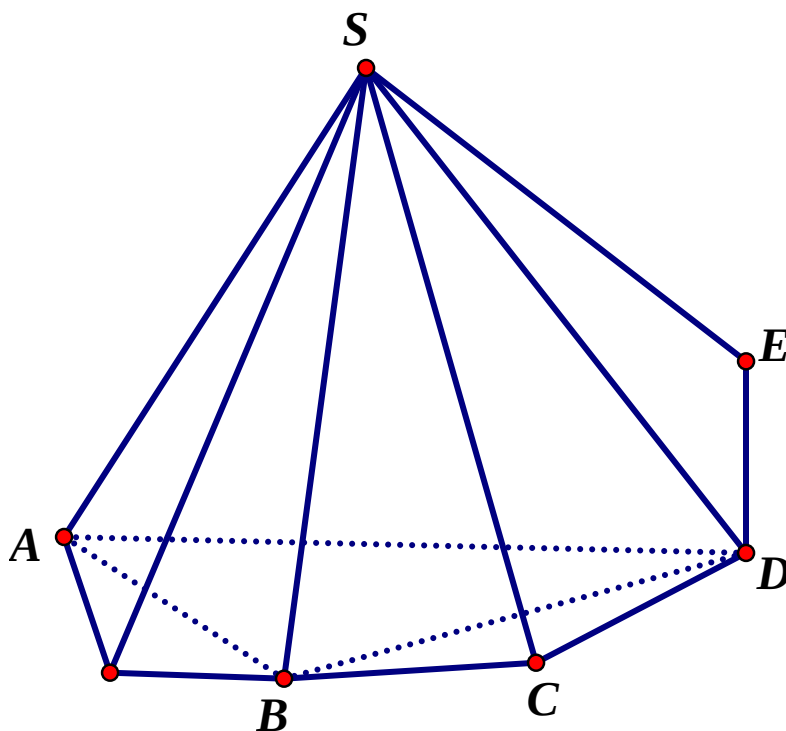
Bài toán 20:

Cho hình chóp đáy là đa giác chín cạnh. Tất cả 9 cạnh bên và 27 đường chéo của đa giác đáy được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng:

Tồn tại ba đỉnh của hình chóp sao cho chúng là những đỉnh của hình tam giác với các cạnh được bôi cùng màu.

Giải:

Xét 9 cạnh bên. Vì 9 cạnh này chỉ được bôi bằng hai màu xanh hoặc đỏ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 5 cạnh bên được bôi cùng một màu. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là các cạnh bên SA, SB, SC, SD, SE được bôi cùng màu đỏ, và các điểm A, B, C, D, E xếp theo chiều kim đồng hồ. Xét đa giác $ABCDE$.



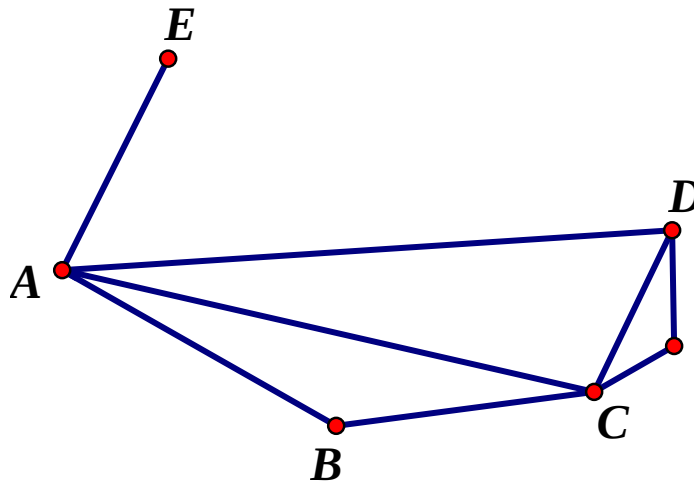
Hình 20.1

Có hai khả năng xảy ra:

- 1) Nếu AB là đường chéo của đáy. Khi đó dĩ nhiên BD, DA cũng là các đường chéo của đáy.

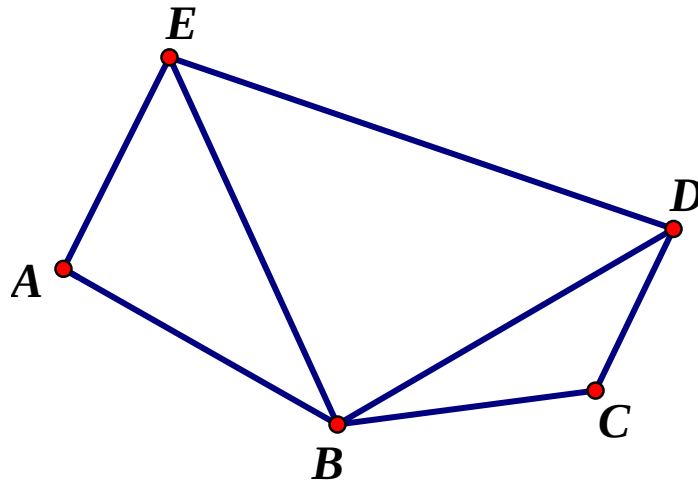
Lại có các trường hợp sau:

- a) Nếu cả ba đoạn AB, BD, DA cùng bôi màu xanh. Khi đó ABD là ba đỉnh cần tìm, vì ABD là tam giác với ba cạnh xanh.
- b) Nếu một trong các đoạn AB, BD, DA là đỏ. Giả sử BD đỏ, thì tam giác SBD là tam giác với ba cạnh đỏ. Lúc này S, B, D là ba đỉnh cần tìm.



Hình 20.2

- 2) Nếu AB là cạnh đáy. Khi đó dĩ nhiên AC, CE chắc chắn là đường chéo đáy.
- a) Nếu AE là đường chéo đáy thì ta quay lại trường hợp 1 vừa xét, với ACE là tam giác với ba cạnh là 3 đường chéo đáy.
- b) Nếu AE là cạnh đáy. Khi đó rõ ràng AC, AD là các đường chéo đáy.
- Nếu CD là đường chéo đáy, ta quay về trường hợp 1.
 - Nếu CD là cạnh bên. Lại xét các trường hợp sau:
- + Nếu BC là đường chéo đáy, thì tam giác BCE là tam giác với ba đường chéo đáy, quay về trường hợp 1.



Hình 20.3

+ Nếu BC là cạnh đáy. Khi đó xét tam giác BDE và quay về trường hợp 1.

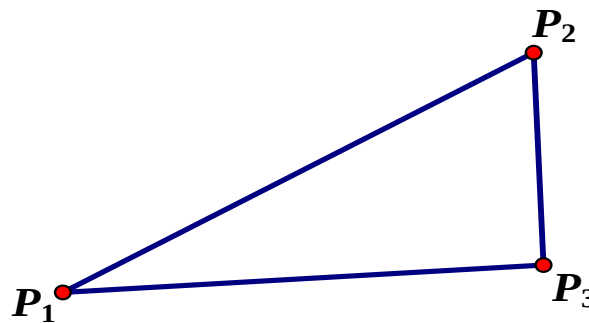
Tóm lại, bài toán đã giải quyết hoàn toàn.

Bài toán 21:

Cho $P_1, P_2, \dots, P_7$ là bảy điểm trong không gian, trong đó không có bốn điểm nào đồng phẳng. Tô màu mỗi đoạn với một trong hai màu đỏ hoặc đen. Chứng minh rằng: có hai tam giác đơn sắc không có chung cạnh.

Giải:

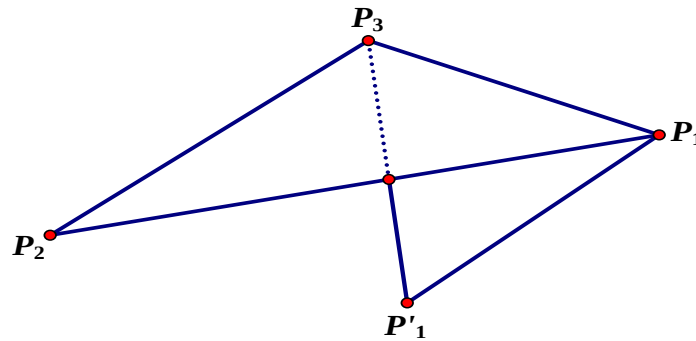
Dựa vào cách chứng minh của bài 1 suy ra có ít nhất một tam giác đơn sắc, chẳng hạn là tam giác $P_1P_2P_3$ là tam giác đỏ (tức là tam giác với ba cạnh đỏ).



Hình 21.1

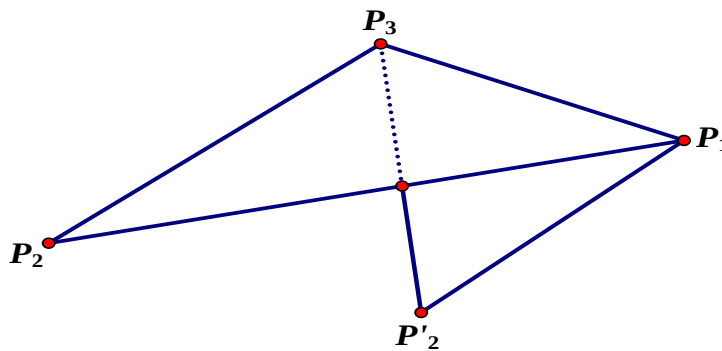
Bây giờ xét sáu điểm $\{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$. Lại theo bài 1 suy ra có một tam giác đơn sắc. Có hai khả năng xảy ra:

- 1) Nếu tam giác đơn sắc này không chứa cạnh P_2P_3 . Khi đó rõ ràng tam giác đơn sắc này không có chung cạnh với tam giác đỏ $P_1P_2P_3$. Bài toán được giải trong trường hợp này.
- 2) Nếu tam giác đơn sắc này chứa cạnh P_2P_3 . Vì P_2P_3 là cạnh đỏ, nên ta chọn trong $\{P_4, P_5, P_6, P_7\}$ một điểm sao cho cùng với hai điểm P_2, P_3 tạo nên một tam giác đơn sắc màu đỏ. Không mất tính tổng quát ta giả sử đó là điểm P'_1 .



Hình 21.2

- Tương tự ta xét 6 điểm $\{P_1, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$ và như trên ta chỉ quan tâm đến trường hợp có điểm $P'_2 \in \{P_4, P_5, P_6, P_7\}$ sao cho $P'_2P_3P_1$ là tam giác đỏ.



Hình 21.3

- Khi xét 6 điểm $\{P_2, P_1, P_4, P_5, P_6, P_7\}$ và chỉ quan tâm đến trường hợp có điểm $P'_3 \in \{P_4, P_5, P_6, P_7\}$ sao cho $P'_3P_2P_1$ là tam giác đỏ.

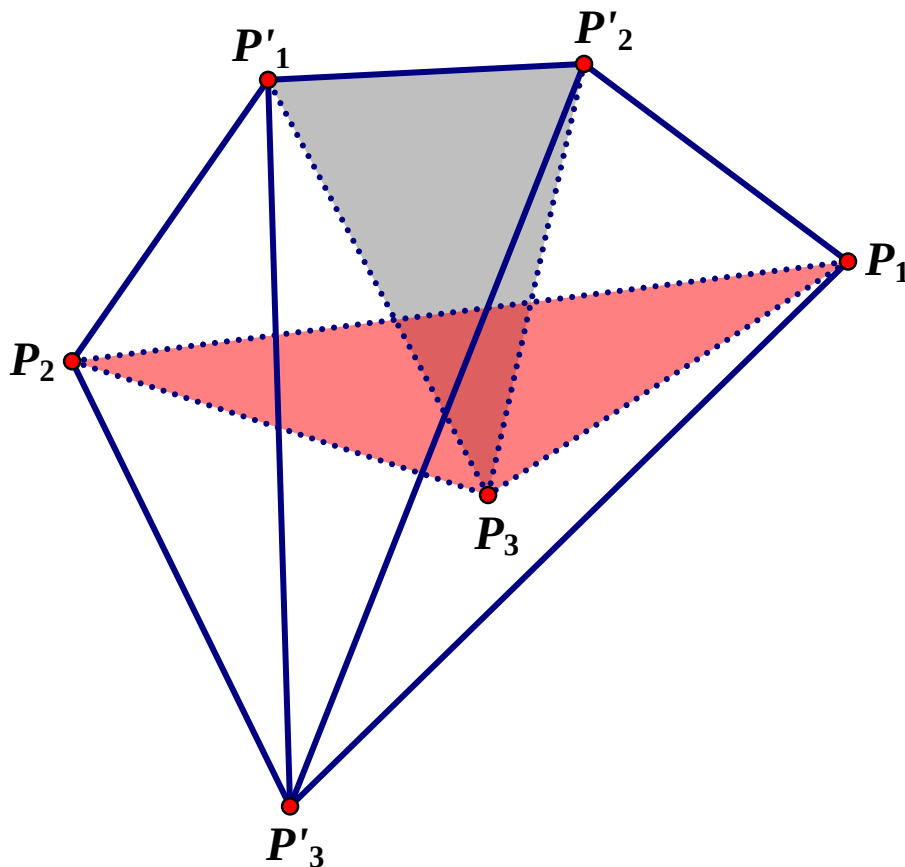
Như thế ta xây dựng được ba điểm $P'_1, P'_2, P'_3 \in \{P_4, P_5, P_6, P_7\}$ sao cho ba tam giác $P'_1 P_2 P_3, P'_2 P_3 P_1, P'_3 P_1 P_2$ là ba tam giác đỏ.

Bây giờ lại có hai khả năng xảy ra:

1. Nếu P'_1, P'_2, P'_3 là ba điểm phân biệt. (chú ý rằng bốn tam giác $P_1 P_2 P_3, P'_1 P_2 P_3, P'_2 P_3 P_1, P'_3 P_1 P_2$ đều là tam giác đỏ).

Lại có hai khả năng xảy ra :

- a) Nếu tam giác $P'_1 P'_2 P'_3$ có ít nhất một cạnh đỏ (chẳng hạn là cạnh $P'_1 P'_2$ là cạnh đỏ). Khi đó $P'_1 P'_2 P_3$ và $P_1 P_2 P_3$ là hai tam giác đơn sắc mà không có cạnh chung nào (cùng là tam giác đỏ).



Hình 21.3

- b) Nếu tam giác $P'_1 P'_2 P'_3$ là tam giác đen. Khi đó $P'_1 P'_2 P'_3$ và $P_1 P_2 P_3$ là hai tam giác đơn sắc không có cạnh chung nào.

2. Nếu P'_1, P'_2, P'_3 có điểm trùng nhau. Khi đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $P'_1 \equiv P'_2$. Khi đó ta coi tứ diện $P'_1 P_1 P_2 P_3$ là tứ diện đỏ (tức là tứ diện có 6 cạnh đều là đỏ). Còn lại ba điểm ta gọi là P_i, P_j, P_k . Lại xét tiếp các khả năng sau:

- a) Tồn tại một trong ba đỉnh sao cho trong bốn đoạn thẳng P_i, P_j, P_k . sao cho trong bốn đoạn $P_i P'_1, P_i P_1, P_i P_2, P_i P_3$ có ít nhất hai đoạn đỏ. Giả sử đó là $P_i P_1, P_i P_2$ là đỏ. Khi đó ta có hai tam giác đơn sắc $P_i P_1 P_2, P'_1 P_2 P_3$ cùng đỏ không có cạnh chung.
- b) Với mọi đỉnh P_i, P_j, P_k . khi nối các đỉnh ấy với bốn đỉnh của tứ diện $P'_1 P_1 P_2 P_3$ ta được tối đa một đoạn màu đỏ mà thôi.

Khi đó tồn tại một đỉnh của tứ diện (chẳng hạn P_1) sao cho $P_1 P_i, P_1 P_j, P_1 P_k$ đều màu đen. Lại có hai khả năng xảy ra:

- Nếu $P_i P_j P_k$ là tam giác đỏ thì $P_i P_j P_k$ và $P_1 P_2 P_3$ là hai tam giác đơn sắc cùng đỏ không có cạnh chung.
- Nếu tồn tại một cạnh đen (chẳng hạn $P_i P_j$). Khi đó $P_i P_j P_k$ là tam giác đen. Lúc này $P_i P_j P_k$ và $P_1 P_2 P_3$ là hai tam giác đơn sắc (một đen, một đỏ) không có cạnh chung.

Đpcm.

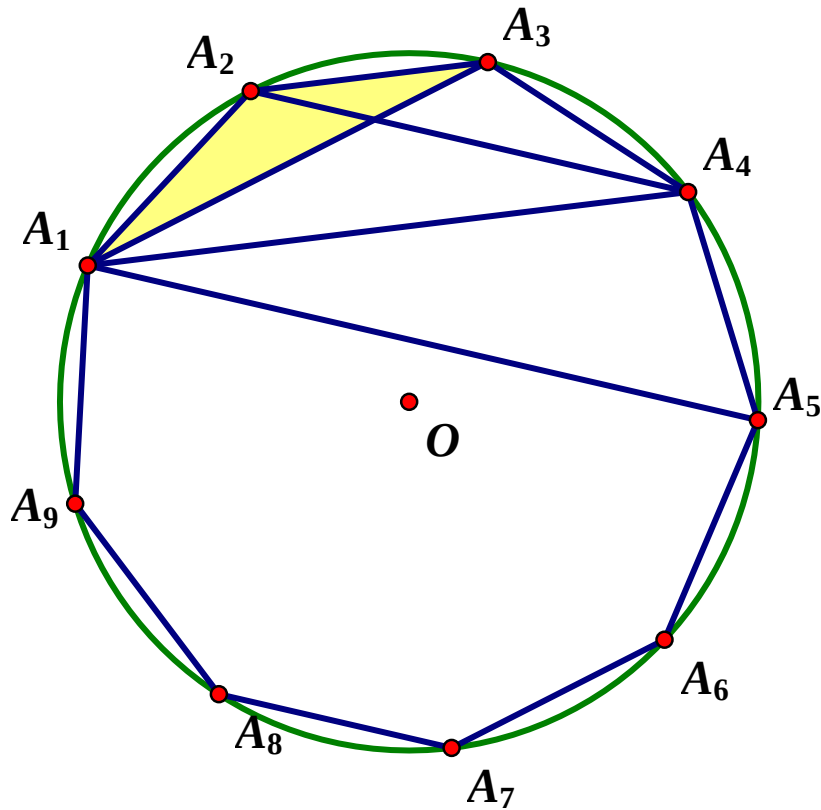
Bài toán 22 :

Cho hình đa giác đều 9 cạnh . Mỗi đỉnh của nó được tô màu bằng một trong hai màu trắng hoặc đen. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác phân biệt có diện tích bằng nhau, mà cách đỉnh của mỗi tam giác được tô cùng một màu.

Giải:

Gọi chín đỉnh của đa giác là $A_1, A_2, \dots, A_9$ đều được tô bằng hai màu. Nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất năm đỉnh trong số đó được tô cùng một màu. Giả sử có năm đỉnh được tô màu trắng, năm đỉnh này tạo ra:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$



Hình 22.

Tam giác màu trắng (tam giác màu trắng là tam giác có ba đỉnh cùng màu trắng).

Gọi Δ là tập hợp các đỉnh của đa giác đã cho, tức là:

$$\Delta = \{ A_1, A_2, \dots, A_9 \}$$

Gọi O là tâm của đa giác đều đã cho (vì là đa giác đều nên luôn tồn tại tâm) .

Xét phép quay các góc $0^\circ, 40^\circ, 80^\circ, 120^\circ, 160^\circ, 200^\circ, 240^\circ, 280^\circ, 320^\circ$ xung quanh tâm O. Rõ ràng ứng với mỗi phép quay này tập Δ biến thành chính nó (tức là tập các đỉnh của đa giác đều không thay đổi qua phép quay trên. Mặc dầu khi quay thì điểm này biến thành điểm kia)

Sau chín phép quay trên thì có 10 tam giác trắng biến thành 90 tam giác trắng. mà mỗi tam giác này đều có các cạnh đỉnh thuộc tập hợp Δ . Chú ý rằng số các tam giác khác nhau có đỉnh trong Δ là:

$$C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = 84.$$

Vì $84 < 90$, nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai tam giác trắng Δ và Δ' sao cho các phép quay tương ứng cùng một tam giác.

Vì phép quay bảo toàn hình dáng và độ lớn của hình (nói riêng bảo toàn diện tích), tức là: $S_{\Delta} = S_{\Delta'}$.

Đpcm.

Bài toán 23:

Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Giải:

Lấy năm điểm tùy ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng có hai màu để tô các đỉnh, mà theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là ba điểm A, B, C có màu đỏ.

Như vậy ta có tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ.

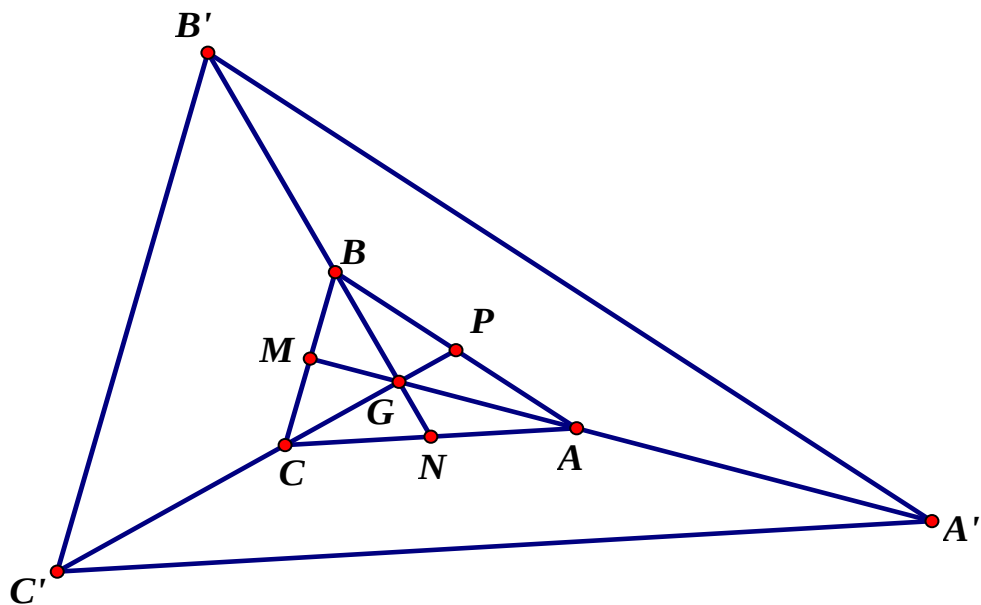
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chỉ có hai khả năng xảy ra :

- 1) Nếu G có màu đỏ. Khi đó A, B, C, G cùng đỏ và bài toán đã được giải.
- 2) Nếu G có màu xanh.

Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA' = 3GA$, $BB' = 3GB$, $CC' = 3GC$.

Khi đó, nếu gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì

$$A'A = 3AG = 6GM \Rightarrow A'A = 2AM.$$



Hình 23

Tương tự $B'B=2BN$, $CC'=2CP$.

Do đó các tam giác $A'BC$, $B'AC$, $C'AB$ tương ứng nhận A, B, C là trọng tâm.

Mặt khác, ta cũng có các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm G .

Có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

- Nếu A', B', C' cùng xanh. Khi đó tam giác $A'B'C'$ và trọng tâm G có cùng màu xanh.
- Nếu ít nhất một trong các điểm A', B', C' có màu đỏ. Không mất tính tổng quát giả sử A' đỏ. Khi đó tam giác $A'BC$ và trọng tâm A màu đỏ.

Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu. Đpcm.

Bài toán 24:

Giả sử 1 bàn cờ hình chữ nhật có 3×7 ô vuông được sơn đen hoặc trắng. Chứng minh rằng với cách sơn màu bất kì, trong bàn cờ luôn tồn tại hình chữ nhật gồm các ô ở 4 góc là các ô cùng màu.

Giải :

Mẫu sơn màu có thể xảy ra với bàn cờ này có dạng từ 1 đến 8. Giả sử một trong số các cột thuộc dạng 1. Bài toán sẽ được chứng minh nếu tất cả các cột

còn lại thuộc dạng 1,2,3 hoặc 4. Giả sử tất cả các cột còn lại thuộc dạng 5,6,7,8
Khi đó theo nguyên lý Dirichlet 2 trong số 6 cột có 2 cột cùng 1 dạng và như vậy
bài toán cũng được chứng minh

Chứng minh hoàn toàn tương tự nếu 1 cột có dạng 8. Giả sử không có cột
nào trong các cột 1,8 thì theo nguyên lý Dirichlet cũng có 2 cột cùng dạng và bài
toán cũng được chứng minh

Bài toán 25:

Dùng n màu để tô tất cả các cạnh của một hình lập phương sao cho mỗi đỉnh đều có ba
đỉnh đều có ba màu liên thuộc, đó là ba màu của ba cạnh chứa đỉnh đó. Tìm số n nhỏ
nhất để hai điều kiện sau đây đồng thời được thỏa mãn :

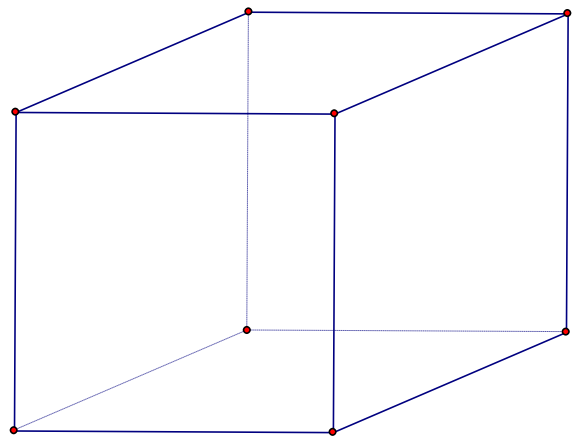
- a) Không có mặt nào có hai cạnh cùng màu .
- b) Không có hai đỉnh nào có cùng ba màu liên thuộc .

Giải

Từ giả thiết a) không có mặt nào có hai cạnh cùng màu , mà mỗi mặt có bốn cạnh,
vậy số màu phải dùng ít nhất là bốn , tức là n
 ≥ 4

Mặt khác , nếu $n = 4$ thì số bộ ba màu tạo ra
từ bốn màu là $C_4^3 = 4$

Có bốn bộ ba màu khác nhau để tô cho tám
bộ cách tại tám đỉnh của hình lập phương , vậy
theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai đỉnh có
cùng một bộ ba màu liên thuộc , tức là giả thiết
b) không thỏa mãn.



Vậy $n \geq 4$ và $n \neq 4$, nên $n \geq 5$.

Xét khi $n = 5$. vì hình lập phương có sáu mặt (mỗi mặt bốn cạnh) và lại có 12
cạnh , nên với bất cứ bốn cạnh nào luôn luôn chọn được ít nhất hai trong chúng thuộc
cùng một mặt của hình lập phương .Do đó, để thỏa mãn giả thiết a) mỗi màu chỉ dùng
để tối đa ba cạnh (vì nếu không , từ nhận xét trên có màu đỏ chẳng hạn dùng để tô ít
nhất bốn cạnh, thì ít nhất một mặt có hai cạnh đó, trái với giả thiết a))

Dùng $n = 5$ màu để tô cho 12 cạnh , mà mỗi dùng để tối đa cho ba cạnh, nên lại
theo nguyên lý Dirichlet suy ra có ít nhất hai màu (giả sử đó là màu xanh (X) và màu
đỏ (Đ)) , mà mỗi màu dùng để tô đúng ba cạnh .

Vì mỗi cách chứa hai đỉnh và lại để thỏa mãn giả thiết a) nên hai màu X,Đ sẽ liên thuộc tổng cộng 12 đỉnh (mỗi màu liên thuộc sáu đỉnh). Mà hình lập phương chỉ có tám đỉnh nên phải có ít nhất bốn đỉnh có cùng hai màu X,Đ liên thuộc (xem hình vẽ , đường nét liền đậm (____) chỉ màu đỏ , đường nét đứt đậm (-----) chỉ màu xanh .

Với mỗi đỉnh trong số này ,xét cách thứ ba xuất phát từ đó và không có màu X,Đ .Chỉ có khả năng sau xảy ra :

Bốn cách đang xét đôi một khác nhau .Do bốn cách này chỉ được dùng ba màu còn lại (ngoài X,D) ,nên phải có ít nhất hai cách cùng nhau và nghĩa là điều kiện b) bị vi phạm và có hai đỉnh cùng có bộ ba màu liên thuộc giống nhau .

Tóm lại ,nếu $n = 5$, luôn đi đến mâu thuẫn .

Do đó $n > 5$.

Với $n = 6$, xét cách tô màu sau đây : Đỏ (Đ), xanh (X) , vàng (V) , tím (T) ,nâu (N) , lam (L) .

Cách tô này thỏa mãn yêu cầu đề bài ra .

Vậy giá trị nhỏ nhất phải tìm là $n = 6$.

Nhận xét : Để chứng minh $n = 5$, ta có thể làm cách khác như sau :

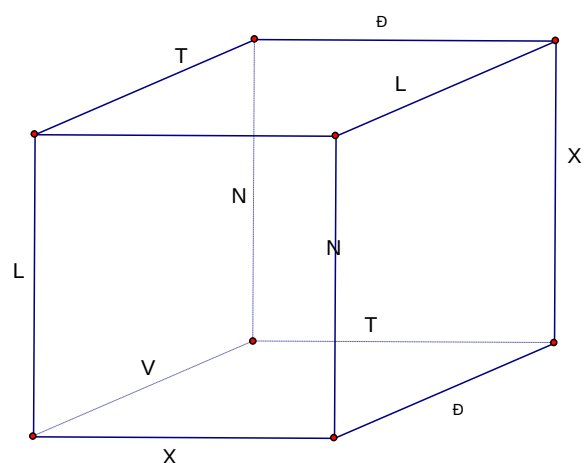
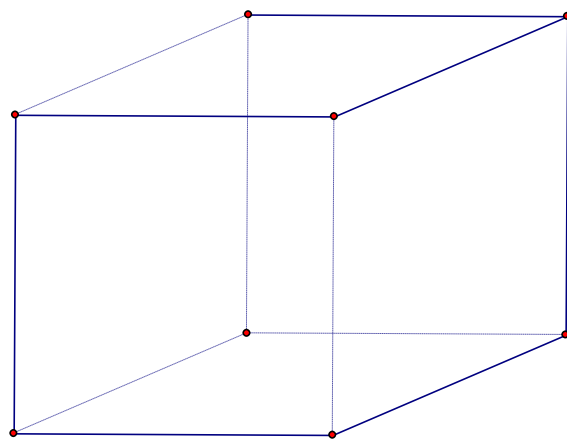
Khi $n = 5$, thì số bộ ba màu có thể tạo ra từ năm màu là $C_5^3=10$

Nếu kí hiệu các màu là 1,2,3,4,5 thì 10 bộ ba màu đỏ là các bộ ba sau :

(1,2,3) ,(1,2,4) ,(1,3,4) ,(1,3,4),
(1,3,5) ,

(2,3,4) , (2,3,5) , (1,4,5) ,(3,4,5), (2,4,5) ,

Ta nhận thấy mỗi màu đều xuất hiện một số chẵn lần (Sáu lần) trong tổng số 10 bộ ba nói trên .



Với mỗi cách tô màu thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta xác lập tám bộ ba liên thuộc tám đỉnh hình lập phương. Theo điều kiện b) tám bộ ba này phải đôi một khác nhau, suy ra luôn luôn có đúng hai trong 10 bộ ba nói trên không có mặt trong số các bộ màu được xác lập

Vì hai bộ ba màu ấy là khác nhau nên có ít nhất một màu chỉ có mặt trong bộ ba này mà không có mặt trong bộ ba kia. Do vậy có ít nhất một màu chỉ xuất hiện một số lẻ lần trong tám bộ ba màu xác lập được

Điều đó nghĩa là có ít nhất một màu liên thuộc một số lẻ đỉnh

Mặt khác, mỗi cạnh (một màu) đều chứa hai đỉnh và theo a) không có hai cạnh nào chung đỉnh được tô bởi cùng một màu

Do vậy, ở cách tô màu thỏa mãn yêu cầu đề bài, thì mỗi màu đều liên thuộc một số chẵn đỉnh.

Ta nhận được mâu thuẫn. Vậy giả thiết với $n = 5$ màu tô được là sai do đó $n \neq 5$

2.3.4. Bài toán diện tích

Ngược lại với nguyên lý dirichlet, nhưng có hình thức phát biểu gần giống với nó là nguyên lý sau: “Nếu một hình có độ đo S chứa một số hữu hạn các hình có tổng độ đo nhỏ hơn S , thì có một điểm của hình đã cho không nằm trong các hình mà nó chứa”. Cũng như nguyên lý Dirichlet, nguyên lý này tuy được phát biểu đơn giản, nhưng cũng có những ứng dụng khá sâu sắc trong toán học. Sau đây ta hãy xét một số bài toán ứng dụng trực tiếp phát biểu này:

Bài toán 26:

Trong một tờ giấy hình vuông bằng giấy có cạnh bằng 12 cm có 31 lỗ kim châm. Chứng minh rằng ta vẫn có thể cắt từ tờ giấy này ra một hình tròn có bán kính 1 cm mà không chứa một lỗ kim châm nào.

Giải:

Lấy mỗi lỗ kim là tâm dựng một hình tròn bán kính 1cm. Tổng diện tích của 31 hình tròn này sẽ là 31π nhỏ hơn diện tích của hình vuông cạnh 10 cm. Do đó phải có một điểm M trong hình vuông cạnh 10 cm (là hình vuông thu được từ hình vuông cạnh 12 cm đã cho bằng cách thu hẹp các chiều 1cm) và không nằm

trong 31 hình tròn bán kính được dựng như đã trình bày ở trên. Lấy điểm M làm tâm ta cắt một hình tròn bán kính 1cm, thì hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông đã cho có cạnh dài 12 cm và không chứa một lỗ kim châm nào cả.

Tổng quát bài toán:

Ta nhận thấy:

- Bài toán vẫn còn đúng với hình vuông có kích thước là 10 cm.
- Nếu gọi bán kính hình tròn mà ta cần cắt là r ($r \in \mathbb{R}^+$), gọi số lỗ kim châm của hình vuông là a ($a \in \mathbb{N}$) và kích thước của hình vuông là b ($b \in \mathbb{R}^+$). Khi đó ta $a r^2 \pi < b^2$. Tức là $b > \sqrt{a r^2 \pi}$.

Vậy bài toán tổng quát có thể được phát biểu như sau:

Trong một tờ giấy hình vuông có cạnh bằng b có a lỗ kim châm. (trong đó $b > \sqrt{a r^2 \pi}$). Chứng minh rằng ta vẫn có thể cắt từ tờ giấy này ra một hình tròn có bán kính r cm mà không chứa một lỗ kim châm nào.

Bài toán 27: Cho hình tròn (C) có diện tích bằng 8, đặt 17 điểm phân biệt, bất kì Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1

Giải:

Chia hình tròn thành (C) thành 8 hình quạt bằng nhau, mỗi hình quạt có diện tích bằng 1. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình quạt (a) chứa 3 điểm trong số 17 điểm đã cho. Tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm đó nằm trong hình quạt (a) nên có diện tích nhỏ hơn diện tích hình quạt, tức là bé hơn 1

Bài toán 28:

Trong hình vuông cạnh 15 đặt 20 hình vuông nhỏ cạnh 1 từng đôi một không cắt nhau. Chứng minh rằng trong hình vuông lớn có thể đặt một hình tròn bán kính 1 sao cho nó không cắt hình vuông nào.

Giải:

Xét hình gồm tất cả các điểm cách hình vuông nhỏ cạnh 1 một khoảng không lớn hơn 1. Rõ ràng hình tròn bán kính 1 có tâm nằm ngoài hình đó nên không thể cắt hình vuông nhỏ.

Diện tích hình đó bằng $5+\pi$.

Tâm hình tròn cần tìm cũng cần phải cách các cạnh của hình vuông lớn hơn một khoảng lớn hơn 1, tức là ở bên trong hình vuông cạnh 13.

Vì $20(5+\pi) < 13^2$

Hình tròn có tâm tại điểm không bị phủ sẽ có tính chất thỏa mãn đề bài.

Chương 2 : Nguyên lí cực hạn

2.1. Nguyên lí cực hạn

Song song với việc sử dụng các nguyên lí khác như phản chứng, Dirichlet hay quy nạp toán học để tìm lời giải cho các bài toán khá học búa, nguyên lí cực hạn cũng được xem là một phương pháp rất hay, được vận dụng một cách linh hoạt trong việc khảo sát một tập hợp hữu hạn hay vô hạn phần tử mà trong nó tồn tại giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất .

Nguyên lí cực hạn được phát biểu đơn giản như sau:

Nguyên lí 1: Trong một tập hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

Nguyên lí 2: Trong một tập khác rỗng các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

Sử dụng nguyên lí cực hạn là một phương pháp được vận dụng cho nhiều lớp bài toán khác, đặc biệt nó có ích khi giải các bài toán tổ hợp nói chung và hình học nói riêng.

Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán hình học, sẽ rất có lợi nếu chúng ta xem xét các phần tử biên, phần tử giới hạn nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng hình học cá thể nhận giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất,

chẳng hạn như cạnh lớn nhất, cạnh nhỏ nhất của một tam giác, góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất của một đa giác ...

Những tính chất của các phần tử biên, phần tử giới hạn nhiều khi giúp chúng ta tìm kiếm được lời giải thu gọn của bài toán.

Nguyên lý cực hạn thường được sử dụng kết hợp với các phương pháp khác, đặc biệt là phương pháp phản chứng, được vận dụng trong trường hợp tập các giá trị cần khảo sát chỉ tập hợp hữu hạn (nguyên lý 1) hoặc có thể có vô hạn nhưng tồn tại một phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất (nguyên lý 2) Khi vận dụng nguyên lý này, ta phải tiến hành các bước sau :

Bước 1: Chứng minh rằng trong tất cả các giá trị cần khảo sát luôn tồn tại giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.

Bước 2: Xét bài toán trong trường hợp riêng khi nó nhận giá trị này (nhỏ nhất hoặc lớn nhất)

Bước 3: Chỉ ra một mâu thuẫn, chỉ ra một giá trị còn nhỏ hơn (hay lớn hơn) giá trị ta đang khảo sát .

Theo nguyên lý của phương pháp phản chứng, ta sẽ suy ra điều phải chứng minh.

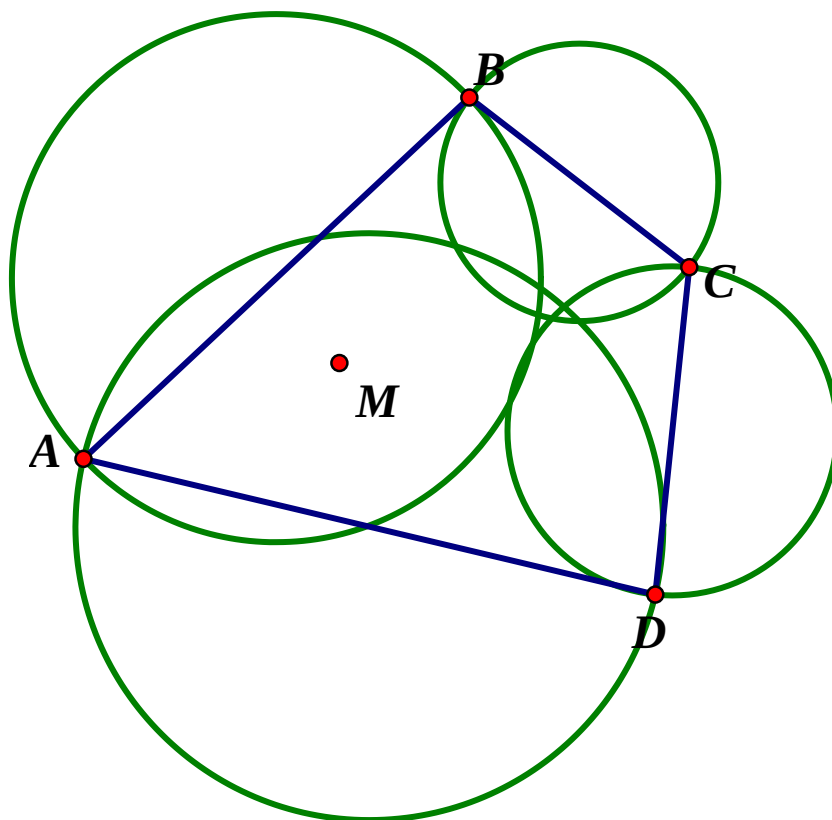
2.2. Hệ thống bài tập ứng dụng.

Sau đây chúng tôi xin đưa ra một số bài tập điển hình có vận dụng nguyên lý cực hạn và một số đề thi học sinh giỏi.

Ví dụ 30:

Chứng minh rằng: Bốn hình tròn đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín miền tứ giác ABCD.

Giải:



Hình 30

Lấy M là một điểm tùy ý của tứ giác lồi $ABCD$. Có hai khả năng xảy ra:

- 1) Nếu M nằm trên biên của đa giác (tức M nằm trên một cạnh của tứ giác $ABCD$). Khi đó M nằm trong hình tròn có đường kính là cạnh ấy. Trong trường hợp này kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.
- 2) Nếu M nằm bên trong tứ giác lồi $ABCD$. Khi đó ta có

$$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360^\circ$$

Theo nguyên lí cực hạn, tồn tại $\max \{ \angle AMB, \angle BMC, \angle CMD, \angle DMA \} = \angle BMC$.

Khi ấy :

$$\angle BMC \geq 90^\circ \quad (1)$$

Từ (1) suy ra M nằm trong (hoặc cùng lắm là nằm trên) đường tròn đường kính BC . Vậy dĩ nhiên M bị phủ bởi đường tròn này.

Như thế do M là điểm tùy ý của tứ giác $ABCD$, ta suy ra bốn hình tròn nói trên phủ kín tứ giác lồi đã cho.

Điều phải chứng minh.

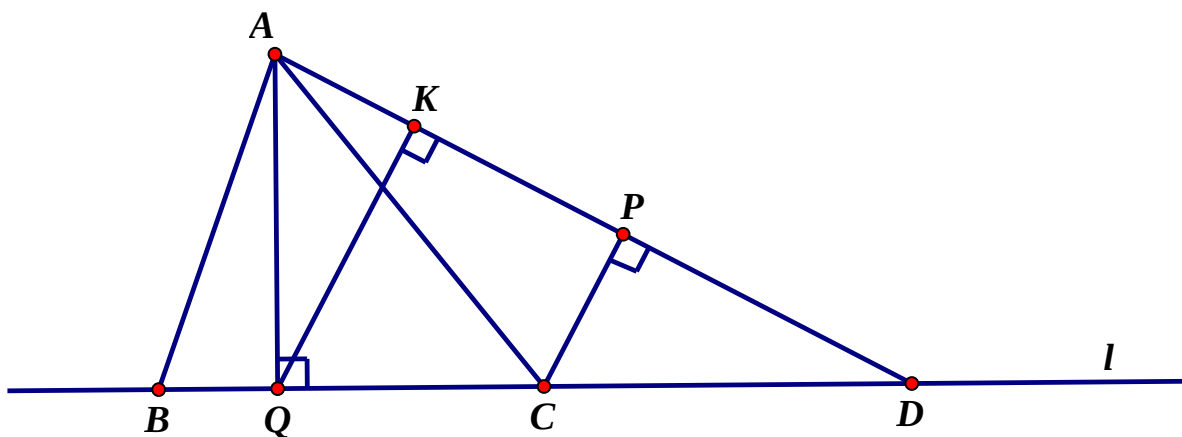
Bài toán 31:

Cho 2011 đường thẳng phân biệt, trong đó ba đường thẳng bất kì trong số chúng thì đồng quy.

Chứng minh rằng cả 2011 đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

Giải:

Ta sẽ đi giải quyết bài toán bằng phương pháp phản chứng: Giả sử ngược lại các đường thẳng đã cho không đi qua một điểm. Ta xét các giao điểm tạo nên bởi 2011 đường thẳng đã cho. Xét tất cả các khoảng cách khác 0 hạ từ các giao điểm này tới các đường thẳng đã cho. Giả sử A là một giao điểm trong số đó và gọi AQ là khoảng cách nhỏ nhất trong số đó vẽ từ A đến l đường thẳng l trong số 2011 đường thẳng.



Hình 31

Qua A theo giả thiết, phải có ít nhất là 3 đường thẳng, và 3 đường thẳng này cả l lần lượt tại B , C và D . Vẽ $AQ \perp l$, thì hai trong ba điểm B , C , D phải nằm cùng một phía của điểm Q , chẳng hạn là C và D .

Không mất tính tổng quát, giả sử $QC < QD$; vẽ $CP \perp AD$, vẽ $QK \perp AD$.

Suy ra: $CP < QK < AQ$

Vô lý, vì trái với giả thiết giả sử AQ là khoảng cách bé nhất. Điều vô lý trên chứng tỏ rằng 2009 đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

Bài toán 32: (Đề thi học sinh giỏi quốc gia 1992-1993 bảng A)

Một nước có 80 sân bay, mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng: trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay đến.

Giải:

Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay từ các sân bay M và N đến sân bay O thì khoảng cách MN là lớn nhất trong các cạnh của tam giác MON, do đó

$$MON > 60^\circ.$$

Giả sử rằng các máy bay bay từ các sân bay $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots, M_n$ đến sân bay O thì một trong các góc M_iON_j không lớn hơn $\frac{360^\circ}{n}$ ($i, j, n=1, 2, 3, 4, 5 \dots$ 80) vì tổng các góc đã cho bằng 360° .

Vậy: $\frac{360^\circ}{n} > 60^\circ \Rightarrow n < 6$

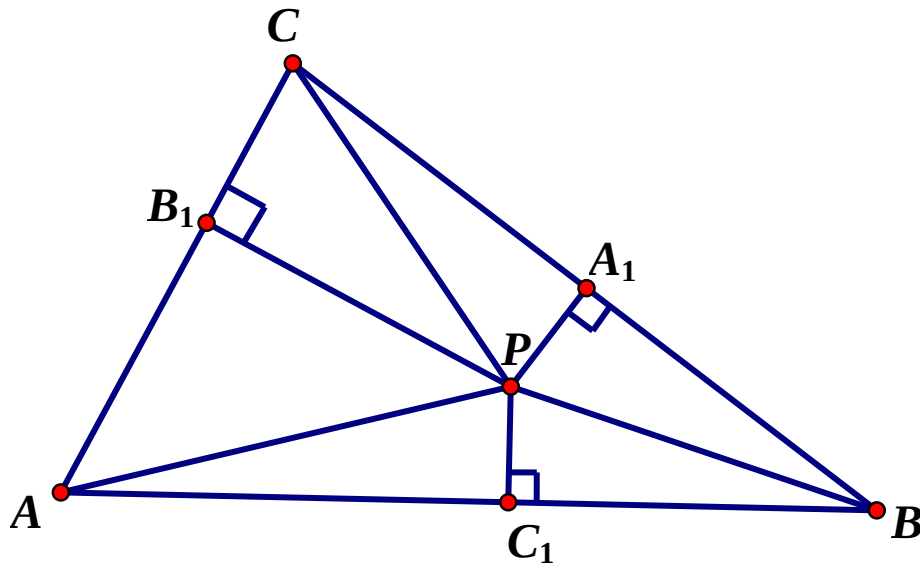
Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 32: (Đề thi học sinh giỏi quốc gia 1992-1993 bảng B)

Trong tam giác ABC có ba góc nhọn. Lấy một điểm P bất kì, chứng minh khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.

Giải:

Dựng PA_1, PB_1, PC_1 tương ứng vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Vì tam giác ABC có ba góc nhọn nên các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trong đoạn BC, CA và AB.



Hình 32

Nối PA, PB, PC ta có:

$$APC_1 + C_1PB + BPA_1 + A_1PC + CPB_1 + B_1PA = 360^\circ$$

Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc này không thể nhỏ hơn 60° .

Không mất tính tổng quát, ta giả sử APC_1 là lớn nhất, khi đó $APC_1 \geq 60^\circ$.

Xét $\triangle APC_1$ vuông tại C_1 , ta có:

$$\frac{PC_1}{AP} = \cos APC_1 \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Từ đó ta có: $AP \geq PC_1$.

Nếu thay PA bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh và thay PC_1 bằng khoảng cách ngắn nhất từ P tới các cạnh thì bất đẳng thức càng được thỏa mãn.

Bài toán 33: (Đề thi chọn HSG quốc gia 1986-1987. Bảng A)

Cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Chứng minh rằng: Nếu các bán kính của 4 đường tròn nội tiếp các tam giác EAB, ECD, EDA mà bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.

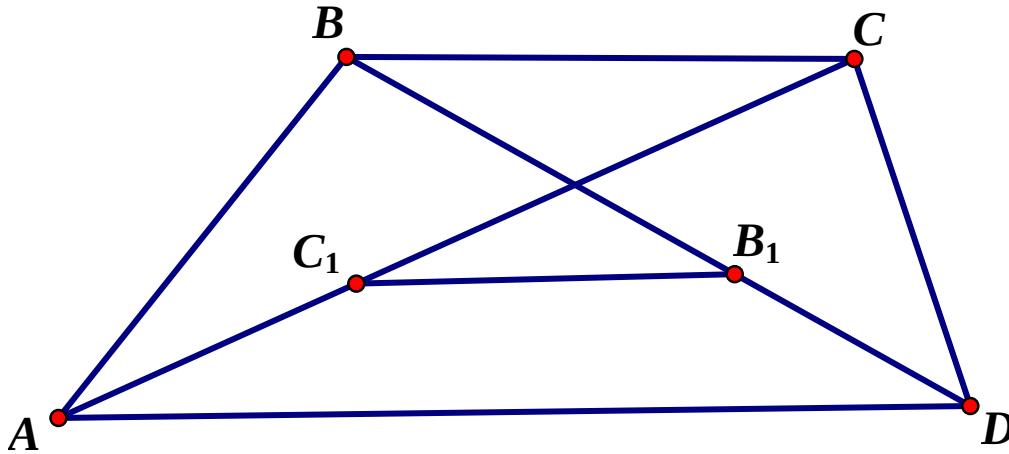
Giải:

Hoàn toàn không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng :

$$CE \leq AE, BE \leq DE$$

Gọi B_1 và C_1 tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua tâm E, ta có tam giác C_1EB_1 nằm trong miền tam giác AED.

Giả sử đoạn thẳng AD không trùng với đoạn thẳng C_1B_1 .



Hình 33

Khi đó đường tròn nội tiếp tam giác AED nằm bên trong đường tròn nội tiếp tam giác AED, đồng dạng (phối cảnh) với đường tròn này với tâm đồng dạng E, hệ số đồng dạng lớn hơn 1.

Như vậy: $r_{AED} > r_{C_1EB_1} = r_{CBE}$ (r_{AED} là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AED). Vô lí

Vì trái với giả thiết là: $r_{AED} = r_{CEB}$.

Điều vô lí đó chứng tỏ là $A \equiv C_1$ và $D \equiv B_1$.

Khi đó: $OA=OC, OB=OD \Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

Trong hình bình hành ABCD có $p_1 r = S_{AEB} = S_{BEC} = p_2 r$

(Ở đó p_1 và p_2 tương ứng là nửa chu vi của các tam giác AEB và BEC).

$$\text{Suy ra: } p_1 = p_2 \Leftrightarrow \frac{AB + BE + EA}{2} = \frac{BC + CE + BE}{2}$$

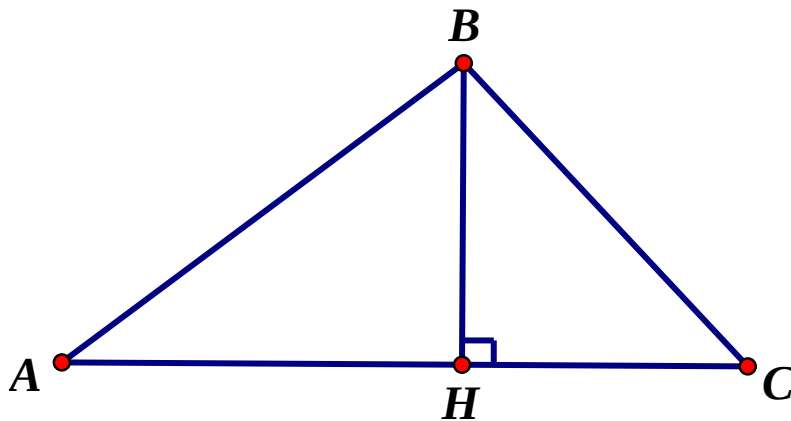
$$\Leftrightarrow AB = BC \text{ (vì } AE=CE)$$

Hình bình hành ABCD có $AB = BC$ nên ABDC là hình thoi.

Bài toán 34:

Chứng minh rằng : Nếu tất cả các cạnh của một tam giác đều nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Giải:



Hình 34

Gọi A là góc nhỏ nhất của tam giác ABC, suy ra: $BAC \leq 60^\circ$.

$$\text{Ta có : } S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

Do đó :

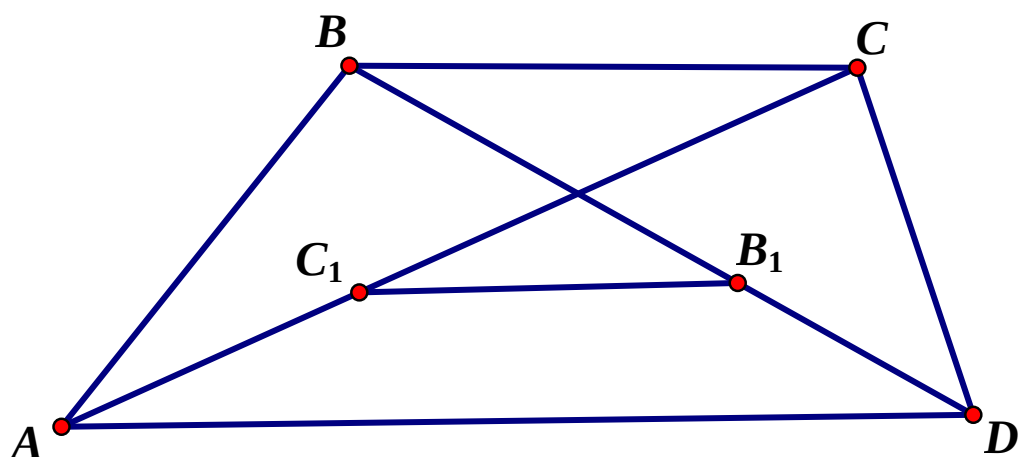
$$S_{ABC} < \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Suy ra điều phải chứng minh ☺

Bài toán 35:

Gọi O là giao điểm của tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng: Nếu các tam giác AOB, BOC, COD, DOA có chu vi bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.

Giải:



Hình 35

Không mất tính tổng quát ta giả sử : $AO \geq CO$, $DO \geq BO$.

Gọi B_1 và C_1 tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua O

$$\Rightarrow OB = OB_1, OC = OC_1.$$

Tam giác B_1OC_1 nằm trong tam giác AOD.

Ta có: $P_{\triangle AOD} \geq P_{\triangle B_1OC_1} = P_{\triangle BOC} = P_{\triangle AOD}$ (trong đó kí hiệu P là chu vi)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $B_1 \equiv D$ và $C_1 \equiv A$.

Khi đó tứ giác ABCD có : $OA = OC$, $OB = OD$

$\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành.

Mặt khác ta lại có :

$$P_{\triangle AOD} = AB + BO + OA$$

$$P_{\triangle BOC} = BC + BO + OC$$

Suy ra $AB = BC$.

Vậy ABCD là hình thoi.

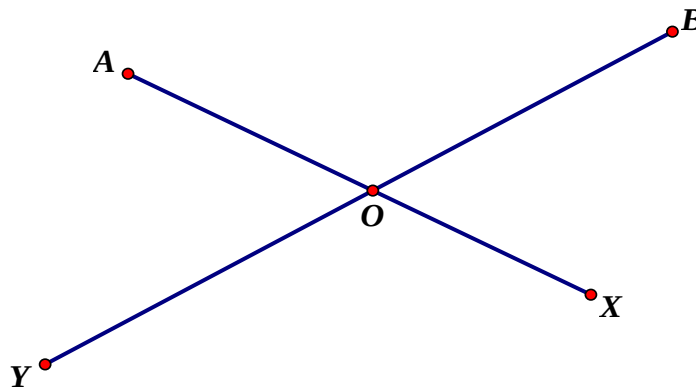
Bài toán 36:

Trên mặt phẳng cho 2×2000 điểm, trong đó không có bất kỳ 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2011 điểm bằng màu đỏ và tô 2011 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng: bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2011 đoạn thẳng không có điểm nào chung.

Giải:

Ta nhận thấy rằng luôn tồn tại cách nối 2011 cặp điểm với nhau bằng 2011 đoạn thẳng và vì có 2011 cặp điểm nên số cách nối là hữu hạn và nếu dùng tổ hợp thì ta có thể tính được con số chính xác các cách nối. Và hiển nhiên là trong hữu hạn cách nối đó ta luôn tìm ra được một cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất. Ta chứng minh cách nối đó là cách mà chúng ta cần tìm.

Thật vậy: Giả sử ngược lại ta có hai đoạn thẳng AX và BY mà cắt nhau tại điểm O (giả sử A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh).



Hình 36

Khi đó, nếu ta thay đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn AY và BX, các đoạn còn lại giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:

$$AY + BX < (AO + OY) + (BO + OX) = (AO + OX) + (BO + OY) \Rightarrow AY + BX < AX + BY$$

Như vậy, việc thay hai đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn cách nối có tổng các độ dài là bé nhất.

Điều vô lí đó chứng tỏ cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất là không có điểm chung. ☺

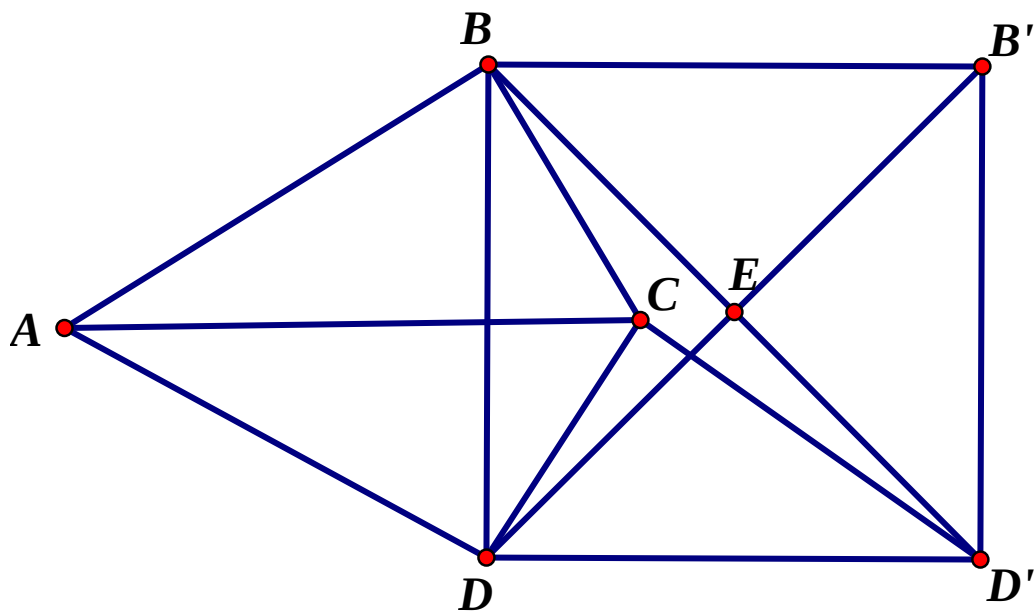
Bài toán 37:

Cho tứ giác ABCD thỏa mãn: bán kính các đường tròn nội tiếp bốn tam giác ABC, BCD, CDA và DAB bằng nhau. Chứng minh tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Giải:

Giả sử $r_{ABC} = r_{BCD} = r_{CDA} = r_{DAB}$.

Vẽ các hình bình hành ABB'C và ADD'C.



Hình 37

Suy ra tứ giác BB'D'C là hình bình hành. Do đó: $\triangle ABC = \triangle B'CB$ và $\triangle ADC = \triangle D'DC$.

$$\Rightarrow r_{ABC} = r_{B'CB}, r_{ADC} = r_{D'DC}$$

Mặt khác: $\triangle ABD = \triangle CB'D'$ (c.c.c) $\Rightarrow r_{ABD} = r_{CB'D'}$

Theo giả thiết: $r_{ABC} = r_{BCD} = r_{CDA} = r_{DAB}$

$$\Rightarrow r_{B'CB} = r_{CB'D'} = r_{D'DC} = r_{CBD}$$

Gọi E là giao điểm của BD' và DB'. Ta chứng minh $C \equiv E$

Giả sử C khác E $\Rightarrow$ C thuộc vào một trong bốn tam giác : EBD, EBB', EB'D', ED'D. Giả sử C thuộc vào miền tâm giác BDE

$$\Rightarrow r_{BCD} < r_{BED} = r_{B'ED} < r_{CB'D'}. \text{ Vô lý.}$$

Điều vô lý chứng tỏ E trùng với C

Suy ra B, C, D' thẳng hàng và D, C, B' thẳng hàng.

Ta có: D'C//AD suy ra BC//AD. Vì CB'//AB $\Rightarrow$ DC//AB

Suy ra ABCD là hình bình hành.

Ta lại có:

$$S_{ABD} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \text{ (vì ABCD là hình bình hành).}$$

$$\Leftrightarrow r_{ABD} \cdot \frac{AB + BD + DA}{2} = r_{ADC} \cdot \frac{AD + DC + CA}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB + BD + DA = AD + DC + CA$$

$$\Leftrightarrow BD = CA$$

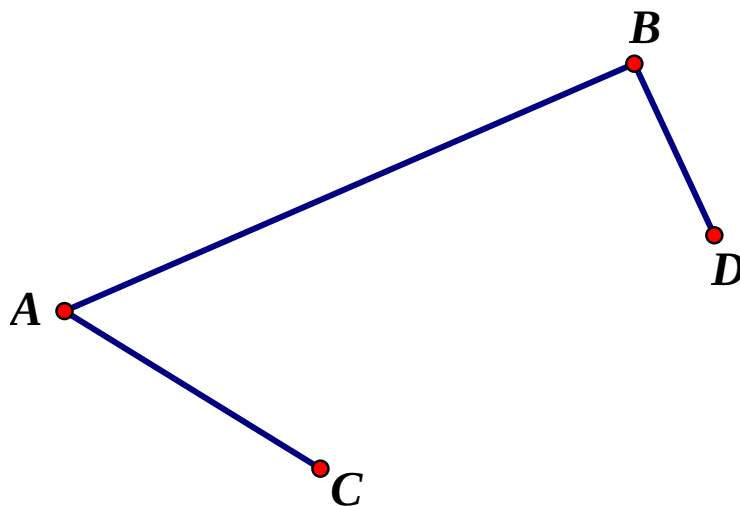
Vậy ABCD là hình chữ nhật.

Bài toán 38:

Trên mặt phẳng đã cho 2011 điểm, khoảng cách giữa chúng đôi một khác nhau. Nói mỗi điểm trong số 2011 điểm này với điểm gần nhất. Chứng minh rằng: với mỗi cách nối đó không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.

Giải:

Giả sử ngược lại với cách nối đó, chúng ta nhận được một đường thẳng gấp khúc khép kín.



Hình 38

Gọi AB là mắt lớn nhất của đường gấp khúc khép kín này. Tức là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng tạo nên đường gấp khúc trên.

Giả sử AC và BD là hai mắt kề với mắt AB. Ta có:

- $AC < AB$ nên B không là điểm gần nhất của A.
- $BD < AB$ nên A không là điểm gần nhất của B.

Chúng tỏ rằng A và B không được nối với nhau. Vô lí!

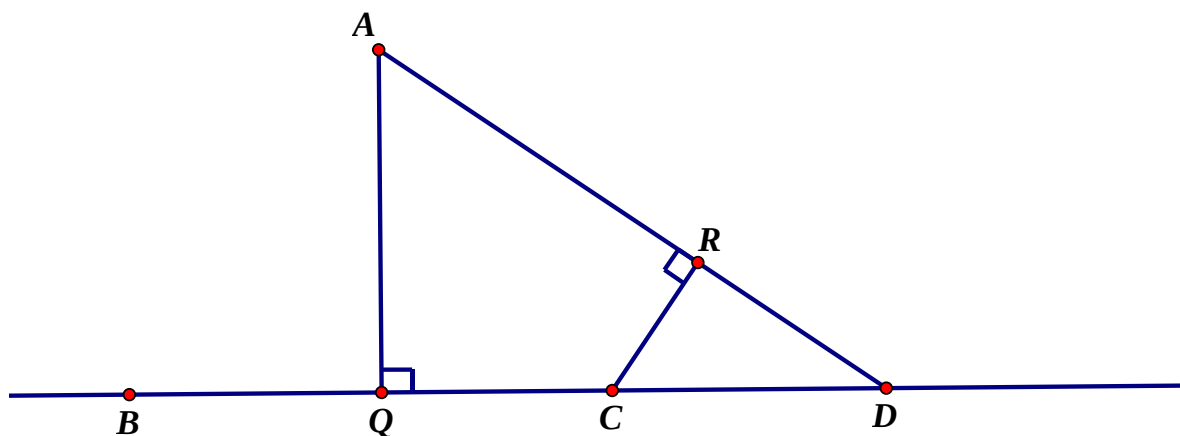
Điều đó chứng tỏ rằng chúng ta không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín từ cách nối trên.

Bài toán 39:

Trên mặt phẳng cho 2011 điểm thỏa mãn: ba điểm bất kì trong số chúng đều thẳng hàng. Chứng minh rằng: 2011 điểm đã cho là thẳng hàng.

Giải:

Giả sử ngược lại là 2011 điểm đã cho không thẳng hàng.



Hình 39

Dựng qua mỗi cặp điểm trong số 2011 điểm này một đường thẳng. Số các đường thẳng được nối như vậy là hoàn toàn xác định, hữu hạn. Xét các khoảng cách khác 0 nhỏ nhất từ 2011 điểm đã cho đến các đường thẳng vừa dựng. Số các khoảng cách như vậy tồn tại và hữu hạn.

Gọi khoảng cách từ A đến đường thẳng BC là bé nhất (A, B, C là ba trong số 2011 điểm đã cho). Theo giả thiết, trên BC còn có 1 điểm thứ 3 là D khác B và C.

Vẽ $AQ \perp BC$, khoảng cách AQ là bé nhất (theo giả sử) ta có trong ba điểm B, C, D phải có ít nhất hai điểm nằm về cùng một phía của điểm Q, giả sử đó là hai điểm A và D.

Giả sử: $CQ < DQ$ vẽ $CR \perp AD$, dễ thấy $CR < AQ$ (vô lí)

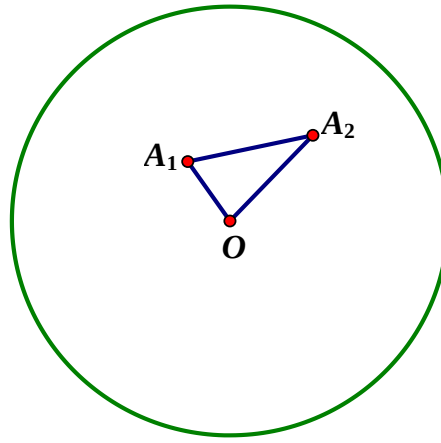
Điều đó chứng tỏ rằng 2011 điểm đã cho thẳng hàng.

Bài toán 40:

Bên trong đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ có 8 điểm phân biệt. Chứng minh rằng: tồn tại ít nhất hai điểm trong số chúng mà khoảng cách giữa hai điểm này nhỏ hơn 1.

Giải:

Nhận xét: ít nhất 7 điểm trong số 8 điểm đã cho là khác tâm O. Ta gọi các điểm đó là $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$.



Hình 40

Ta có góc nhỏ nhất trong số các góc đỉnh O và hai điểm còn lại là

A_iOA_k ($i \neq k, 1 \leq i, k \leq 8$) là không lớn hơn $\frac{360^\circ}{7} < 60^\circ$

Giả sử A_1OA_2 là góc bé nhất.

Xét $\triangle A_1OA_2$ ta có :

$$\text{Vì } A_1OA_2 < 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} OA_1A_2 > 60^\circ \\ A_1A_2O > 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA_2 > A_1A_2 \\ OA_1 > A_1A_2 \end{cases}$$

Mà $OA_1 \leq 1$ hoặc $OA_2 \leq 1 \Rightarrow A_1A_2 < 1$

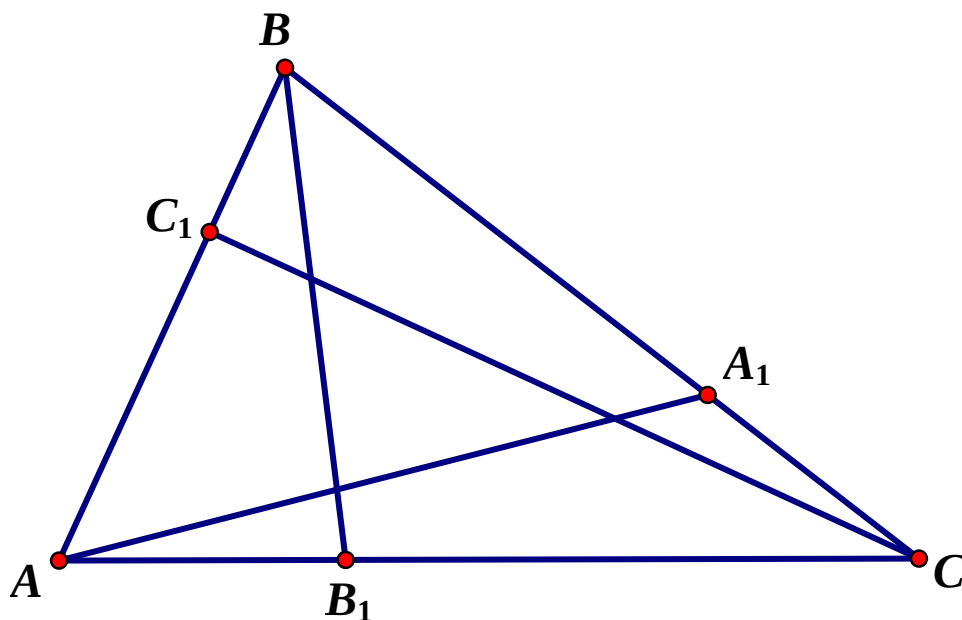
Bài toán 41:

Trên các cạnh của tam giác ABC lấy điểm C' thuộc cạnh AB, A' thuộc cạnh BC và B' thuộc cạnh AC. Biết rằng, độ dài các đoạn thẳng AA', BB', CC' không lớn hơn 1. Chứng minh rằng: $S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (đơn vị diện tích).

không lớn hơn 1. Chứng minh rằng: $S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (đơn vị diện tích).

Giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $C \leq B \leq A$.



Hình 41

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Tam giác ABC có ba góc nhọn. Khi đó: $60^\circ \leq A \leq 90^\circ$

Ta có: $h_b \leq BB_1 \leq 1$ và $h_c \leq CC_1 \leq 1$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} \frac{h_b h_c}{\sin A} \leq \frac{1}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Trường hợp 2: Tam giác ABC không là tam giác có ba góc nhọn:

Khi đó $A \geq 90^\circ$

$$\Rightarrow AB \leq BB_1 \leq 1,$$

$$AC \leq CC_1 \leq 1$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2} AB \cdot AC \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài toán 42:

Trên mặt phẳng cho 2011 điểm không thẳng hàng. Chứng minh rằng: tồn tại một đường tròn đi qua ba trong số 2011 điểm đã cho mà đường tròn này không chứa bất kì điểm nào trong số 2008 điểm còn lại.

Giải:

Nối hai điểm bất kì trong số 2011 điểm đã cho bằng một đoạn thẳng. Vậy ta sẽ có C_{2011}^2 đoạn thẳng như vậy. Gọi AB là đoạn thẳng có độ dài bé nhất.

Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB.

Suy ra 2009 điểm còn lại nằm ngoài đường tròn tâm O. Gọi C là điểm trong số 2009 điểm còn lại đó thỏa mãn góc ACB là lớn nhất trong số các góc nhìn 2 điểm A và B.

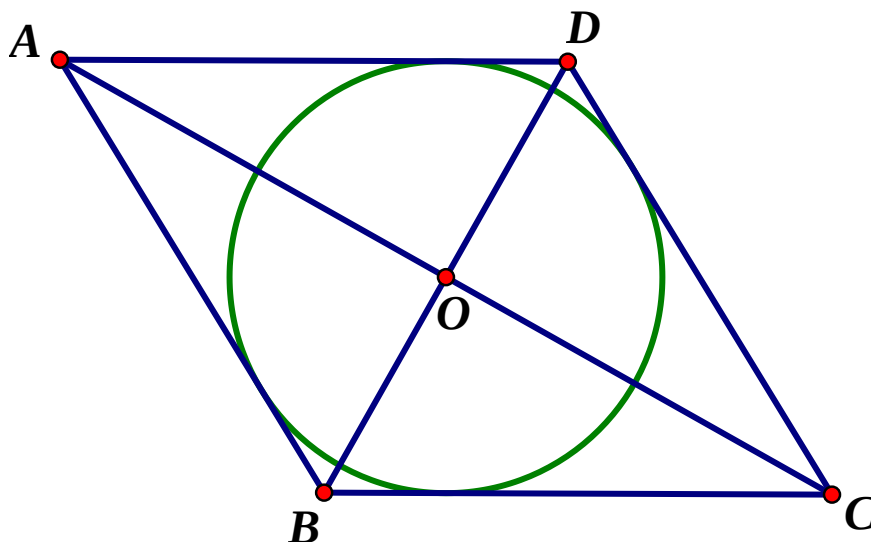
Xét $\triangle ABC$. Ta có đường tròn $\odot C$ ngoại tiếp $\triangle ABC$ không chứa điểm nào trong số 2008 điểm còn lại.

Bài toán 43:

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng: Nếu các đường chéo AC và BD giao nhau tại O thì tứ giác ABCD là hình thoi.

Giải:

Không mất tính tổng quát, ta giả sử : $OC \leq OA$, $OB \leq OD$.



Bài 43

Gọi B' và C' lần lượt là các điểm đối xứng của B và C qua $O \Rightarrow OB = OB'$, $OC = OC'$.

Bởi vì BC là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow B'C'$ cũng tiếp xúc với $(O) \Rightarrow A \equiv C'$, $D \equiv B'$

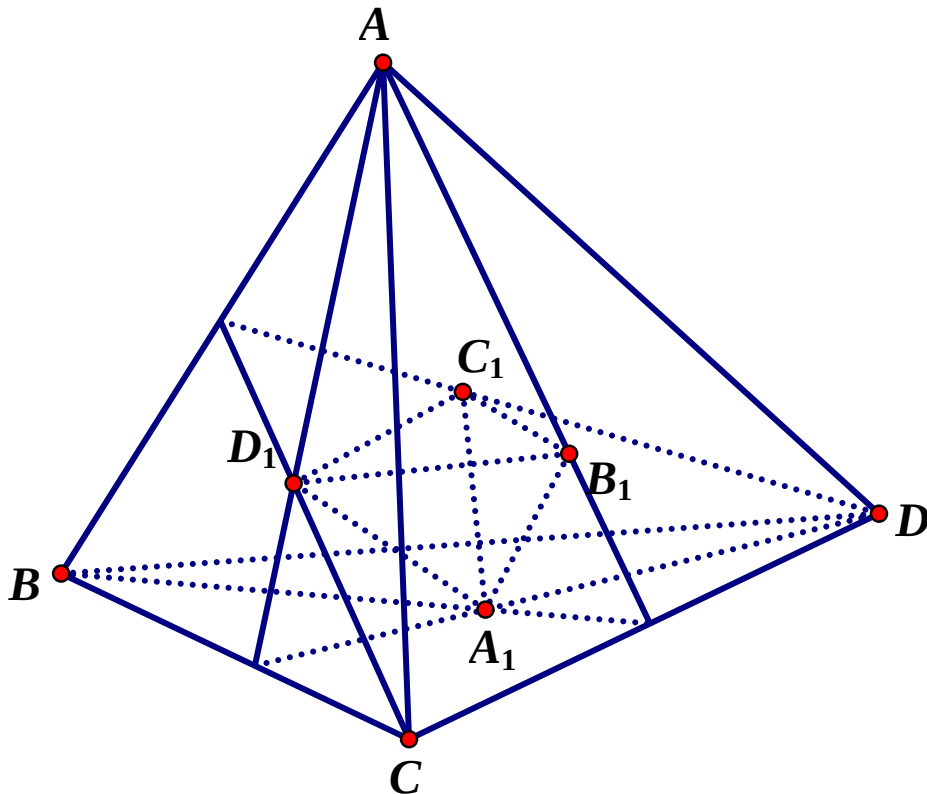
$\Rightarrow OA = OC$ và $OB = OD \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Mặt khác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(O) \Rightarrow AB + CD = AD + BC \Rightarrow 2 \cdot AB = 2 \cdot AD \Rightarrow AB = AD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Bài toán 44:

Trong không gian cho một số hữu hạn các điểm mà không có bốn điểm nào trong chúng cùng nằm trên một mặt phẳng sao cho thể tích của mỗi tứ diện tạo ra bởi đỉnh là những điểm cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng tất cả các điểm có thể được phủ bởi một tứ diện có thể tích bằng 27.

Giải:



Hình 44

Do số lượng điểm đã cho là hữu hạn, nên số lượng các tứ diện tạo thành cũng là hữu hạn. Theo nguyên lý cực hạn, tồn tại tứ diện (mà ta sẽ gọi là $A_1B_1C_1D_1$) có thể tích lớn nhất. Qua các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng là trọng tâm của các tam giác BDC, ACD, ABD và ABC. Từ đó ta có:

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{27} \quad (1)$$

Theo giả thiết ta lại có: $V_{A_1B_1C_1D_1} \leq 1$, nên từ (1) có:

$$V_{ABCD} \leq 27 \quad (2)$$

Bây giờ ta chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho nằm trong tứ diện ABCD.

Giả sử trái lại điều khẳng định nay không đúng, tức là tồn tại điểm M (trong số các điểm đã cho), sao mà M không thuộc tứ diện ABCD. (3)

Khi đó tồn tại ít nhất một đỉnh của tứ diện ABCD (không mất tính tổng quát ta xét trường hợp đó là đỉnh B, các trường hợp xét hoàn toàn tương tự) sao cho B và M nằm trong hai nửa không gian xác định bởi (ACD).

Có thể thấy ngay:

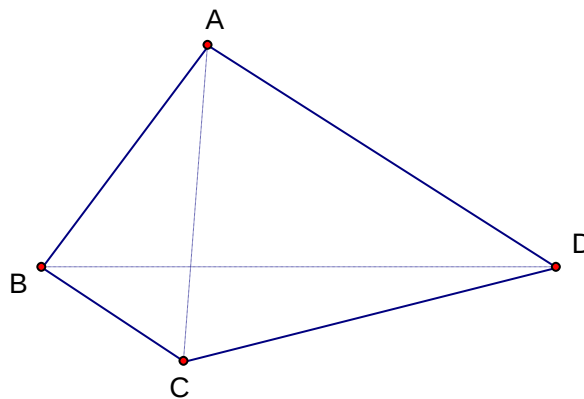
$$V_{MA_1C_1D_1} > V_{B_1A_1C_1D_1} \quad (4)$$

Bất đẳng thức (4) đúng chứng tỏ rằng $MA_1C_1D_1$ là tứ diện tạo bởi bốn đỉnh tổng các điểm đã cho có thể tích lớn hơn thể tích của tứ diện $V_{B_1A_1C_1D_1}$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của tứ diện $A_1B_1C_1D_1$.

Điều vô lý trên chứng tỏ rằng giả thiết phản chứng là sai.

Vậy: Trong không gian cho một số hữu hạn các điểm mà không có bốn điểm nào trong chúng cùng nằm trên một mặt phẳng sao cho thể tích của mỗi tứ diện tạo ra bởi bốn điểm là những điểm cho không lớn hơn 1. Luôn tồn tại một tứ diện có thể tích bằng 27 phủ tất cả các điểm. (đpcm).

Bài toán 41:



Hình 41

Tìm tất cả các số tự nhiên $n \geq 3$ sao cho tồn tại n điểm trong không gian thỏa mãn đồng thời các tính chất sau đây :

1. Không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng .
2. Không có bốn điểm nào trong chúng cùng nằm trên một đường tròn
3. Tất cả các đường tròn đi qua ba điểm trong chúng đều có bán kính bằng nhau .

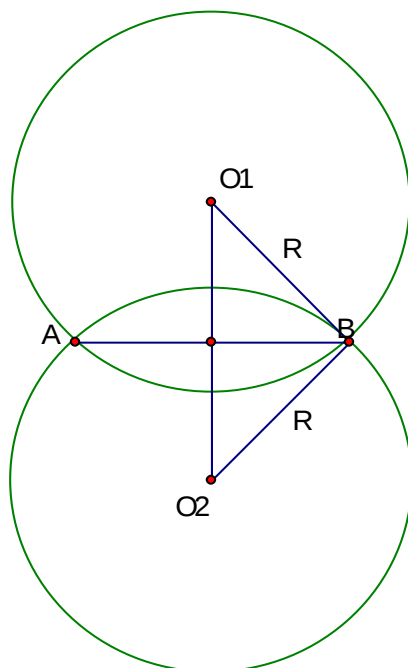
Giải

Ta sẽ sử dụng kí hiệu sau đây : Giả sử X, Y, Z là ba điểm không thẳng hàng , khi đó qua (XYZ) sẽ kí hiệu là đường tròn đi qua ba điểm ấy .

1. Trước hết ta thấy rằng $n = 4$ là một giá trị cần tìm của số tự nhiên n

Thật vậy , xét tứ diện đều ABCD là một giá trị cần tìm của đề bài thỏa mãn.

2. Giả sử tồn tại năm điểm A, B, C, D, E thỏa mãn yêu cầu đề bài . Chỉ có hai khả năng xảy ra :



Hình 41.2

a) Nếu A,B,C,D,E đồng phẳng . Vì mọi đường tròn đi qua ba điểm trong chúng đều bằng nhau nên giả sử R là bán kính của các đường tròn bằng nhau ấy.

Rõ ràng chỉ có đúng hai đường tròn bán kính R qua A và B (xem hình vẽ) .

Xét các đường tròn (ABC), (ABD),(ABE) . Đó là các đường tròn bán kính R qua A và B . Theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất trong số đó trùng nhau .

Giả sử $(ABC) \equiv (ABD)$

Như thế bốn điểm A,B,C,D cùng nằm trên một đường tròn . Điều này mâu thuẫn với giả thiết

b) Nếu A,B,C,D,E không đồng phẳng . Khi đó không gian tổng quát , giả sử D và E nằm cùng phía với mặt phẳng đi qua A,B,C (vì luôn tồn tại hai điểm sao cho chúng nằm cùng phía với mặt phẳng đi qua ba điểm còn lại) và D,E không thuộc mặt phẳng ABC.

Ta có bổ đề sau :

Bổ đề : Cho tứ diện ABCD có bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đều bằng nhau . Khi đó ABCD là tứ diện đều (có các cặp cạnh đối diện bằng nhau) .

(Xem chứng minh ở cuối bài) .

Do ABCD và ABCE là các tứ diện đều và D,E ở cùng phía với mặt phẳng ABC suy ra $D \equiv E$. Đó là điều vô lý .

Vậy khi $n=5$, giả sử tồn tại năm điểm phân biệt thỏa mãn đầy đủ các yêu cầu đề bài là sai . Tóm lại khi $n \geq 5$, không tồn tại n điểm phân biệt trong không gian toàan mãn yêu cầu đã cho .

Vì thế giá trị cần tìm là $n=4$

Để hoàn thiện bài toán, ta chứng minh bổ đề như sau :

Kí hiệu các mặt BCD,CDA,DAB,ABC tương ứng là các mặt 1,2,3,4 . Giả sử trong mặt 1 B,C,D của tam giác BCD sẽ kí hiệu là B_1, C_1, D_1 (có nghĩa là các góc B,C,D của mặt 1)

$$\text{Với kí hiệu ấy, ta có : } \sum_{i=2}^4 A_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^4 B_i + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq 3}}^4 C_i + \sum_{i=1}^4 D_i = 4n$$

Không gian tổng quát (và theo nguyên lý cực hạn) có thể cho rằng :

$$\sum_{i=1}^4 D_i = \min \left\{ \sum_{i=2}^4 A_i; \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^a B_i; \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq 3}}^4 c_i; \sum_{i=1}^4 D_i \right\}$$

Vì lẽ đó ,ta có $\sum_{i=1}^4 D_i \leq \pi$

Mặt khác, theo tính chất cầu tứ diện ta có góc phẳng ở một mặt nhỏ hơn tổng góc phẳng ở hai mặt còn lại .Do đó suy ra D_1, D_2, D_3 đều là góc nhọn ; tức là tất cả các góc phẳng tại đỉnh D đều là góc nhọn. Theo định lí hàm số sin thì :

$$R_{(ABC)} = \frac{BC}{2\sin D_1}; R_{(ABC)} = \frac{BC}{2\sin A_4}$$

Từ giả thiết của bài toán suy ra : $\sin D_1 = \sin A_4$

Tương tự : $\begin{cases} \sin D_2 = \sin B_4 \\ \sin D_3 = \sin C_4 \end{cases}$

Không gian tổng quát ,có thể cho là $A_4 = \max\{A_4, B_4, C_4\}$, suy ra B_4, C_4 đều nhọn .

Nếu $A_4 \geq \frac{\pi}{2}$, thì ta có $D_1 = \pi - A_4$.Ngoài ra $D_2 = B_4, D_3 = C_4$ (do D_1, D_2, D_3, B_4, C_4 đều là góc nhọn) .Từ đó có :

$$D_2 + D_3 = B_4 + C_4 = \pi - A_4 \text{ suy ra : } D_2 + D_3 = D_1$$

Đẳng thức $D_2 + D_3 = D_1$ là điều mâu thuẫn với tính chất góc phẳng của góc đa diện .Suy ra ABC là tam giác nhọn .Như vậy ta có :

$$D_1 = A_4, D_2 = B_4, D_3 = C_4$$

Suy ra các góc phẳng tại mỗi đỉnh A,B,C,D đều bằng π . Tại các mặt BCD,CDA,DAB của tứ diện lên mặt phẳng ABC, dễ dàng chứng minh được :

$$AB = CD, BC = DA, AC = DB$$

Vậy ABCD là tứ diện gần đều.

Bỏ đề được chứng minh.

Một số bài toán đưa ra ở dạng tổng quát:

Từ các bài thi thực tế và các bài toán tương tự tôi đưa ra một số bài toán ở dạng tổng quát:

Bài toán 1: Trên một đường thẳng đánh dấu n điểm khác nhau $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ theo thứ tự từ trái qua phải ($n \geq 4$). Mỗi điểm được tô bằng một trong 4 màu khác nhau và cả bốn màu đều được dùng. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng chứa đúng hai điểm của hai màu và ít nhất hai điểm của hai màu còn lại.

Bài giải:

Xét tập hợp sau:

$$A = \{k / 1 \leq k \leq n\}.$$

Tập $A \neq \emptyset$ (vì theo giả thiết dùng cả bốn màu) và A hữu hạn nên theo nguyên lý cực hạn, tồn tại chỉ số i nhỏ nhất mà $i \in A$.

Theo định nghĩa của tập hợp A , vì do i là chỉ số bé nhất thuộc S , nên màu của điểm A_i sẽ khác với các màu của tất cả các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ lại có đủ bốn màu.

Xét tiếp tập sau:

$$B = \{k / 1 \leq k \leq i \text{ và giữa các điểm } A_k, A_{k+1}, \dots, A_i \text{ có đủ bốn màu}\}.$$

Tập $B \neq \emptyset$ (vì dãy $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i$ có đủ bốn màu), và B hữu hạn nên theo nguyên lý cực hạn, tồn tại chỉ số j lớn nhất. Mà theo định nghĩa của tập hợp B . Do j là chỉ số lớn nhất thuộc B , nên màu của điểm A_j sẽ khác với màu của tất cả các điểm $A_{j+1}, \dots, A_i$.

Xét đoạn $[A_j, A_i]$. Khi đó đoạn thẳng này chứa đúng hai điểm của hai màu (đó là A_j và A_i), và ít nhất hai điểm của hai màu còn lại $A_{j+1}, \dots, A_{i-1}$. ☺

Bài tập 2: Chứng minh rằng trong mặt phẳng tọa độ, không thể tìm được năm điểm nguyên là đỉnh của một ngũ giác đều.

(Một điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên nếu cả hai tọa độ x, y của nó đều là những số nguyên).

Bài giải:

Giả thiết trái lại, tồn tại một ngũ giác đều sao cho năm đỉnh của nó đều là những điểm nguyên. Ta xét tập hợp sau:

$$\Omega = \{a^2 \mid a \text{ là cạnh của ngũ giác đều có năm đỉnh là các điểm nguyên}\}.$$

Dễ thấy, do a là cạnh của ngũ giác đều với các đỉnh nguyên nên a^2 là số nguyên dương.

Thật vậy, giả sử A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 là đa giác đều có cạnh thuộc Ω . Giả sử

$A_i(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, 5}$, thì nếu gọi a là cạnh của ngũ giác đều này, ta có:

$$a^2 = A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Do $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = \overline{1, 5}$ nên a^2 là số nguyên dương. Như thế tập $\Omega \neq \emptyset$, điều này suy ra từ giả thiết phản chứng.

Tập Ω là tập bao gồm các phần tử là các số tự nhiên, khác rỗng, nên theo nguyên lý cực hạn suy ra tồn tại phần tử nhỏ nhất, tức là tồn tại ngũ giác đều ABCDE sao cho a_*^2 là nhỏ nhất, ở đây a_* là cạnh của ngũ giác đều này. Để thấy ABCB' ; BCDC' ; CDED' ; DEAE' và AEBA' đều là các hình bình hành với $BD \cap CE = A'$, $AD \cap CE = B'$, $AD \cap BE = C'$, $AC \cap BE = D'$, $AC \cap DE = E'$.

Từ hình bình hành EABA' suy ra:

$$\begin{cases} x_{A'} = x_B + x_E - x_A \\ y_{A'} = y_B + y_E - y_A \end{cases} \quad (1)$$

Do A, B, C, D, E là các điểm nguyên nên $x_A, x_B, x_E, y_A, y_B, y_E$ là các số nguyên.

Vì thế từ (1) ta suy ra $x_{A'}, y_{A'}$ cũng là các số nguyên. Như thế A' cũng là điểm nguyên. Tương tự B', C', D', E' cũng là các điểm nguyên.

Rõ ràng A'B'C'D'E' là ngũ giác đều với các đỉnh của nó đều là các “điểm nguyên”, tức là $a' \in \Omega$ (a' là cạnh của ngũ giác đều A'B'C'D'E').

$$\text{Mặt khác ta có : } a' < a_* \Rightarrow a'^2 < a_*^2. \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của a_* . Vậy giả thiết phản chứng là sai. Như thế không tồn tại một ngũ giác đều với các đỉnh đều là điểm nguyên.

Bài tập 3:

Cho các số nguyên m, n với $m < p, n < q$ cho $p \times q$ là số thực đôi một khác nhau. Điền các số đã cho vào các ô vuông con của bảng ô vuông kích thước $p \times q$ (gồm p hàng, q cột) sao cho mỗi số được điền vào một ô và mỗi ô được điền vào một số. Ta gọi một ô vuông con của bảng là ô xấu nếu số nằm ô đó bé hơn ít nhất m số nằm cùng cột với nó và đồng thời bé hơn ít nhất n số nằm cùng hàng với nó. Với mỗi cách điền số nói trên, gọi s là số ô xấu của bảng số nhận được. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của s .

Bài giải:

Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$s \geq (p - m)(q - n) \quad (1)$$

Ta quy nạp theo số $p + q$.

- Nếu $p + q = 2$, tức là $p = q = 1$ (p, q là số tự nhiên $\Rightarrow$ bảng có duy nhất một số). Khi đó kết luận của bài toán là đúng (hiểu theo nghĩa ở đây m, n không có hoặc có thể hiểu theo nghĩa là không có trường hợp này) .

- Tương tự $p + q = 3$.

- Với $p + q = 4 \Rightarrow p = q = 2$ và $m = n = 1$.

Xét một cách điền bất kì bốn số đôi một khác a, b, c, d .

Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $a < b < c < d$ (vì 4 số khác nhau) .

a	b
c	d

Ô có số a là ô xấu (vì nó bé hơn số nằm cùng cột và một số nằm cùng hàng, và chỉ có ô đó là xấu mà thôi). Ta có $s = 1$.

Mặt khác, trong trường hợp này: $(p - m)(q - n) = (2 - 1)(2 - 1) = 1$.

Kết luận bài toán đúng trong trường hợp này .

Giả thiết quy nạp kết luận của bài toán đúng đến $p+q=k$ (ở đây $p>m, q>n$) , tức là trong trường hợp này số ô xấu lớn hơn hoặc bằng $(p-m)(p-n)$.

- Xét khi bảng $p \times q$ có $p+q=k+1$.

Ta gọi một ô vuông con của bảng là xấu theo hàng (xấu theo cột) nếu số nằm trong ô đó bé hơn ít nhất n số (tương ứng với m số) nằm cùng hàng (tương ứng nằm cùng cột) với nó.

Lấy hàng i bất kì. Hàng i này có q số đôi một khác nhau (do có q cột). Vì thế trong hàng i có $(q-n)$ số. mà mỗi số này bé hơn ít nhất n số nằm trong cùng hàng ấy.

(Thật vậy, giả sử xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn các số trong hàng là

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{p-n} < x_{q-n-1} < \dots < x_{q-1} < x_q.$$

Khi đó các ô chứa các số $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{q-n}$ là các ô xấu theo hàng).

Như vậy: trong mỗi hàng có $(q-n)$ ô xấu theo hàng và trong mỗi cột có $(p-m)$ ô xấu theo cột.

Nếu trong bảng $p \times q$ nói trên các ô xấu theo hàng đồng thời là xấu theo cột và ngược lại thì số ô xấu s được tính bằng:

$$s = (q-n)(p-m).$$

Vậy (1) đúng trong trường hợp này.

Vì lẽ đó chỉ cần quan tâm đến các trường hợp: trong bảng $p \times q$ tồn tại các ô chỉ xấu theo hàng (mà không xấu theo cột), hoặc chỉ xấu theo cột (mà không xấu theo hàng) . Do vậy, theo nguyên lí cực hạn tồn tại số a , đó là số nhỏ nhất ghi trong các ô như vậy. Không giảm tổng quát có thể cho là ô chứa a là ô xấu theo hàng (không xấu theo cột).

Xét cột của bảng $p \times q$ mà chứa ô mang số a . Chú ý rằng trong cột này có $p-m$ ô xấu theo cột (trong số này có ô chứa a). Các ô chắc chắn cũng phải là ô “xấu theo hàng”, thì ô ấy thuộc vào tập hợp nói trên (tập hợp các ô chỉ “xấu theo một loại”. Ô chứa a không phải là ô “xấu theo cột” nên giá trị a ghi trong ô đó

lớn hơn tất cả các giá trị ghi trong $p - m$ ô “xấu theo cột” nói trên. (chú ý là các ô trong bảng đôi một khác nhau). Điều này sẽ dẫn đến mâu thuẫn với định nghĩa số a là số bé nhất trong tập hợp nói trên. Vì vậy $(p - m)$ ô “ xấu theo cột” trong cột chứa ô ghi số a cũng chính là $(p - m)$ ô “xấu” của bảng $p \times q$.

Bỏ cột chứa ô mang số a ta được bảng mới $p \times (q - 1)$ mà một ô vuông con của bảng này là xấu thì nó cũng là ô “ xấu” của bảng $p \times q$.

Vì $p + q - 1 = k + 1 - 1 = k$, nên theo giả thiết suy ra số ô “ xấu” của bảng $p \times (q - 1)$ không ít hơn $(p - m)(q - 1 - n)$.

Vì thế số ô “xấu” s của bảng $p \times q$ sẽ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$s \geq (p - m)(p - 1 - n) + (p - m)$$

Hay: $s \geq (p - m)(q - n)$.

Vậy (1) cũng đúng khi: $p + q = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp (1) đúng với mọi bảng $p \times q$.

Còn lại ta sẽ chỉ ra một cách điền số vào bảng $p \times q$ để thu được đúng $(p - m)(q - n)$ ô “xấu”.

Trước hết sắp xếp $p \times q$ số theo thứ tự tăng dần: (ví $p \times q$ số đôi một khác nhau nên sắp xếp này luôn tồn tại).

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{pq-1} < x_{pq}.$$

Sau đó theo thứ tự này lần lượt điền các số vào các ô theo quy tắc : từ trên xuống dưới và trái qua phải.

x_1	x_{p+1}	$\dots$	$x_{(q-1)p+1}$
x_2	x_{p+2}	$\dots$	$x_{(q-1)p+2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_p	x_{2p}	$\dots$	x_{qp}

Rõ ràng các ô xấu là: $\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_{p-m} \\ x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{2p-m} \\ \dots \\ x_{(q-n-1)p+1}, x_{(q-n-1)p+2}, \dots, x_{(q-n)p-m} \end{cases}$

Và các “số xấu” là $s = (p - m)(q - n)$.

Tóm lại, giá trị bé nhất cần tìm là: $s = (p - m)(q - n)$.

KẾT LUẬN

Trên đây là những ứng dụng tiêu biểu của nguyên lí Dirichlet và nguyên lí cực hạn trong giải toán hình học ở trường THPT. Xin chân thành cảm ơn Th.s Nguyễn Chiến Thắng đã tận tình hướng dẫn, thư viện đại học Vinh và bạn Dương Thị Quỳnh Trang (sinh viên năm hai trường University of Missouri - Columbia) đã giúp tôi tìm tài liệu và đã chuẩn hóa trong bài dịch một số tài liệu từ tiếng anh. Trong quá trình nghiên cứu sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được nhiều những ý kiến đóng góp quý báu để tiểu luận được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo :

Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học phổ thông Các bài toán hình học tổ hợp – Phan Huy Khải NXB. Giáo dục 2007

Tuyển tập 670 bài toán rời rạc và cực trị chọn lọc Chử biên Nguyễn Đức Đồng NXB.Hải phòng.

Chuyên đề bồi dưỡng học sinh chuyên toán Chuyên đề chọn lọc tổ hợp và toán rời rạc. Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng. NXB. Giáo dục.

Nâng cao và phát triển toán 7 Vũ Hữu Bình NXB.Giáo dục.

ENGLISH FOR MATHEMATICS – Trần Vui – Lương Hà NXB.Giáo dục.

Chapter 3 The pigeonhole Principle and Ramsey Numbers

Tuyển tập đề thi Olympic – Nguyễn Hữu Điển

The life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) - Jürgen Elstrodt.

Luận văn thạc sĩ khoa học toán học – Chuyên ngành phương pháp toán sơ cấp – Lê Thị Bình – Đại học Thái Nguyên_ 2009

Me'moire sur l'impossibilite' de quelques esquations inde'termine'e du cinquieme degre' – Mr. Lejeune Dirichlet, professeur en mathe'matiques.

Một số vấn đề phát triển hình học tổ hợp - Nguyễn Hữu Điển- NXB.Giáo dục.

Một số chuyên đề toán học và tuổi trẻ - NXB.Giáo dục.

Hình học sơ cấp – Đào Tam – NXB. Giáo dục.

Các trang web:

<http://www.mathvn.com>

<http://www.math.ac.vn>

<http://www.vnmith.com>

<http://en.wikipedia.org/wiki>

<http://scs.mathletics.com>

<http://forum.mathscope.org>

<http://www.math.com>