Phương pháp GIẢI MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC trong tam giác

NGUYỄN LÁI
(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Giả sử f(A, B, C) là biểu thức chứa các hàm số lượng giác của các góc trong tam giác ABC.

Giả sử các góc A, B, C thỏa mãn hai điều kiện:

1) $f(A)+f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$

hoặc $f(A).f(B) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$ (1)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$;

2) $f(C)+f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$

hoặc $f(C).f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ (2)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C = \frac{\pi}{3}$.

Khi cộng (hoặc nhân) (1), (2) ta sẽ có BĐT

$f(A)+f(B)+f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (3)

hoặc $f(A).f(B).f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (4)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.

Tương tự ta cũng có bất đẳng thức với chiều ngược lại.

Để minh họa cho phương pháp trên ta xét các bài toán sau đây.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}} \geq \frac{4}{2+\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}}$$

$$\geq \frac{4}{2+\sqrt{2(\sin A+\sin B)}}=\frac{4}{2+2\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}}$$

$$\geq \frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}} \quad (5)$$

$\left(\text{có dạng } f(A)+f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}} \quad (6)$$

Cộng theo vế (5) và (6) ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}$$

$$\geq 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}}\right)$$

$$\geq \frac{4}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin C}}$

$$\geq \frac{3}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A\sin B}$$

$$\geq 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A.\sin B}}+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin A.\sin B}}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(A-B)-\cos(A+B)}}\right)^2$$

$$\geq\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(A+B)}}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (7)$$

$\left(\text{có dạng } f(A).f(B)\geq f^2\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\right).$

Tương tự

$$\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)^2 \quad (8)$$

Nhân theo vế của (7) và (8) ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)$$

$$\geq\left(\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)\right)^2\geq\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^4.$$

Suy ra $\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right).\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right)$

$$\geq\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^3=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}\geq\frac{3}{64}.$$

Lời giải. Trường hợp tam giác ABC tù hoặc vuông.

Giả sử $A=\max\{A, B, C\}\geq 90^\circ$, lúc đó

$\cos\dfrac{A+B}{2}>0$ và $\cos\left(\dfrac{C+60^\circ}{2}\right)>0.$

Ta có

$$\frac{\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}}{2}\geq\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{\cos A+\cos B}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^3$$

$$\geq\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)^3=\sin^6\frac{A+B}{4}$$

$$\Rightarrow\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}\geq 2\sin^6\frac{A+B}{4} \quad (9)$$

$\left(\text{có dạng } f(A)+f(B)\geq 2f\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\right).$

Tương tự

$$\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{60^\circ}{2}\geq 2\sin^6\frac{C+60^\circ}{4} \quad (10)$$

Cộng theo vế của (9) và (10) có

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{60^\circ}{2}$$

$$\geq 2\left(\sin^6\frac{A+B}{4}+\sin^6\frac{C+60^\circ}{4}\right)$$

$$\geq 4\sin^6\frac{A+B+C+60^\circ}{8} = 4\sin^6\frac{60^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2} \geq 3\sin^6\frac{60^\circ}{2}=\frac{3}{64} \quad (11)$$

Trường hợp tam giác ABC nhọn, các BĐT (9), (10) và (11) luôn đúng.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$= 2.\sqrt{2}\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).$$

Nên BĐT đã cho được viết lại dưới dạng

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\leq\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 \quad (*)$$

- Nếu $\max\{A; B; C\} \geq \frac{3\pi}{4}$ thì vế trái của biểu thức (*) không dương nên BĐT đã cho luôn đúng.

- Nếu $\max\{A; B; C\} < \frac{3\pi}{4}$ thì

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)>0;\ \cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)>0;\ \cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)>0,$$

nên $\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(A-B)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)\right] \leq \cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\leq\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (12)$$

$$\left(\text{có dạng } f(A).f(B)\leq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\right).$$

Tương tự

$$\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\leq\cos^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (13)$$

Do đó nhân theo vế của (12) và (13) và tương tự ta có

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\leq\left[\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$\leq \cos^4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\leq \cos^3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Do đó

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Mời các bạn tiếp tục giải các bài toán sau đây theo phương pháp trên.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có

1) $\tan^3\frac{A}{2}+\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{C}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\frac{1}{\sin^n\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^n\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^n\frac{C}{2}}\geq 3.2^n$

(n là số thực dương);

3) $A.\cos\frac{A}{4}+B.\cos\frac{B}{4}+C.\cos\frac{C}{4}\leq\frac{\pi\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$;

4) Nếu tam giác ABC nhọn thì

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)$$

$$\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})^3.\cos A.\cos B.\cos C.$$

ĐẠI SỐ HOÁ LƯỢNG GIÁC

HUỲNH LÂM LINH
(SV lớp Toán 1A, ĐHSP TP. Hồ Chí Minh)

Một trong những phương pháp hiệu quả trong chứng minh các bất đẳng thức trong tam giác là chuyển sang bài toán đại số mà ta tạm gọi là phương pháp đại số hóa. Thông thường những lời giải đó đều gọn đẹp và sáng sủa. Có nhiều phương pháp chuyển sang đại số, và mỗi phương pháp đó đều mang một vẻ đẹp và tính hiệu quả riêng. Riêng trong bài này xin giới thiệu với bạn đọc một cách đại số hóa mà theo tôi là mới.

Cho tam giác ABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi p, r, R tương ứng là nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác đó. Kí hiệu $x = \sin\frac{A}{2}$, $y = \sin\frac{B}{2}$, $z = \sin\frac{C}{2}$ sẽ được sử dụng cho đến cuối bài viết.

Ta có các hệ thức cơ bản sau:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

2) $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = z + xy$ và các hệ thức tương tự.

3) $\sqrt{2(1-x)(1-y)(1-z)} = x + y + z - 1$.

Sau đây là các bài toán minh họa.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC không nhọn. Chứng minh rằng*

$R \ge (\sqrt{2}+1)r$ *(bất đẳng thức Emmirich).*

Lời giải. Sử dụng hệ thức $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, ta quy bài toán 1 về chứng minh $xyz \le \frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

Thật vậy, ta có

$$1 - x^2 = y^2 + z^2 + 2xyz \ge 2yz(1+x).$$

Suy ra $1 - x \ge 2yz$ (*)

Không giảm tổng quát, giả sử $A \ge 90^\circ$. Suy ra $x \ge \frac{1}{\sqrt{2}} > y$. Vậy

$$xyz \le \frac{x(1-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} - x\right) + \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

$\le \frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (lưu ý $\frac{2-\sqrt{2}}{2} - x < 0$).

Bài toán 2. (Bài toán Jack Garfulkel)

Cho tam giác ABC thỏa mãn $A \le \frac{\pi}{3} \le B \le C$.

Chứng minh rằng $h_a + h_b + h_c \ge 7r + R$,

trong đó h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các đường cao của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh

$$\sqrt{3}(1 + 4xyz) \le 4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \qquad (1)$$

Thật vậy từ hệ thức **2** ta thấy

$$(1) \Leftrightarrow 3(1+4xyz)^2 \le 16(x+yz)(y+zx)(z+xy)$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2+z^2) + 64(xyz)^2 \le 16(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 1$$

$$\Leftrightarrow 64\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) \le 0.$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $A \le \frac{\pi}{3} \le B \le C$.

Ta có $\frac{h_a + h_b + h_c}{R}$

$$= 8\left(xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + yz\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + zx\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)}\right)$$

$$= 8\left(xy(z+xy) + yz(x+yz) + zx(y+zx)\right)$$

$$= 8((1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) + (xyz)^2 + xyz)$$

$$\ge 8\left(\frac{3}{16}(1+4xyz)^2 + (xyz)^2 + xyz\right)$$

$= \frac{3}{2} + 20xyz + 32(xyz)^2$

$= 28xyz + 1 + 2\left(4xyz - \frac{1}{2}\right)^2$

$\geq 28xyz + 1 = \frac{7r+R}{R}$. (đpcm)

Bài toán 3. (Bất đẳng thức Walker).

Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh bất đẳng thức $p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$.

Lời giải. Sử dụng

$2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 4r(r + 4R)$

(xem THTT số 337, tháng 7/2005, trang 6) và hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$, ta quy bài toán về dạng

$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$.

$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{A'}{2} + \sin\frac{B'}{2} + \sin\frac{C'}{2}\right)^2$

$\leq \cos^2\frac{A'}{2} + \cos^2\frac{B'}{2} + \cos^2\frac{C'}{2}$, trong đó

$\frac{A'}{2} = \frac{\pi}{2} - A$, $\frac{B'}{2} = \frac{\pi}{2} - B$, $\frac{C'}{2} = \frac{\pi}{2} - C$.

Cũng đặt x', y', z' tương tự như x, y, z nhưng xét đối với tam giác $A'B'C'$. Khi đó bất đẳng thức trên tương đương với

$(x' + y' + z')^2 \leq 1 - x'^2 + 1 - y'^2 + 1 - z'^2$.

Hay $1 + 4x'y'z' \geq 2(x'y' + y'z' + z'x')$ (2)

Trong ba số x', y', z' phải có hai số cùng không lớn hơn $\frac{1}{2}$ hoặc cùng không bé hơn $\frac{1}{2}$, giả sử là y', z'. Khi đó $x'(2y' - 1)(2z' - 1) \geq 0$.

Mà $1 - x' - 2y'z' \geq 0$ (Theo (*)).

Suy ra $x'(2y' - 1)(2z' - 1) + 1 - x' - 2y'z' \geq 0$.

Hay (2) được chứng minh.

Bài toán 4. (Bất đẳng thức Jack Garfulkel)

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Lời giải. Sử dụng hệ thức **2**, đưa BĐT trên về

$\sqrt{3}(2xy + 2yz + 2zx + x + y + z)$

$\geq 8\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

Theo (2) thì $1 + 4xyz \geq 2(xy + yz + zx)$.

Suy ra $2(xy + yz + zx) \geq 2(x + y + z)^2 - 3$.

Do đó $2(xy + yz + zx) + x + y + z$

$\geq (x + y + z - 1)(2x + 2y + 2z + 3)$.

Dựa vào hệ thức **3** ta chỉ cần chứng minh

$\sqrt{3}(2x + 2y + 2z + 3) \geq 4\sqrt{2(1+x)(1+y)(1+z)}$ (3)

Từ (*) ta có $x(1-x) \geq 2xyz$. Tương tự đối với y, z, rồi cộng lại ta được $x + y + z \geq 1 + 4xyz$ (4)

Để ý $xyz \leq \frac{1}{8}$. Do đó $4(x + y + z) \geq 1 + 40xyz$.

Ta có $12(x + y + z)^2 - 32(xy + yz + zx)$

$\geq 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4 - 8xyz$. Suy ra

$3(2x + 2y + 2z + 3)^2$

$= 12(x+y+z)^2 + 36(x+y+z) + 27$

$\geq 32(xy+yz+zx) + 4 - 8xyz + 32(xy+yz+zx)$

$+ 1 + 40xyz + 27 = 32(1+x)(1+y)(1+z)$.

Vậy (3) được chứng minh.

Về bài toán này bạn đọc có thể tham khảo thêm ở THTT số 291, tháng 9 năm 2001.

Bài toán 5. (Bất đẳng thức Jack Garfulkel)

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq 2.$$

Lời giải. Quy bài toán về dạng sau:

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1-z^2} \geq 5 - 8xyz \quad (5)$$

Ta có VT(5) bằng $1 + \frac{(1+xyz)^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

Vậy (5) $\Leftrightarrow \frac{(1+xyz)^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \geq 4(1-2xyz)$ (6)

Ta có $4(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$

$= 1 + 4xyz - x^4 - y^4 - z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$

Vậy (6) tương đương với

$$(1+xyz)^2 \ge (1-2xyz)(1+4xyz-x^4-y^4-z^4$$
$$+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2))$$

$$\Leftrightarrow 9x^2y^2z^2 \ge (1-2xyz)(2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$-x^4-y^4-z^4)$$

$$\Leftrightarrow 9(xyz)^2 \ge (x^2+y^2+z^2)(2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$-x^4-y^4-z^4) \quad (7)$$

Đặt $a = \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$, $b = \dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$,

$c = \dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$.

Thế thì $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$. Khi đó BĐT (7) tương đương với

$$9abc \ge 2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-\frac{9}{4}abc \le \frac{1}{4} \quad (8)$$

Từ BĐT $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$, suy ra $(1-2a)(1-2b)(1-2c) \le abc$ (do $a+b+c=1$).

Hay $1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8ab \le abc$.

Suy ra BĐT (8) được chứng minh.

Cuối cùng xin nêu ra một số bài tập để bạn đọc rèn luyện.

Bài tập 6. (Bất đẳng thức Jack Garfulkel)

Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

a) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \ge \frac{4}{3}\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$;

b) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$.

Bài tập 7. (TST USA 2003).

Cho tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}$$
$$\le \cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}.$$

Bài tập 8. Cho tam giác ABC không nhọn. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c}{8} \le (\sqrt{2}+1)R.$$

MỘT SỐ GỢI Ý
KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Mỗi đề thi tuyển sinh vào Đại học thường có một câu về phương trình lượng giác (PTLG). Phương pháp thường gặp khi giải PTLG là thực hiện một số phép biến đổi lượng giác hợp lí để đưa bài toán về PT tích, đặt ẩn số phụ để quy về PT bậc hai, bậc ba, từ đó đưa về PT lượng giác cơ bản... Ta nói biến đổi hợp lí vì các đồng nhất thức lượng giác thường rất đa dạng.

Ví dụ, nếu cần biến đổi $\cos^4 x-\sin^4 x$, thì tùy theo đầu bài cụ thể, chúng ta sử dụng một trong các đồng nhất sau :

$$\cos^4 x-\sin^4 x = \cos^2 x-\sin^2 x = \cos 2x$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Trong bài viết, xin được bỏ qua các phép biến đổi đơn giản hoặc viết nghiệm của các PT cơ bản.

1/ Biến đổi trực tiếp về phương trình cơ bản

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{8} \quad (1)$$

Lời giải. Biến đổi vế trái của (12) ta có

$$\cos^3 x(3\sin x-4\sin^3 x) + \sin^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)$$
$$= 3\cos^3 x.\sin x-3\sin^3 x.\cos x$$
$$= 3\sin x.\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$
$$=\frac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

PT (1) trở thành $\sin 4x=\frac{1}{2}$.

Lưu ý. Các đồng nhất lượng giác thường gặp khi giải toán :

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{4}\sin 4x \ ;$$

$$\cos^3 x.\cos 3x+\sin^3 x.\sin 3x=\cos^3 2x \ ;$$

$$\cos^4 x+\sin^4 x= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=\frac{3+\cos 4x}{4} \ ;$$

$$\cos^6 x+\sin^6 x = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}=\frac{5+3\cos 4x}{8}.$$

2/ Đặt ẩn số phụ để đưa về phương trình bậc hai, bậc ba, ...

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x. \qquad (2)$$

Lời giải

(2) $\Leftrightarrow$ $1+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=3\sin x\cos x$.

Đặt $t=\sin x+\cos x$ thì $t=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \Rightarrow$ $|t| \le \sqrt{2}$, lúc đó $\sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$. PT đã cho trở thành

$$t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 2t - 5) = 0.$$

Chú ý đến ĐK : $|t| \le \sqrt{2}$ ta nhận được $t = -1$.

Với $t = -1$ ta được $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lưu ý. Nếu đặt $t = \sin x + \cos x$ thì

$\sin 2x = t^2 - 1$; $\sin.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$;

Nếu đặt $t = \sin x - \cos x$ thì $\sin 2x = 1 - t^2$; $\sin.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Trong cả hai phép đặt trên, đều có ĐK $t \le \sqrt{2}$.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x \quad (3)$$

Lời giải

(3) $\Leftrightarrow$ $2\sin^2 x.\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x$.

Nhận thấy nếu $\cos x = 0$, (3) không thỏa mãn. Chia cả hai vế của (3) cho $\cos^3 x$, ta được

$$2\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}x.(1 + \mathrm{tg}^2 x) - 4\mathrm{tg}^3 x = 6.$$

Đặt $t = \text{tg}x$ thì

$t^3-2t^2-3t+6=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2-3)=0$.

Từ đó, dễ dàng tìm được

$\text{tg}x = 2$; $\text{tg}x = -\sqrt{3}$; $\text{tg}x = \sqrt{3}$.

Lưu ý. Nếu trong PT chỉ có các số hạng bậc nhất và bậc ba đối với sin$x$ và cos$x$, thì ta có thể chia hai vế của PT cho $\cos^3 x$ hoặc $\sin^3 x$ để đưa PT đã cho về PT bậc ba của tg$x$ hoặc cotg$x$.

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\text{tg}x + 2\sin 2x = 3 \qquad (4)$$

Lời giải. ĐK $\cos x \neq 0$.

Đặt tg$x$ = t, ta được PT

$$t+\frac{4t}{1+t^2}=3 \Leftrightarrow t^3-3t^2+5t-3=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2-2t+3)=0.$$

Vì $t^2-2t+3>0$ nên ta được nghiệm : $t = 1 \Rightarrow \text{tg}x = 1$.

Lưu ý. Nếu PT có các số hạng : tg$x$, cotg$x$ và cos$2x$, sin$2x$, ... thì ta đặt tg$x$ = t khi đó :

$$\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos 2x=\frac{1-t}{1+t^2};\ \text{tg}2x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Sau đó biến đổi về một PT bậc cao đối với t.

3/ Biến đổi về phương trình tích

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x} \qquad (5)$$

Lời giải. ĐK sin$x \neq 0$; cos$x \neq 0$.

$$2(\cos 3x-\sin 3x)+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[4(\cos^3 x+\sin^3 x)-3(\cos x+\sin x)\right]+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x.\cos x}=0.$$

Nhận thấy các số hạng có thừa số chung cos$x$ + sin$x$.

Dễ dàng biến đổi PT (5) thành

$$(\cos x+\sin x)\left[2(1-4\cos x\sin x)+\frac{1}{\sin x.\cos x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(2\sin^2 2x-\sin 2x-1)=0.$$

Ta được:

$$\cos x+\sin x=0;\ \sin 2x=1;\ \sin 2x=-\frac{1}{2}.$$

Lưu ý. Các số hạng có chứa thừa số (cos$x$+sin) là: cos$2x$; $\cos^3 x + \sin^3 x$; $\cos^4 x - \sin^4 x$; cos$3x$ – sin$3x$; 1 + tg$x$; tg$x$ – cotg$x$;...

Cũng tương tự, các bạn tự viết các số hạng có chứa thừa số (cos$x$ – sin$x$).

Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2} \quad (6)$$

Lời giải

(6) $\Leftrightarrow$ cos$x$.(cos$x$+cos$2x$) + sin$x$(cos$2x$–cos$x$) = 1

$\Leftrightarrow \cos x.\cos 2x+\sin x.\cos 2x-\sin x\cos x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x.(\cos x+\sin x)-\sin x(\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos 2x-\sin x)=0$.

Ta được :

$\cos x+\sin x=0$; $\cos 2x-\sin x=0$.

Lưu ý. Nếu trong PT có chứa các số hạng là tích của nhiều thừa số đối với sin hoặc cosin thì nói chung, ta phải sử dụng công thức biến tích thành tổng sau đó tìm cách đưa về PT tích hoặc đặt ẩn số phụ để được PT bậc 2, 3...

4/ Cách đánh giá hai vế

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x \qquad (7)$$

Lời giải. Ta có $4\sin^2 3x.\sin^2 x=5+\sin 3x$.

Vì $0\le\sin^2 3x\le 1$; $0\le\sin^2 x\le 1$; $\sin 3x\ge -1$;

nên $4\sin^2 3x.\sin^2 x\le 4\le 5+\sin 3x$

$$(7)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 3x.\sin^2 x=1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x=-1\\ \sin^2 x=1.\end{cases}$$

Từ phương trình $\sin^2 x=1 \Rightarrow \sin x=\pm 1$.

- sin$x$ = 1 ⇒ sin$3x$ = –1 (thỏa mãn).
- sin$x$ = –1 ⇒ sin$3x$ = 1 (loại).

Lưu ý. Các BĐT thường dùng để ước lượng:

$|\sin x|\le 1$; $|\cos x|\le 1$; $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}$.

Nếu m, n là các số tự nhiên lớn hơn 2 thì

$\sin^m x\pm\cos^n x \le \sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Bài tập. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^2 3x=4\cos 4x+3$;

2. $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x = \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x$;

3. $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$;

4. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right).\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\cos^4 4x$.

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ COTANG ĐỂ GIẢI TOÁN

NGUYỄN BÁ ĐANG
(Sở GD – ĐT Hải Dương)

Trong sách giáo khoa Hình học lớp 10 chúng ta đã làm quen với định lí cosin thể hiện sự liên quan giữa cạnh và góc của tam giác: *Với tam giác ABC bất kì, BC = a, AC = b, AB = c ta có* $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (1). Từ định lí này ta có kết quả sau đây.

Định lí cotang. Với mọi tam giác ABC ta có $\operatorname{cotg}A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S_{ABC}}$. Từ đó suy ra

$$\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}.$$

trong đó S_{ABC} kí hiệu diện tích tam giác ABC.

Chứng minh. Sử dụng công thức (1) và công thức $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, suy ra $\operatorname{cotg}A = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}$.

Chứng minh tương tự câu a) ta có

$$\operatorname{cotg}B = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S_{ABC}};\ \operatorname{cotg}C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S_{ABC}}.$$

Từ đó có

$$\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}} \text{ (đpcm).}$$

Bổ đề 1. Trong tam giác ABC với AM là trung tuyến, $\widehat{MAB} = \alpha$, $\widehat{MAC} = \beta$. Khi đó ta có hệ thức $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}C = \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}B$.

(Hệ thức này được suy trực tiếp từ định lí cotang cho các tam giác ABC, ABM, ACM với lưu ý rằng $S_{ABM} = S_{ACM} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$).

Bổ đề 2. Giả sử M là một điểm trên cạnh BC của tam giác ABC sao cho $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{m}{n}$; $\widehat{MAB} = \alpha$; $\widehat{AMB} = \beta$. Khi đó ta có

a) $(m+n)\operatorname{cotg}\beta = m.\operatorname{cotg}C - n\operatorname{cotg}B$;

b) $m\operatorname{cotg}\alpha = (m+n)\operatorname{cotg}A + n.\operatorname{cotg}B$.

Chứng minh. a) Dựng $AH \perp BC$, lúc đó H sẽ nằm trong đoạn BM hoặc đoạn MC, giả sử H thuộc đoạn BM. Lúc đó

$BM = BH + HM = AH(\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}\beta)$;

$MC = HC - HM = AH(\operatorname{cotg}C - \operatorname{cotg}\beta)$. Do đó,

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}C - \operatorname{cotg}\beta} = \frac{m}{n},$$

suy ra

$(m+n)\operatorname{cotg}\beta = m.\operatorname{cotg}C - n.\operatorname{cotg}B$ (đpcm).

b) Từ M kẻ $ME // AC$ ($E \in AB$), lúc đó $\widehat{MEB} = \widehat{BAC}$, sử dụng câu a) vào tam giác ABM ta có hệ thức cần chứng minh.

Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng định lí cotang và các bổ đề trên để giải một số bài toán sau đây.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM và $\widehat{AMB} = \alpha$. Chứng minh rằng

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}.$$

Lời giải. Hệ thức cần chứng minh tương đương với $2\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}C - \operatorname{cotg}B$. Áp dụng bổ đề 2 cho trường hợp M là trung điểm của BC ta có điều phải chứng minh.

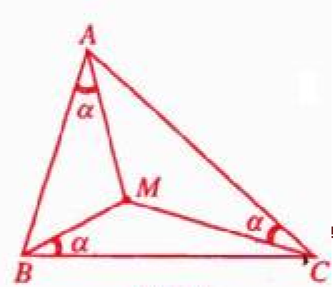
Bài toán 2. Giả sử M là điểm trong tam giác ABC sao $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$ (M; α tương ứng được gọi là điểm và góc Brocard).

a) Chứng minh rằng

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C.$$

b) Xác định dạng tam giác ABC để góc α lớn nhất.

Lời giải (h.1). Áp dụng định lí cotang cho các tam giác MAB, MBC, MCA ta được



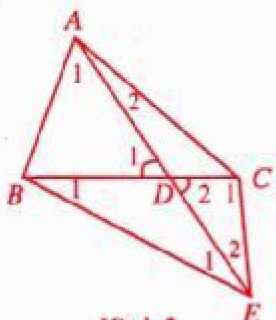
Hình 1

$$\text{cotg}\alpha = \frac{MA^2+c^2-MB^2}{4S_{MAB}} = \frac{MB^2+a^2-MC^2}{4S_{MBC}}$$
$$= \frac{MC^2+b^2-MA^2}{4S_{MCA}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}.$$

Suy ra $\text{cotg}\alpha = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$.

b) Ta có $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}} = \text{cotg}\alpha.$$

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S_{ABC}.\sqrt{3}$ (đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$) nên $\text{cotg}\alpha \geq \sqrt{3}$, suy ra $\alpha \leq 30^o$. Góc α lớn nhất bằng 30^o khi tam giác ABC đều.



Hình 2

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2DC$, kéo dài AD về phía D sao cho $AD = DE$. Chứng minh $2\widehat{BCE} - \widehat{CBE} = 180^o$.

Lời giải. (h. 2) Vì $BD = 2DC$ nên theo bổ đề 2 ta có

$$3\text{cotg}D_1 = 2\text{cotg}C - \text{cotg}B = 3\text{cotg}D_2 \quad (1)$$

Trong tam giác ABE với BD là trung tuyến. Áp dụng các bổ đề trên, ta có

$$\text{cotg}B_1 = \text{cotg}B + \text{cotg}E_1 - \text{cotg}A_1 \quad (2)$$
$$2\text{cotg}D_1 = \text{cotg}E_1 - \text{cotg}A_1 \quad (3)$$

Tương tự trong tam giác ACE, ta có

$$\text{cotg}C_1 = \text{cotg}C + \text{cotg}E_2 - \text{cotg}A_2 \quad (4)$$
$$2\text{cotg}D_2 = \text{cotg}A_2 - \text{cotg}E_2 \quad (5)$$

Từ (1) và (3) thay vào (2) được

$$\text{cotg}B_1 = \text{cotg}B + \frac{2}{3}(2\text{cotg}C - \text{cotg}B)$$
$$= \frac{\text{cotg}B + 4\text{cotg}C}{3}.$$

Do $\hat{B} = 2\hat{C}$ nên $\text{cotg}B = \dfrac{\text{cotg}^2C - 1}{2\text{cotg}C}$ suy ra

$$\text{cotg}B_1 = \frac{9\text{cotg}^2C - 1}{6\text{cotg}C} \quad (6)$$

Từ (1) và (5) thay vào (4) có

$$\text{cotg}C_1 = \text{cotg}C - \frac{2}{3}(2\text{cotg}C - \text{cotg}B)$$
$$= -\frac{1}{3\text{cotg}C} \quad (7)$$

Để có $2\widehat{BCE} - \widehat{CBE} = 180^o$ ta chứng minh $\text{cotg}2C_1 = \text{cotg}B_1$. Thật vậy

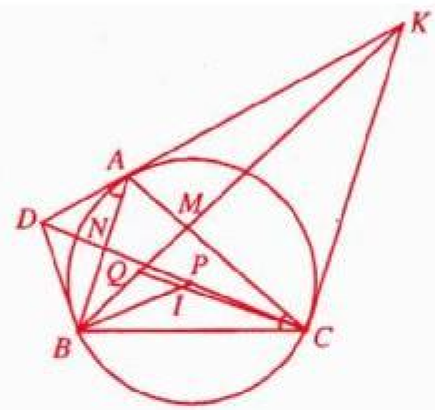
$$\text{cotg}^2C_1 - 1$$

Bài toán 4. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt tiếp tuyến tại A với đường tròn đó theo thứ tự ở D và K. Đường thẳng BK cắt AC tại M, đường thẳng CD cắt cạnh AB tại N, gọi Q là trung điểm của BM, P là trung điểm CN, đường thẳng BP cắt đường thẳng CQ tại I. Chứng minh rằng tam giác BIC cân.

Lời giải. (h.3). Giả sử $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Ta có $$\frac{CM}{AM} = \frac{S_{CBK}}{S_{ABK}} = \frac{BC\sin\widehat{BCK}}{AB\sin\widehat{BAK}}$$
$$= \frac{BC\sin C}{AB\sin A} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Từ đó theo bổ đề 2 phần b) ta có



Hình 3

$$a^2\text{cotg}\widehat{CBM} = (a^2+c^2)\text{cotg}B + c^2\text{cotg}C.$$

Trong tam giác BCM, CQ là trung tuyến có

$$\text{cotg}\widehat{BCQ} = 2\text{cotg}C + \text{cotg}\widehat{CBM}$$
$$\text{cotg}\widehat{BCQ} = 2\text{cotg}C + \frac{a^2+c^2}{a^2}\text{cotg}B + \frac{c^2}{a^2}\text{cotg}C$$
$$= 2\text{cotg}C + \text{cotg}B + \frac{c^2}{a^2}(\text{cotg}B + \text{cotg}C)$$
$$\text{cotg}\widehat{BCQ} = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C) + \text{cotg}A.$$

Tương tự

$$\text{cotg}\widehat{CBP} = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C) + \text{cotg}A$$

nên tam giác BIC là tam giác cân.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC và $AB = AM$. Chứng minh:

1) $3\text{cotg}B = \text{cotg}C$;

2) $\sin A = 2\sin(B - C)$.

Bài 2. Chứng minh rằng hai trung tuyến BM và CN của tam giác ABC vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\text{cotg}A = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C).$$

Bài 3. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A và B cắt nhau tại D, đường

Nhiều cách giải cho một bài toán

Tìm nhiều cách chứng minh một hệ thức *nhờ biến đổi tương đương*

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Từ một hệ thức nếu khéo sử dụng các phép biến đổi ta có thể nhận được nhiều hệ thức tương đương, mà mỗi hệ thức đó có một dạng riêng sẽ gợi cho ta tìm ra cách chứng minh tương ứng. Nếu ta chứng minh được một trong các hệ thức này thì suy ra được tất cả các hệ thức tương đương với nó. Như vậy, không những ta tìm được nhiều cách chứng minh hệ thức ban đầu mà còn có cách nhìn toàn diện hơn, hệ thống hơn về các hệ thức khác nhau về hình thức nhưng thống nhất với nhau về mối quan hệ toán học. Điều này được minh họa qua việc xét cách chứng minh một số hệ thức trong tam giác dưới đây.

Cho tam giác ABC với $AB = c, BC = a, CA = b$, $a + b + c = 2p$. Gọi S, R, r theo thứ tự là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA. Đặt $\widehat{CAB} = 2\alpha$, $\widehat{ABC} = 2\beta$, $\widehat{BCA} = 2\gamma$.

Trong bài này sẽ sử dụng một số hệ thức quen biết sau.

$$S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(I)}$$

Từ đó có $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$ (II)

Khai triển vế phải của (II) rồi thay $abc = 4Rrp$ vào và rút gọn được

$$ab + bc + ca - p^2 = 4Rr + r^2 \qquad \text{(III)}$$

Ta cũng biết:

$$\text{tg}\alpha = \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}, \ \text{tg}\beta = \frac{r}{p-b} = \frac{r_b}{p},$$

$$\text{tg}\gamma = \frac{r}{p-c} = \frac{r_c}{p} \qquad \text{(IV)}$$

✪ **Bài toán.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có hệ thức*

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{4R+r}{pr} \qquad (1)$$

Chứng minh. (*Cách 1*)

Đặt $T = \dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}$.

Ta có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} = \frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)} = \frac{c}{(p-a)(p-b)}.$$

Tương tự có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} = \frac{b}{(p-a)(p-c)};$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}.$$

Từ đó

$$2T = \frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{a}{(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{c(p-c)+b(p-b)+a(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2p^2-(a^2+b^2+c^2)}{pr^2}$$

Chú ý rằng $AO_1 = \dfrac{AP}{\cos\alpha} = \dfrac{p}{\cos\alpha}$ và

$r_a = p\text{tg}\alpha$ (theo (IV)) nên

$$2S_{O_1O_2O_3} = \frac{ap^2}{p.\text{tg}\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{p.2R.\sin 2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 4Rp \quad \text{(V)}$$

Mặt khác sử dụng (I), (IV) có

$$2S_{O_1O_2O_3} = S + S_{O_1BC} + S_{O_2AC} + S_{O_3AB}$$
$$= S + \frac{a}{2}.r_a + \frac{b}{2}.r_b + \frac{c}{2}.r_c$$
$$= S + \frac{aS}{2(p-a)} + \frac{bS}{2(p-b)} + \frac{cS}{2(p-c)}$$
$$= \frac{S}{2}\left(2 + \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right) \quad \text{(VI)}$$

Từ (V), (VI) và $S = pr$ suy ra hệ thức (3).

Ta lại biến đổi hệ thức (1) tương đương với

$$\frac{r}{p-a} + \frac{r}{p-b} + \frac{r}{p-c} = \frac{4R+r}{p}.$$

Sử dụng (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma = \frac{4R+r}{p} \quad (4)$$

Chứng minh. (*Cách 4*)

Sử dụng (IV) ta có

$$p = (p-a) + a = \frac{r}{\text{tg}\alpha} + 2R\sin 2\alpha.$$

Áp dụng công thức lượng giác của góc chia đôi với $\text{tg}\alpha = t$ ta có $p = \dfrac{r}{t} + \dfrac{4Rt}{1+t^2}$.

Quy đồng mẫu số rồi viết trong dạng phương trình đối với t ta được

$$pt^3 - (4R+r)t^2 + pt - r = 0 \quad \text{(VII)}$$

Như vậy $t = \text{tg}\alpha$ là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Tương tự như thế $\text{tg}\beta$, $\text{tg}\gamma$ cũng là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Áp dụng định lí Viète cho tổng ba nghiệm của phương trình bậc ba (VII) ta có hệ thức (4).

Trong bài tập 1 dưới đây hướng dẫn cách chứng minh hệ thức (4) (coi là cách (5)) bằng các phép biến đổi lượng giác. Với mỗi hệ thức (1), (2), (3), (4) ta có cách chứng minh tương ứng nhưng vì các hệ thức này tương đương với nhau nên nếu xuất phát từ một trong năm

Mời các bạn làm các bài tập sau có liên quan đến các hệ thức trên và cách chứng minh chúng.

Bài 1. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để chứng minh các hệ thức sau:

a) $\dfrac{4R}{p} = \dfrac{8R}{2R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)} = \dfrac{1}{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}$;

b) $\dfrac{r}{p} = \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma$.

Từ đó suy ra hệ thức (4) (*cách* (5)).

Bài 2. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{p-a}$, $\dfrac{1}{p-b}$, $\dfrac{1}{p-c}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$pr^2x^3 - (4R+r)rx^2 + px - 1 = 0.$$

Từ đó suy ra hệ thức (1).

Hướng dẫn. $\dfrac{4R}{p-(p-a)} = \dfrac{4R}{a} = \dfrac{4R}{2R\sin 2\alpha}$

$= \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha = \dfrac{r}{p-a} + \dfrac{p-a}{r}$,

đặt $x = \dfrac{1}{p-a}$ rồi quy đồng mẫu số.

Bài 3. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $p\text{tg}\alpha = \dfrac{(p-b)(p-c)}{r}$;

b) $p(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta) = 4R\cos^2\gamma$;

c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1 + 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$= 1 + \dfrac{r}{R}$;

d) $2p(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma) =$

$= 6R + 2R(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)$.

Từ đó suy ra hệ thức (4).

Bài 4. Gọi O_1, O_2, O_3 theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA. Hãy dựa vào bài tập 3b và $S_{O_1O_2O_3} = S_{CO_1O_3} + S_{CO_2O_3}$ để chứng minh $S_{O_1O_2O_3} = 2Rp$ (V). Từ đó suy ra hệ thức (3).

Bài 5. a) Chứng minh rằng hệ thức (3) tương đương với mỗi hệ thức (5), (6) sau: