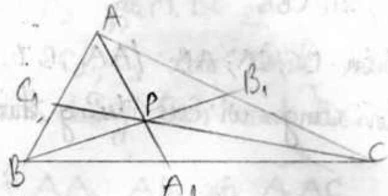
Định lí Cêva và định lí Mênêlauyt

Định lí Cêva và định lí Mênêlauyt là 2 định lí khá cơ bản trong hình học phẳng ở PTTH. Nó được ứng dụng rất linh hoạt trong nhiều bài toán ở các kì thi học sinh giỏi.

A: Định lí Cêva

I. Nội dung định lí:

Trên các cạnh BC, CA, AB của ΔABC lấy A_1, B_1, C_1. Cm: AA_1; BB_1; CC_1 đồng qui khi và chỉ khi: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.



Cm: (sử dụng diện tích). Gọi P là gđ của AA_1; BB_1; CC_1

$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AC_1C}}{S_{BCC_1}}=\frac{S_{APC_1}}{S_{BPC_1}}=\frac{S_{APC}}{S_{BPC}}$. Tương tự $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}$; $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}$

Nhân vế → đpcm.

Ngược lại: g/s: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Kẻ qua giao điểm của AA_1 và BB_1 đường thẳng CC_1' ($C_1'\in$ cạnh BC).

Theo cmt: $\frac{AC_1'}{C_1'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}$

$\Rightarrow \frac{AC_1'}{C_1'B}=\frac{AC_1}{C_1B}$.

$\Rightarrow C_1\equiv C_1'$ (do trên cạnh AB $\exists!$ 1 đ' X / $\frac{AX}{BX}=k$)

→ Định lí được cm.

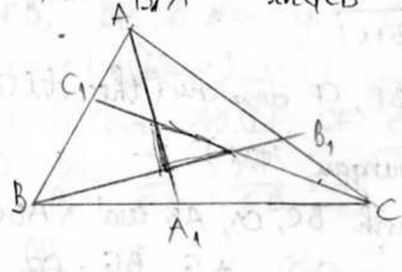
Chú ý: + Nếu A_1, B_1, C_1 nằm trên các đường thẳng kéo dài của các cạnh thì định lí vẫn đúng.

+. Từ định lí này ta có các kết quả quen thuộc: trong 1 Δ các 3 đường cao, 3 đường trung tuyến, 3 đường phân giác đồng qui.

+ Nếu các điểm A_1, B_1, C_1 là các điểm bất kì trên cạnh BC, AC, AB thì biểu thức viết lại như sau:

1. Bài toán: Cho ΔABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy A_1, B_1, C_1 bất kì. Cm.

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB}\cdot\frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC}\cdot\frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}.$$



Cm: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_1}{CC_1}\cdot\frac{CC_1}{C_1B} = \frac{\sin ACC_1}{\sin A}\cdot\frac{\sin B}{\sin C_1CB}$ (theo định hàm sin)

Tương tự: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}$

$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}\cdot\frac{\sin A}{\sin C}$

Nhân vế → đpcm.

1.1, Hệ quả 1. Áp dụng đl Ceva và kết quả bài toán trên ta dễ dàng có được 1 vài kết quả sau.

1.1. $\triangle ABC$ cân tại C và các đ' A_1, B_1, C_1 thứ thuộc các cạnh BC, CA, AB t/ AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui thì $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin ABA_1 \cdot \sin CAA_1}{\sin BAA_1 \cdot \sin CBB_1}$.

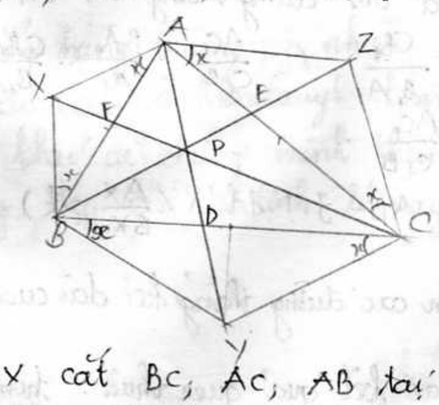
1.2. $\triangle ABC$ với A_1, B_1, C_1 nằm trên BC, CA, AB / AA_1, B_1B, CC_1 đồng qui. Cmr. AA_2; BB_2; CC_2 là các đường đối xứng với các đường thẳng đó qua phân giác cũng đồng qui tại 1đ'.

II. Ứng dụng của định lí Ceva.

Để hiểu rõ nhất về tính ứng dụng hiệu quả và phong phú của định lí chúng ta sẽ đến với 1 vài bài toán cụ thể sau đây.

Bài 1: (Chọn đội tuyển IMO, Hồng Kông 1998)

Cho $\triangle ABC$. Các $\triangle ABX$, BCY, CAZ cân và đồng dạng nhau, chúng ở ngoài $\triangle ABC$ và tm $XA = XB$, $YB = YC$, $ZC = ZA$. Cmr: AY, BZ, CX đồng qui.



Gọi AY, BZ, CX cắt BC, AC, AB tại D, E, F. Ta cm AD, BE, CF đồng qui.

Đặt $\widehat{XAB} = \widehat{XBA} = \widehat{YBC} = \widehat{YCB} = \widehat{ZAC} = \widehat{ZCA} = x$.

Ta có $\frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{S_{BDY}}{S_{CDY}} = \frac{S_{ABY}}{S_{ACY}} = \frac{AB.BY\sin(B+x)}{AC.CY\sin(C+x)} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin(B+x)}{\sin(C+x)}$

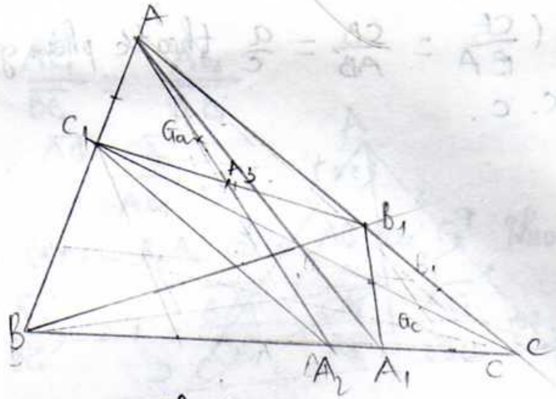
Tương tự: $\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{BA}\cdot\frac{\sin(C+x)}{\sin(A+x)}$

$\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin(A+x)}{\sin(B+x)}$

$\Rightarrow \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} = 1 \Rightarrow$ AD, BE, CF đồng qui (theo đl Ceva)

Bài 2 (Chọn đội tuyển IMO, Bungari 2001)

Cho A_1; B_1; C_1 bất kì trên cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$; G_a, G_b, G_c là trọng tâm của $\triangle AB_1C_1$; BA_1C_1; CA_1B_1. Cmr: AG_a; BG_b; CG_c đồng qui $\Leftrightarrow$ AA_1; BB_1; (



AA_1; BB_1; CC_1 đồng qui. Theo Ceva.

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

Gọi $AG_a \cap B_1C_1$ tại A_3 ; $AG_a \cap BC = A_2$; A_3 là trung điểm của B_1C_1.

Các điểm B_2, B_3; C_2, C_3 xác định tương tự.

$\Rightarrow A_3, B_3$; C_3 là trung điểm của B_1C_1; A_1C_1; A_1B_1.

$$\frac{S_{AA_3B_1}}{S_{AA_2C}}=\frac{\frac{1}{2}AA_3.\,AB_1\sin\widehat{A_2AC}}{\frac{1}{2}AA_2.\,AC\sin\widehat{A_2AC}}=\frac{AA_3}{AA_2}\cdot\frac{AB_1}{AC}$$

$$\frac{S_{AA_3C_1}}{S_{ABA_2}}=\frac{AA_3.\,AC_1}{AA_2.\,AB}$$

$$\frac{S_{AA_3B_1}}{S_{AA_2C}}\cdot\frac{S_{ABA_2}}{S_{AA_3C_1}}=\frac{AA_3}{AA_2}\cdot\frac{AB_1}{AC}\cdot\frac{AA_2}{AA_3}\cdot\frac{AB}{AC_1}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AB_1}{AC_1}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABA_2}}{S_{ACA_2}}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{BA_2}{CA_2}.\Rightarrow$$

Cm tương tự: $\dfrac{CB_2}{B_2A}=\dfrac{BC}{BA}\cdot\dfrac{BC_1}{BA_1}$.

$$\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{CA_1}{CB_1}.$$

Nhân vế: $\dfrac{BA_2}{CA_2}\cdot\dfrac{CB_2}{AB_2}\cdot\dfrac{AC_2}{BC_2}=1.$ $\Leftrightarrow AA_2$; BB_2; CC_2 đồng qui

(Theo định lí Ceva).

~~* 2 bài toán trên tiêu biểu cho thể~~

*. Trong 2 bài toán trên định lí Ceva vì được khai thác để chứng minh đồng qui. Ngoài ứng dụng đó, đl Ceva còn là công cụ chứng minh các bài ở bất đẳng thức và bất đẳng thức

Bài 3: Cho D, E, F là các điểm tương ứng nằm trên BC, CA, AB của $\triangle ABC$

$AD \perp BC$, $AF = FB$, BE là phân giác B. Cm: AD, BE, CF đồng qui $\Leftrightarrow$

$$a^2(a-c)=(b^2-c^2)(a+c)$$

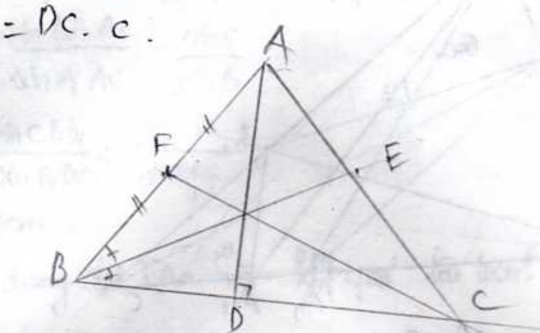
Cm: Theo định lí Ceva: AD, BE, CF đồng qui

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 \quad (\text{do } \frac{AF}{FB}=1)$$

$\Leftrightarrow \frac{BD}{DC}\cdot\frac{a}{c}=1$ ($\frac{CE}{EA}=\frac{CB}{AB}=\frac{a}{c}$ theo t/c phân giác)

$\Leftrightarrow BD.a = DC.c$.



$\Leftrightarrow AB\cos B.a = AC\cos C.c$.

$\Leftrightarrow ac.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = bc.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\Leftrightarrow a^2(a-c) = (b^2-c^2)(a+c)$

III. Bài tập áp dụng.

1. Giả sử ΔABC đều, P là 1 điểm bên trong nó. Cho các đường thẳng AP, BP, CP cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Cmr:

$A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1 \geq A_1B.B_1C.C_1A$. (chọn đội tuyển IMO 37)

2. Cho ΔABC cân với $\widehat{ABC}=120°$, D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của đtròn ngoại tiếp ΔABC. Đường thẳng qua D và qua O của đtròn cắt AB, A tại E, F, M, N là td của AB, BC. Cmr: AO, MF, NE đồng qui

3. (đội tuyển IMO)

Gọi A_1 là tâm của 1 hình vuông nội tiếp trong ΔABC nhọn với 2 đỉnh của hình vuông ở trên cạnh BC. Nh và 2 đỉnh còn lại trên cạnh AB và AC. Các đ' B_1, C_1 xác định tương tự cho các hình vuông nội tiếp với 2 đỉnh lần lượt trên AC và AB. Cmr: $AA_1; BB_1, CC_1$ đồng qui.

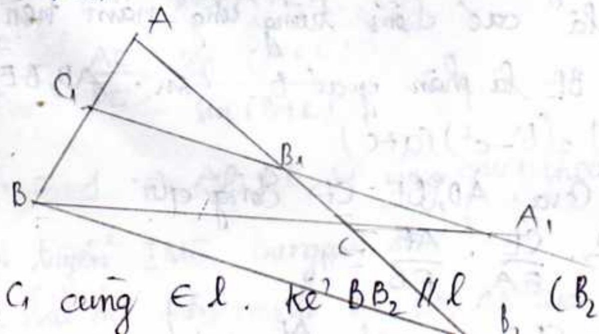
B. Định lí Mênêlauyt.

I. Nội dung định lí

Trên các cạnh BC, CA, AB của ΔABC (hoặc trên phần kéo dài của chúng) lấy A_1, B_1, C_1 tương ứng. Cmr: các điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=1.$$

Cm:



Giả sử: A_1, B_1, C_1 cùng $\in l$. Kẻ $BB_2 \parallel l$ ($B_2 \in AC$)

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{CB_1}};\quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_2B_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1 \quad (**)$$

Giả sử ngược lại có (**). B_1A_1 cắt AB tại C_1'. Theo cmt

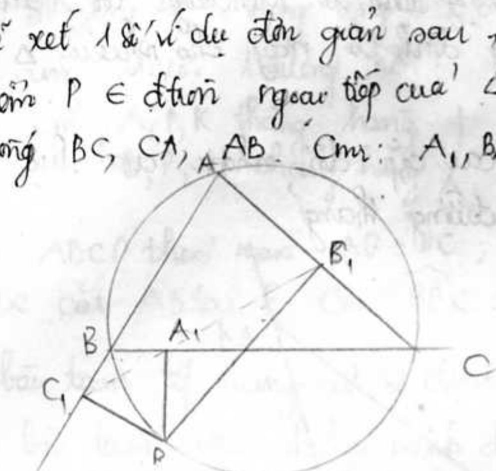
$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1'}}{\overline{BC_1'}} = 1 = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \Rightarrow \frac{\overline{AC_1'}}{\overline{BC_1'}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}$$

$\Rightarrow C_1 \equiv C_1'$ (vô)

II. Ứng dụng

Chúng ta sẽ xét 1 số ví dụ đơn giản sau:

Bài toán 1. Điểm $P \in$ đtròn ngoại tiếp của ΔABC, A_1, B_1, C_1 là chân đường vuông góc hạ từ P xuống BC, CA, AB. Cmr: A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.



Để cm: A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. Ta sẽ cm: $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = 1$.

Sau đó sử dụng đl Menelaus.

Có $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{BP\cos\widehat{PBC}}{CP\cos\widehat{PCB}}$; $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = -\frac{CP\cos\widehat{PCA}}{AP\cos\widehat{PAC}}$; $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = -\frac{AP\cos\widehat{PAB}}{BP\cos\widehat{PBA}}$

Mà $\widehat{PAC} = \widehat{PBC} \rightarrow \cos\widehat{PAC} = \cos\widehat{PBC}$

$\widehat{PAB} = \widehat{PCB} \rightarrow \cos\widehat{PAB} = \cos\widehat{PCB}$

$\widehat{PCA} + \widehat{PBA} = 180^\circ \rightarrow \cos\widehat{PCA} = -\cos\widehat{PBA}$

$\Rightarrow$ đpcm.

Rõ ràng đây là một bài toán quen thuộc và đơn giản ở THCS, có một vài cách giải ± nhưng lời giải trên có lẽ là ngắn gọn hơn cả. Điều đó cho thấy hiệu quả lớn khi sử dụng định lí Menelaus kết hợp với hệ thức lượng trong Δ.

Bài toán 2. (THTT 3/05)

Trong Δ vuông ABC vuông C kẻ đường cao CK, phân giác CE của ΔACK; D là trung điểm của AC. $DE \cap CK \equiv F$. Cmr: BF // CE

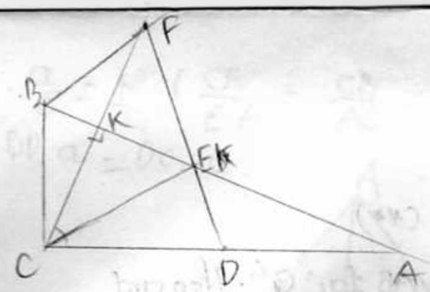
G

$\widehat{BCE} = \widehat{BCK} + \widehat{ECK} = \widehat{CAE} + \widehat{ACE} = \widehat{CEB}$

$\rightarrow \Delta BCE$ cân tại B $\Rightarrow BE = BC$

$\Rightarrow \Delta BCK \backsim \Delta ABC$ ΔBAC

$\Rightarrow \frac{CK}{BK} = \frac{AC}{BC}$



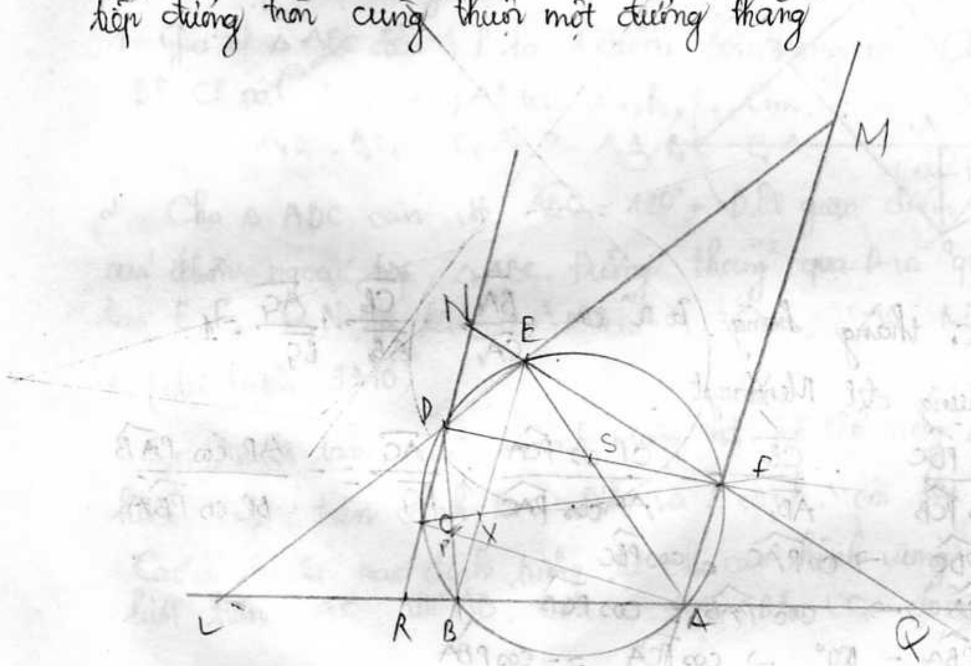
Áp dụng đl Mênêlauyt trong $\triangle ACK$ với cát tuyến DEF

$$\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AE}{EK}\cdot\frac{KF}{FC}=1 \Rightarrow \frac{KF}{FC}=\frac{EK}{AE}=\frac{CK}{AC}=\frac{BK}{BC}=\frac{BK}{BE}$$

$$\Rightarrow BF \parallel CE$$

Trong 2 bài toán trên ta chỉ sử dụng định lí Menelauyt với 1 cát tuyến. Tuy nhiên với nhiều bài toán phải áp dụng định lí này cho nhiều $\triangle$ với các cát tuyến khác nhau.

Bài toán 3: Cm: giao điểm các cặp đối nhau của lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn cùng thuộc một đường thẳng



Kí hiệu các điểm như hình vẽ. Ta p' cm: L; N; M thẳng hàng –

Áp dụng định lí Mênêlauyt với $\triangle PQR$ với 3 cát tuyến LDF, AMF, BCN

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{RD}}\cdot\frac{\overline{RL}}{\overline{QL}}\cdot\frac{\overline{QE}}{\overline{PE}}=1,\quad \frac{\overline{RA}}{\overline{QA}}\cdot\frac{\overline{PM}}{\overline{RM}}\cdot\frac{\overline{QF}}{\overline{PF}}=1,\quad \frac{\overline{RB}}{\overline{QB}}\cdot\frac{\overline{QN}}{\overline{PN}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{RC}}=1.$$

Nhân vế chú ý: $PD.PC = PE.PF$

$QF.QE = QA.QB$

$RC.RD = RB.RA$

$$\Rightarrow \frac{\overline{RL}}{\overline{QL}}\cdot\frac{\overline{PM}}{\overline{RM}}\cdot\frac{\overline{QN}}{\overline{PN}}=1 \Rightarrow M, N, L \text{ thẳng hàng}.$$

Chú ý: Nếu $AE \cap DF = S$; $BE \cap CF = X$, $AC \cap BD = \{P\}$ thì X; S, P thẳng hàng

Đây là nội dung định lí Pascal.

Cách cm: chủ yếu dựa vào định lí Ceva.

III. Bài tập

1. dự tuyển IMO 38

Cho $A_1A_2A_3$ là Δ cân, I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi C_i ($i=1,2,3$) là các đường tròn bé hơn qua I và tiếp xúc A_iA_{i+1} và A_iA_{i+2}. (phép cộng chỉ số có mod 3)

Gọi B_i; $i=1,2,3$ là giao điểm thứ 2 của C_{i+1} và C_{i+2}. Cmr: 3 tâm của các đường tròn ngoại tiếp các ΔA_1B_1I; A_2B_2I, A_3B_3I thẳng hàng.

2. (Ấn) Trên mặt phẳng cho 2 đtròn (C_1); (C_2) cắt nhau tại P, Q. Gọi AB là tiếp tuyến chung gần P hơn của (C_1) (C_2) (A, B tương ứng $\in (C_1)$; (C_2)). Tiếp tuyến tại P của (C_1) cắt (C_2) tại E, Tiếp tuyến tại P của (C_2) cắt (C_1) tại F ($E, F \neq P$).

Trên các tia AF, BF lấy H, K tương ứng sao cho $AH = AP$, $BK = BP$. Cmr: 5 điểm A, H, Q, K, B cùng thuộc 1 đường tròn.

(Gợi ý: Cm A, P, K thẳng hàng
B, P, H thẳng hàng)

3. Cho tứ giác ABCD thoả mãn $AD = DC$; $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} < 90°$. Đường thẳng qua D và trung điểm BC cắt AB tại E. Cm: $\widehat{BEC} = \widehat{DAC}$.

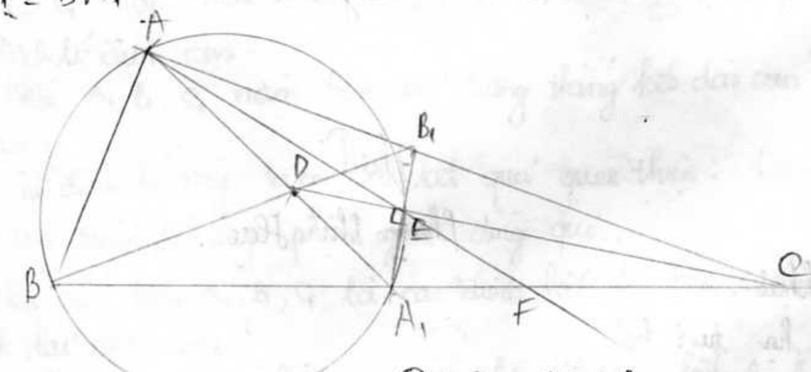
C. Các bài toán áp dụng cả 2 định lí

Trong một số bài toán việc chứng minh đòi hỏi phải áp dụng cả 2 định lí này. Từ 1 trong 2 định lí thiết lập tỉ số rồi đưa vào định lí còn lại cm yêu cầu của đề bài. Sau đây là 1 vài bài toán minh hoạ cho trường hợp này

Bài toán 1: Bungari 01

Gọi A_1, B_1 là các điểm tương ứng trên BC, AC của ΔABC, $AA_1 \cap BB_1 \equiv D$

$A_1B_1 \cap CD \equiv E$. Cmr nếu $\widehat{A_1EC} = 90°$ và A_1; B; A; E cùng thuộc 1 đường tròn thì $AA_1 = BA_1$



Gọi $F \equiv AE \cap BC$

Áp dụng định lí Ceva trong ΔAA_1C có CD; A_1B_1; AF đồng qui

$$\Rightarrow \frac{AD}{A_1D} \cdot \frac{A_1F}{CF} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1.$$

Áp dụng định lí Mênêlauyt trong ΔAA_1C có cát tuyến BDB_1

$$\frac{AD}{A_1D} \cdot \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A_1F}{\ldots} = \frac{BA_1}{\ldots} \Rightarrow (BFA_1C) = -1$$

$\Rightarrow$ Gọi B' là điểm trên A_1B / $\widehat{B'EA_1} = \widehat{A_1EF}$

$\Rightarrow EA_1$ là phân giác của $B'EF$.

Mà $A_1E \perp EC \Rightarrow EC$ là phân giác ngoài đỉnh E của $\triangle B'EF$.

Theo tính chất phân giác. $\frac{A_1B'}{CB'} = \frac{A_1F}{CF} = \frac{A_1B}{CB}$

$\Rightarrow B \equiv B'$.

$\Rightarrow EA_1$ là phân giác của $\widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{BEA_1} = \widehat{A_1EF}$

$\Rightarrow \widehat{BAA_1} = \widehat{A_1BA}$

$\Rightarrow AA_1 = A_1B$.

Bài toán 2: Cho $\triangle ABC$ với các đường cao AD, BE, CF. Gọi C_1 và B_1, A_2 và C_2; A_3 và B_3 thứ tự là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC, của E lên BC, BA của F lên CB và CA. Gọi $BC \cap B_1C_1 \equiv M$; $AC \cap A_2C_2 \equiv N$; $AB \cap A_3B_3 \equiv P$.

Cm: M, N, P thẳng hàng.

Đây là bài toán khá đơn giản. Ta chỉ cần áp dụng định lí Mênêlauyt cho $\triangle ABC$ với cát tuyến MB_1C_1; NA_2C_2; PA_3B_3.

Rồi áp dụng định lí Cêva cho $\triangle ABC$ với AD, BE, CF đồng qui sẽ có được điều phải chứng minh

Lời kết:

Đồng qui và thẳng hàng thường gặp nhiều trong đề thi học sinh giỏi các nước. Trong đó 2 công cụ Cêva và Mênêlauyt không phải trường hợp nào cũng thích hợp. Còn nhiều cách khác để chứng minh thẳng hàng và đồng qui cũng như còn nhiều ứng dụng đẹp của 2 định lí này mà tôi chưa thể nêu hết ra được.

Huệ

Phạm Thị Huệ.

Tài liệu tham khảo.

- Tạp chí Toán học tuổi trẻ.
- Đề thi của các nước và khu vực
- Tuyển tập các bài dự tuyển toán quốc tế.
- Trang web: www.diendantoanhoc.net.