1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN

1.1. Định nghĩa đa thức :

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta gọi f là đa thức nếu : $f \equiv const$ (hằng số) hoặc tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 1$ và các số thực $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ với $a_0 \neq 0$ sao cho $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$.

• $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ gọi là các hệ số. Trong đó $a_0 \neq 0$ là hệ số cao nhất ; a_n là hệ số tự do. Đặc biệt $a_0 = 1$ gọi là đa thức chuẩn tắc hay mônic.

• Với $a_0 \neq 0$ thì n là bậc của đa thức $f(x)$, kí hiệu $\deg f = n$.

Đặc biệt $f \equiv const$ thì $\deg f = 0$.

• Đôi khi ta viết gọn : $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ hay viết ngược lại :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0,\ b_n \neq 0.$$

1.2. Đa thức trên các tập số :

Cho $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$

Nếu các hệ số $a_i \in \mathbb{R}$ thì kí hiệu $f \in \mathbb{R}[x]$.

Nếu các hệ số $a_i \in \mathbb{Q}$ thì kí hiệu $f \in \mathbb{Q}[x]$.

Nếu các hệ số $a_i \in \mathbb{Z}$ thì kí hiệu $f \in \mathbb{Z}[x]$.

1.3. Các phép toán :

Cho : $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$;

$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$.

Khi đó ta có 3 phép toán thông thường :

$$f(x) + g(x)\ ;\ f(x) - g(x)\ ;\ f(x).g(x)$$

và phép hợp $f_0 g(x) = f(g(x))$.

• Từ $f(x), g(x)$ ta có thể viết theo hình thức sau :

$$f(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + ... + A_{k-1}x + A_k\ ;$$

$$g(x) = B_0x^k + B_1x^{k-1} + ... + B_{k-1}x + B_k.$$

Với : $k = \max\{n ; m\}$; $A_i = 0$ hoặc a_j, $B_i = 0$ hoặc b_j thì ta có :

Thì : $f(x) \pm g(x) = (A_0 \pm B_0)x^k + (A_1 \pm B_1)x^{k-1} + ... + (A_k \pm B_k)$;

$$f(x).g(x) = c_0x^{2k} + c_1x^{2k-1} + \ldots + c_{2k-1}x + c_{2k}.$$

Kết quả : Cho $f, g \in \mathbb{R}[x]$ và $\deg f = n, \deg g = m$. Thì :

$$\deg(f \pm g) \le \max\{m ; n\} ; \deg f.g = n + m ; \ \deg f_0 g = n.m.$$

1.4. Đa thức sai phân :

Cho $f \in \mathbb{R}[x], \deg f = n$, đa thức sai phân :

$$\Delta f = f(x+1) - f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x+1)^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left[(x+1)^{n-i} - x^{n-i}\right]$$

có bậc là $n-1$ và hệ số cao nhất là na_0.

Từ đó ta có dãy đa thức sai phân giảm dần một bậc $\Delta^k f$.

1.5. Đa thức Trê-bư-sếp :

Cho $T_n(x)$ với $\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x), n \ge 1 \end{cases}$

Cụ thể : $T_0(x) = 1 ; T_1(x) = x ; T_2(x) = 2x^2 - 1 ;$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x ; T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 ; T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \ldots$

Đa thức Trê-bư-sếp $T_n(x)$ có bậc là n và có hệ số cao nhất là 2^{n-1}. Đôi khi ta chỉ xét $n \ge 1$ trở đi.

Kết quả :

(1) : $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n \ge 1$.

Khi $n = 1 : T_1(\cos\alpha) = \cos\alpha$.

Khi $n = 2 : T_2(\cos\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$.

Giả sử $T_k(\cos\alpha) = \cos k\alpha$. Thì :

$$\begin{aligned} T_{k+1}(\cos\alpha) &= 2\cos\alpha.T_k(\cos\alpha) - T_{k-1}(\cos\alpha) \\ &= 2\cos\alpha.\cos k\alpha - \cos(k-1)\alpha \\ &= \cos(\alpha + k\alpha) + \cos(\alpha - k\alpha) - \cos(k-1)\alpha \\ &= \cos(k+1)\alpha \text{ đúng.} \end{aligned}$$

Do đó : $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$.

(2) : $|T_n(x)| \le 1, \forall x \in [-1 ; 1]$.

Vì $|x| \le 1$ nên đặt $x = \cos\alpha \Rightarrow |T_n(x)| = |T_n(\cos\alpha)| = |\cos n\alpha| \le 1$.

(3) : $|T_n(x)| = 1$ có đúng n nghiệm phân biệt trên đoạn $[-1 ; 1]$ là $x = \cos k\dfrac{\pi}{n}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Với $|x| \le 1$ thì $|T_n(x)| = 1 \Leftrightarrow |\cos n\alpha| = 1$

$$\Leftrightarrow \sin n\alpha = 0 \Leftrightarrow n\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = k\frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó : $x = \cos\alpha = \cos k\frac{\pi}{n}, k = 0, 1, ..., n-1.$

1.6. Đa thức lượng giác :

Dạng $L_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Với $|a_n| + |b_n| \neq 0$ gọi là đa thức lượng giác cấp n với các hệ số a_0, a_k, b_k.

Nếu các $a_k = 0$ thì $L_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx.$

Nếu các $b_k = 0$ thì $L_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx.$

Bài tập 1 : Cho các đa thức sau : $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$;

$$g(x) = 4x^2 - x + 3; h(x) = -x^3 + x^2 + 8.$$

Xác định $f(x) + g(x); f(x).g(x); h(x^3)$ và $g_0h(x)$.

Giải :

Ta có : $f(x) + g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 + 4x^2 - x + 3 = x^3 + 2x^2 + 2.$

$$f(x).g(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 1)(4x^2 - x + 3)$$
$$= 4x^5 - 9x^4 + 9x^3 - 11x^2 + 4x - 3.$$

$$h(x^3) = -(x^3)^3 + (x^2)^3 + 8 = -x^9 + x^6 + 8.$$

$$g_0h(x) = g(h(x)) = 4(-x^3 + x^2 + 8)^2 - (-x^3 + x^2 + 8) + 3$$
$$= 4x^6 - 8x^5 + 4x^4 - 63x^3 + 63x^2 + 251.$$

Bài tập 2 : Tìm đa thức $f(x)$ trong các trường hợp :

a) $f(x+1) = x^2 + 5x - 1.$

b) $f(x-2) = x^3 - 6x^2 + 12x + 8.$

Giải :

a) Đặt $t = x + 1 \Rightarrow x = t - 1$ thì $f(x+1) = x^2 + 5x - 1$ trở thành :

$$f(t) = (t-1)^2 + 5(t-1) - 1 = t^2 + 3t - 5.$$

Vậy : $f(x) = x^2 + 3x - 5.$

b) Ta có : $f(x-2) = x^3 - 6x^2 + 12x + 8 = (x-2)^3 + 16.$

Vậy : $f(x) = x^3 + 16.$

Bài tập 3 : Tìm đa thức $f(x)$ thoả mãn các trường hợp sau :

a) $(x^2 - x + 2)^2 + (x-2)^2 = (x^2 + 4)f(x).$

b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (f(x))^2.$

c) $\deg f = 2$ và $f(x) - f(x-1) = x.$

Giải :

a) Vì deg của vế trái là 4 nên $\deg f = 2.$

Do đó : $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$

Mà hệ số cao nhất của vế trái là 1 nên $a = 1$. Ta khai triển đồng nhất :

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = (x^2 + 4)(x^2 + bx + c)$$
$$= x^4 + bx^3 + (4+c)x^2 + 4bx + 4c.$$

Do đó : $\begin{cases} b = -2 \\ 4 + c = 6 \\ 4b = -8 \\ 4c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2. \end{cases}$

Vậy : $f(x) = x^2 - 2x + 2.$

b) Vì deg của vế trái là 4 nên $\deg f = 2.$

Mà hệ số cao nhất của vế trái là 1 nên $a = 1.$

Do đó : $f(x) = x^2 + ax + b.$

Ta có : $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + ax + b)^2$
$$= x^4 + 2ax^3 + (2b + a)x^2 + 2abx + b^2.$$

Do đó : $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b + a = 3 \\ 2ab = 2 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$

Nên : $f(x) = x^2 + x + 1.$

Vậy ta có đa thức đối nhau : $f(x) = x^2 + x + 1$ hoặc $f(x) = -x^2 - x - 1.$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$

Từ $f(x) - f(x-1) = x$ ta đồng nhất hệ số, suy ra $a = b = \frac{1}{2}.$

Vậy : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$, c tuỳ ý.

Bài tập 4 : Tìm tất cả các đa thức khác không $P(x)$ thoả mãn đồng nhất thức :

a) $P(x^2) \equiv [P(x)]^2, x \in \mathbb{R}$ (*Rumani 80*)

b) $P(x^2 - 2x) \equiv [P(x-2)]^2, x \in \mathbb{R}$ (*Bungari 76*)

Giải :

a) Giả sử đa thức cần tìm có dạng :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_n \neq 0.$$

Giả thiết rằng một trong các hệ số $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ khác không. Chọn số k lớn nhất $(k < n)$ sao cho $a_k \neq 0$. Khi đó ta có :

$$P(x^2) \equiv a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + ... + a_1 x^2 + a_0$$
$$\equiv (a_n x^n + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0)^2 \equiv [P(x)]^2.$$

Cân bằng các hệ số của x^{n+k} ta nhận được : $0 = 2a_n a_k$.

Điều này trái với giả thiết $a_n \neq 0$.

Suy ra : $a_{n-1} = a_{n-2} = ... = a_1 = a_0 = 0$. Và $P(x) = a_n x^n$.

Từ điều kiện : $a_n x^{2n} \equiv P(x^2) \equiv [P(x)]^2 \equiv a_n{}^2 x^{2n}$, ta nhận được :

Ta nhận được : $a_n = 1$.

Vậy : $P(x) = x^n, (n \in \mathbb{Z}^+)$.

b) Kí hiệu : $y = x - 1, Q(y) = P(y-1)$. Khi đó :

$$[P(x-2)]^2 \equiv [P(y-1)]^2 \equiv [Q(y)]^2;$$
$$P(x^2 - 2x) \equiv P(y^2 - 1) \equiv Q(y^2).$$

Đồng nhất thức đã cho viết thành : $Q(y^2) \equiv [Q(y)]^2, y \in \mathbb{R}$.

Do đó, theo kết quả trên thì $Q(y) = y^n$ hay $P(y) = (y+1)^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Vậy : $P(x) = (x+1)^n, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài tập 5 : Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện :

$$P(x).P(y) = P^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - P^2\left(\frac{x-y}{2}\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Giải :

Nhận xét rằng : $P(x) = 0$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Ta xét trường hợp $P(x) \neq 0$. Thay $x = 0, y = 0$ vào (1) có $P(0) = 0$.

Với $y = 3x$ thì (1) thu được : $P(x).P(3x) = P^2(2x) - P^2(-x)$.

Hay $P(x).P(3x)+P^2(-x)=P^2(2x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Nếu $P(x)=c, \forall x (c \neq 0)$: không thoả mãn (2).

Nếu $\deg P(x)=n \geq 1$:

Gọi hệ số cao nhất của $P(x)$ là a_0 $(a_0 \neq 0)$, thì từ (2) :

$$a_0(3^n a_0)+a_0^2=(2^n a_0)^2 \Leftrightarrow 3^n+1=4^n \Leftrightarrow n=1.$$

Do đó : $P(x)=a_0 x, a_0 \in \mathbb{R} ; a_0 \neq 0.$

Thử lại đa thức bậc nhất này thoả mãn điều kiện đề bài.

Vậy : $P(x)=ax, a \in \mathbb{R}.$

Bài tập 6 : Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có các hệ số nguyên không âm, nhỏ hơn 6 thoả mãn $P(6)=1994$.

Giải :

Giả sử đa thức cần tìm có dạng :

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0.$$

Theo bài thì : $P(6)=a_n 6^n+a_{n-1}6^{n-1}+...+a_1 6+a_0=1994.$

Vì $a_i, i=0,1,...,n$ là số nguyên không âm, nhỏ hơn 6 nên :

$$P(6)=a_n 6^n+a_{n-1}6^{n-1}+...+a_1 6+a_0=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}_{(6)}=1994.$$

Trong đó : $\overline{a_n a_{n-1}...a_0}_{(6)}$ là biểu diễn của 1994 trong hệ đếm cơ số 6 và vì $1994=13122_{(6)}$.

Nên : $\overline{a_n a_{n-1}...a_0}_{(6)}=13122 \Rightarrow n=4, a_4=1, a_3=3, a_2=1, a_1=a_0=2.$

Đa thức cần tìm là : $P(x)=x^4+3x^3+x^2+2x+2.$

Thử lại ta thấy đa thức P(x) là duy nhất và thoả mãn đề ra.

Bài tập 7 : Cho đa thức bậc hai : $f(x)=x^2+px+q$. Xác định đa thức bậc 4 g(x) chuẩn tắc (hệ số cao nhất bằng 1) thoả mãn : $f(g(x))=g(f(x))$.

Giải :

Xét $g(x)=f(f(x))$ thì g(x) thoả đề bài.

Ta chứng minh đa thức đó là duy nhất.

Giả sử ta có đa thức h(x) thoả đề bài sao cho $f(h(x))=h(f(x))$.

Đặt $p(x)=f(f(x))-h(x)$ thì $\deg p<4$ (cùng hệ số cao nhất). Suy ra :

$$p(f(x))=f(f(f(x)))-h(f(x))=f(f(f(x)))-f(h(x))$$

$$=[f(f(x))]^2+pf(f(x))+q-(h(x))^2-ph(x)-q$$
$$=\left[f(f(x))^2-(h(x))^2\right]+p\left[(f(f(x)))-h(x)\right]$$
$$=p(x)\left[f(f(x))+h(x)+p\right]$$

$\Rightarrow \deg p.\deg f=\deg p+4\to \deg p=4$: vô lí.

Vậy : $g(x)=f(f(x))$
$$=x^4+2px^3+(p^2+p+2q)x^2+p(2q+p)x+q(p+q+1).$$

Bài tập 8 : Cho đa thức lượng giác :
$$f(x)=\cos 4x+a\cos 2x+b\sin 2x.$$

Chứng minh :

a) $f(x)$ nhận giá trị dương và âm với mọi a, b.

b) Nếu $f(x)\ge -1, \forall x$ thì $a=b=0$.

Giải :

a) Theo giả thiết : $f(x)=\cos 4x+a\cos 2x+b\sin 2x$.

Ta có : $f(0)=1+a\,;\, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-a$.

Suy ra : $f(0)+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2>0$ nên $f(x)$ có giá trị dương.

Tương tự : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-2<0$ nên $f(x)$ có giá trị âm.

b) Ta có : $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1-b\ge -1\Rightarrow b\le 0$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1+b\ge -1\Rightarrow b\ge 0.$$

Do đó : $b=0$.

Nên $f(x)\ge -1 \Leftrightarrow \cos 4x+a\cos 2x\ge -1, \forall x$

$\Leftrightarrow 2t^2+at\ge 0, \forall t\in[-1;1]$ (với $t=\cos 2x$).

$\Leftrightarrow a=0$.

Vậy : $a=b=0$.

Bài tập 9 : Xét hàm số $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn :

Nếu $Q(x)$ là đa thức với hệ số thực có bậc ≥ 2 thì $P(Q(x))$ cũng là một đa thức. Chứng minh P(x) là một đa thức.

Giải :

Xét đa thức $Q(x) = x^2$. Từ giả thiết của bài ta có $P(x^2)$ là đa thức.

Đặt $P(x^2) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$.

Hàm số (biến x) $P(x^2)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

Do đó $a_i = 0, \forall i$ lẻ $\in \{0; 1; 2; ...; k\}$.

Từ đó suy ra P(x) là đa thức trên $[0; +\infty)$.

Tương tự xét $Q(x) = -x^2$, ta được $P(x)$ là đa thức trên $(-\infty; 0]$.

Như vậy tồn tại các đa thức R(x) và S(x) sao cho :

$$P(x) = \begin{cases} R(x) \text{ nếu } x \geq 0 \\ S(x) \text{ nếu } x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Chọn $Q(x) = x^3$ ta được $P(x^3)$ là đa thức.

Đặt $T(x) = P(x^3)$. Từ (1) ta có :

$T(x) = R(x^3), \forall x \geq 0$; $T(x) = S(x^3), \forall x < 0$

$\Rightarrow R(x^3) \equiv T(x) \equiv S(x^3) \Rightarrow R(x) \equiv S(x)$

Vậy $P(x)$ là một đa thức.

Bài tập 10 : Tìm số tất cả các đa thức P(x) bậc không lớn hơn 3 với các hệ số nguyên không âm và thoả mãn điều kiện $P(3) = 2000$.

Giải :

Xét trường hợp bậc của $P(x) \leq 1$.

Giả sử : $P(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{N})$.

$$P(3) = a.3 + b = 2000.$$

Suy ra : $0 \leq a \leq \left[\dfrac{2000}{3}\right] = 666$.

Như vậy có 667 đa thức P(x) với bậc nhỏ hơn hoặc bằng 1 thoả mãn điều kiện đề bài. (1)

Xét trường hợp bậc của P(x) bằng 2, thì :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \ (a, b, c \in \mathbb{N}, a > 0).$$

$P(3) = 9a + 3b + c = 2000.$

Ta có : $0 < a \leq \left[\dfrac{2000}{9}\right] = 222$.

Do đó : $3b + c = 2000 - 9a$.

Suy ra : $0 \le b \le 666 - 3a$. Tức là có $667 - 3a$ số b.

Bởi vậy số đa thức P(x) của trường hợp này :

$$\sum_{a=1}^{222}(667-3a) = 667.222 - 3(1+2+3+...+222)$$

$$= 667.222 - \frac{3.222.223}{2} = 73815 \qquad (2)$$

Trường hợp còn lại bậc của P(x) bằng 3 :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{N}, a > 0)$$

$$P(3) = 27a + 9b + 3c + d = 2000.$$

Tương tự như các đánh giá ở trên, ta có :

$$1 \le a \le \left[\frac{2000}{27}\right] = 74,$$

$0 \le b \le \left[\dfrac{2000-27a}{9}\right] = 222 - 3a$, có $223 - 3a$ có giá trị b,

$0 \le c \le \left[\dfrac{2000-27a-9b}{3}\right] = 666 - 9a - 3b$, có $667 - 9a - 3b$ giá trị c.

Từ đó số đa thức của trường hợp này là :

$$\sum_{a=1}^{74}\sum_{b=0}^{222-3a}(667-9a-3b) =$$

$$= \sum_{a=1}^{74}\left[(667-9a)(223-3a) - 3(0+1+...+(222-3a))\right]$$

$$= \sum_{a=1}^{74}\left[(667-9a)(223-3a) - \frac{3(222-3a)(223-3a)}{2}\right]$$

$$= \sum_{a=1}^{74}\left(74482 - \frac{4011}{2}a + \frac{27}{2}a^2\right) = 1807043. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra số đa thức P(x) thoả mãn đề bài là :

$$667 + 73815 + 1807043 = 1881525.$$

2. HỆ SỐ VÀ GIÁ TRỊ ĐA THỨC

2.1. Hệ số : Cho $f \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f = n$.

Nếu viết : $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^{n-i}$ thì hệ số theo x^k là a_{n-k}.

Nếu viết : $f(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$ thì hệ số theo x_k là b_k.

2.2. Đa thức đồng nhất :

Cho :
$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$$
$$f \equiv g \Leftrightarrow n = m \text{ và } a_i = b_i,\ i = 0, 1, ..., n.$$

Ta thường gọi là đồng nhất hệ số cùng bậc : $a_i = b_i$.

2.3. Các hằng đẳng thức :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

...

- $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + ...$
$$+ \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + ... + nab^{n-1} + b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k \text{ với } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Đặc biệt : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Chú ý : $x^k = x^0x^k = x^1x^{k-1} = x^2x^{k-2} = ...$

Chứng minh tổng quát nhị thức Niu-tơn : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$ bằng phương pháp quy nạp.

2.4. Tổng các hệ số :

Cho đa thức P(x) sau khi khai triển, rút gọn được dạng :

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 + a_0$$

với cách viết hệ số a_k đi theo luỹ thừa x^k.

Ta có : $P(1)=a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$

$$P(-1)=(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots + (-1)a_1 + a_0$$

$\Rightarrow P(1)+P(-1)=2(a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{2m}+\ldots)$

và $P(1)-P(-1)=2(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2m+1}+\ldots)$

Do đó khi khai triển đa thức ta có :

- Tổng các hệ số là P(1).
- Tổng các hệ số theo luỹ thừa lẻ : $\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$.
- Tổng các hệ số theo luỹ thừa chẵn : $\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$.

Đặc biệt : Hàm đa thức chẵn $P(-x)=P(x)$ thì các hệ số $a_{2k+1}=0$, còn hàm đa thức lẻ $P(-x)=-P(x)$ thì các hệ số $a_{2k}=0$.

Bài tập 11 : Tìm hệ số theo x^3 của đa thức sau khi khai triển :

a) $P(x)=(x+1)^3+(x+2)^3+(x+4)^4$.

b) $Q(x)=(x+1)^2(x^4+8x^3-x^2+1)$.

Tìm tổng các hệ số theo luỹ thừa chẵn.

Giải :

a) Ta có : $(x+a)^3$ khai triển thì hệ số theo x^3 là 1.

Mà $(x+4)^4=x^4+4x^3.4+6x^2.4+4.x.4^3+4^4$ nên hệ số theo x^3 là 16.

Vậy hệ số theo x^3 là 18.

b) Ta có : $Q(x)=(x^2+2x+1)(x^4+8x^3-x^2+1)$

Để ý : $x^3=x^3.x^0=x^2.x^1$ nên hệ số theo x^3 là $-2+8=6$.

Tổng các hệ số theo luỹ thừa chẵn :

$$\frac{Q(1)+Q(-1)}{2}=\frac{36+0}{2}=18.$$

Bài tập 12 : Tìm hệ số :

a) Theo x^m của khai triển : $P(x)=(1+x)^n, 0\le m\le n$.

b) Theo x^8 của khai triển : $Q(x)=(x+4)^{50}+(3x^2-5)^{41}$.

Tìm tổng các hệ số sau khi khai triển.

Giải :

a) Áp dụng khai triển nhị thức Niu-tơn :

$$P(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 1^{n-k}x^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k.$$

Do đó hệ số theo x^m là : C_n^m $(0\le m\le n)$.

b) $Q(x)=(x+4)^{50}+(3x^2+(-5))^{41}$

$$=\sum_{i=0}^{50}C_{50}^i x^{50-i}4^i+\sum_{j=0}^{41}C_{41}^j(3x^2)^{41-j}(-5)^j.$$

Hệ số theo x^8 ứng với $i=42$ và $j=37$ là :

$$C_{50}^{42}4^{42}+C_{41}^{37}3^4(-5)^{37}=C_{50}^8 4^{42}C_{41}^4 3^4 5^{37}.$$

Tổng các hệ số sau khi khai triển : $Q(1)=5^{50}+(-2)^{41}=5^{50}-2^{41}$.

Bài tập 13 : Định hệ số của x^2 xuất hiện sau khi bỏ các dấu ngoặc và nhóm các số hạng giống nhau trong đa thức :

$$P(x)=\underbrace{\left(\ldots\left((x-2)^2-2\right)^2-2-\ldots-2\right)^2}_{\text{k lần}}$$

Giải :

Ta có :

$$P(0)=\underbrace{\left(\ldots\left(\left((-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{\text{k lần}}=\underbrace{\left(\ldots\left((4-2)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{\text{k}-1\text{ lần}}$$

$$=\underbrace{\left(\ldots\left((4-2)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{\text{k}-2\text{ lần}}=\ldots=\left((4-2)^2-2\right)^2=(4-2)^2=4.$$

Ta đặt A_k là hệ số của x, B_k là hệ số của x^2 và P_kx^3 là tổng của các số hạng chứa các luỹ thừa lớn hơn 2 của x. Ta có thể viết :

$$P(x)=\underbrace{\left(\ldots\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2\right)}_{\text{k lần}}$$

$$= P_k x^3 + B_k x^2 + A_k x + 4 = \left[\underbrace{\left(\ldots\left((x-2)^2-2\right)^2\ldots\right)2}_{k-1 \text{ lần}} - 2\right]^2$$

$$= \left[\left(P_{k-1}x^3 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}x + 4\right) - 2\right]^2$$

$$= \left(P_{k-1}x^3 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}x + 2\right)^2$$

$$= P_{k-1}^2 x^6 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^5 + \left(2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2\right)x^4 +$$

$$+\left(4P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1}\right)x^3 + \left(4B_{k-1} + A_{k-1}^2\right)x^2 + 4A_{k-1}x + 4$$

$$= \left[P_{k-1}^2 x^3 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^2 + \left(2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2\right)x + 4\left(P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1}\right)\right]x^3 +$$

$$+\left(4B_{k-1} + A_{k-1}^2\right)x^2 + 4A_{k-1}x + 4$$

Từ đó : $A_k = 4A_{k-1}$, $B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}$.

Vì : $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, nên $A_1 = -4$.

Do đó : $A_2 = -4.4 = -4^2$, $A_3 = -4^3, \ldots$ Một cách tổng quát $A_k = -4^k$.

Ta tính B_k :

$$B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1} = A_{k-1}^2 + 4\left(A_{k-2}^2 + 4B_{k-2}\right)$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2\left(A_{k-3}^2 + 4B_{k-3}\right)$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + 4^3\left(A_{k-4}^2 + 4B_{k-4}\right)$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + \ldots + 4^{k-3}A_2^2 + 4^{k-2}A_1^2 + 4^{k-1}B_1 \qquad (*)$$

Thế $B_1 = 1, A_1 = -4, A_2 = -4^2, A_3 = -4^3, \ldots, A_{k-1} = -4^{k-1}$ vào biểu thức (*), ta được :

$$B_k = 4^{2k-2} + 4.4^{2k-4} + 4^2.4^{2k-6} + \ldots + 4^{k-2}.4^2 + 4^{k-1}.1$$

$$= 4^{2k-2} + 4^{2k-3} + 4^{2k-4} + \ldots + 4^{k+1} + 4^k + 4^{k-1}$$

$$= 4^{k-1}\left(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{k-2} + 4^{k-1}\right) = 4^{k-1}\frac{4^k - 1}{4 - 1}.$$

Vậy : $B_k = \dfrac{4^{2k-1} - 4^{k-1}}{3}$ là hệ số theo x^2.

Bài tập 14 : Tìm các hằng số thoả mãn điều kiện sau :

$$\frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Giải :

Để ý : $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$.

Quy đồng và khử mẫu, ta được :

$$3x^2+3x+3=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$
$$=(B+C)x^2+(A+B-2C)x(2A-2B+C).$$

Đồng nhất hệ số, ta có :

$$\begin{cases}B+C=3\\A+B-2C=3\\2A-2B+C=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\B=2\\C=1\end{cases}$$

Bài tập 15 : Cho đa thức bậc 2 $f(x)=ax^2+bx+c$ thoả mãn $|f(x)|\le\alpha$ khi $|x|\le 1$. Chứng minh : $|a|+|b|+|c|\le 4\alpha$.

Giải :

Chọn $x=0, x=1, x=-1$ và đặt :

$$A=f(1)=a+b+c;\ B=f(-1)=a-b+c\ ;C=f(0)=c.$$

Thì : $|A|,|B|,|C|\le\alpha$ và $a=\frac{1}{2}(A+B)-C;b=\frac{1}{2}(A-B);c=C$

Nên $|a|+|b|+|c|=\frac{1}{2}|A+B-2C|+\frac{1}{2}|A-B|+|C|$

$$\le\frac{1}{2}(|A|+|B|+|2C|)+\frac{1}{2}(|A|+|B|)+|C|$$
$$\le\frac{1}{2}(\alpha+\alpha+2\alpha)+\frac{1}{2}(\alpha+\alpha)+\alpha=4\alpha.$$

Bài tập 16 : Giả sử $|ax^2+bx+c|\le 1$ khi $|x|\le 1$.

Chứng minh rằng : $|cx^2+bx+a|\le 2$ khi $|x|\le 1$.

(*Liên Xô 1973*)

Giải :

Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$, ta có :

$$\begin{cases}A=f(1)=a+b+c\\B=f(-1)=a-b+c\\C=f(0)=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{A+B}{2}-C\\b=\dfrac{A-B}{2}\\c=C\end{cases}$$

Nên : $g(x) = Cx^2 + \frac{A-B}{2}x + \frac{A+B}{2} - C$

$$= C(x^2-1) + \frac{1}{2}A(x+1) + \frac{1}{2}B(1-x)$$

$$\Rightarrow |g(x)| \le |C(x^2-1)| + \frac{1}{2}|A(x+1)| + \frac{1}{2}|B(1-x)|$$

$$\le |1-x^2| + \frac{1}{2}|x+1| + \frac{1}{2}|1-x|$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(1-x)$$

$$= 2 - x^2 \le 2, \forall x \in [-1;1].$$ (Đpcm).

Bài tập 17 : Cho hai đa thức sau :

$$f(x) = 4x^3 + ax \text{ và } g(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d.$$

Chứng minh :

a) Nếu $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$ thì $a = -3$.

b) Nếu $|g(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$ thì $b = d = 0, c = -3$.

Giải :

a) Chọn $x = 1 : f(1) = 4 + a \le 1 \Rightarrow a \le -3$.

Chọn $x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \ge -1 \Rightarrow a \ge -3$.

Do đó : $a = -3$.

Đảo lại với $a = -3$ thì $f(x) = 4x^3 - 3x$.

Vì $|x| \le 1$ nên đặt $x = \cos\alpha \Rightarrow f(x) = \cos 3\alpha$.

Do đó $|f(x)| = |\cos 3\alpha| \le 1$: đúng.

Vậy : $a = -3$.

b) Ta có : $g(x) - g(-x) = (4x^3 + bx^2 + cx + d) - (-4x^3 + bx^2 - cx + d)$

$$= 8x^3 + 2cx$$

$$\Rightarrow 4x^3 + cx = \frac{g(x) - g(-x)}{2}$$

$$\Rightarrow |4x^3 + cx| \le \frac{1}{2}|g(x) - g(-x)| \le \frac{1}{2}\left(|g(x)| + |g(-x)|\right) \le 1, \forall x \in [-1;1].$$

Nên theo câu a) thì $c = -3$.

Do đó : $g(x) = 4x^3 + bx^2 - 3x + d$.

Chọn $x = 1 \Rightarrow b + d \le 0$.

Chọn $x = -1 \Rightarrow b + d \ge 0$ do đó : $b + d = 0 \Rightarrow d = -b$.

Nên $g(x) = 4x^3 + bx^2 - 3x - b$.

Tiếp tục chọn $x = \pm\frac{1}{2}$ thì ta có $b = 0$.

Vậy : $b = d = 0$.

Bài tập 18 : Cho đa thức với hệ số thực : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và một số $\alpha > 0$. Biết rằng với $|x| \le 1$ thì có bất đẳng thức $|f(x)| \le \alpha$.

Tìm $|a|; |b|; |c|; |d|$ lớn nhất.

Giải :

Đặt : $\begin{cases} A = f(-1) = -a + b - c + d \\ B = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d \\ C = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d \\ D = f(1) = a + b + c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3}A + \frac{4}{3}B - \frac{4}{3}C + \frac{2}{3}D \\ c = \frac{1}{6}A - \frac{8}{6}B + \frac{8}{6}C - \frac{1}{6}D \\ b = \frac{1}{2}f(-1) + \frac{1}{2}f(1) - f(0) \\ d = f(0). \end{cases}$

Từ giả thiết : $|a| \le 4\alpha$; $|b| \le 2\alpha$;

$|c| \le 3\alpha$; $|d| \le \alpha$.

Bằng cách xét $f(x) = \alpha(4x^3 - 3x)$ và $f(x) = \alpha(2x^2 - 1)$.

Vậy : $\max|a| = 4\alpha$; $\max|b| = 2\alpha$;

$\max|c| = 3\alpha$; $\max|d| = \alpha$.

Bài tập 19 : Cho tam thức bậc hai : $f(x) = x^2 + px + q$. Ở đó p, q là các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k để $f(k) = f(2004).f(2005)$.

Giải :

Ta chứng minh $\forall x$, ta có : $f(f(x) + x) = f(x).f(x + 1)$.

Thật vậy : $f(f(x) + x) = (f(x) + x)^2 + p(f(x) + x) + q$

$$= f^2(x) + 2f(x)x + x^2 + p(f(x)) + px + q$$

$$= f(x)[f(x) + 2x + p] + x^2 + px + q$$

$$= f(x)[q + p(x + 1) + x^2 + 2x + 1]$$

$$= f(x)\left[(x+1)^2 + p(x+1) + q\right]$$
$$= f(x)f(x+1).$$

Với $x = 2004$, đặt $k = f(2004) + 2004$ thì k là số nguyên và ta có :

$$f(k) = f(2004)f(2005).$$

Bài tập 20 : Cho $f \in \mathbb{R}[x], \deg f = n, f(i) = 2^i$ với $i = \overline{1, n+1}$.

Tính $f(n+2)$.

(*Việt Nam 1986*)

Giải :

Ta chứng minh quy nạp : $f(n+2) = 2^{n+2} - 2$ theo n.

Khi $n = 1$, ta có :

$$f(x) = ax + b \text{ thì } \begin{cases} f(1) = a + b = 2^1 \\ f(2) = 2a + b = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$$

Do đó : $f(x) = 2x$

Suy ra : $f(3) = 6 = 2^3 - 2$.

Giả sử khẳng định đúng đến $n - 1$.

Xét đa thức sai phân :

$$g(x) = f(x+1) - f(x) \text{ thì } \deg g = n - 1$$

và : $$g(i) = f(i+1) - f(i) = 2^{i+1} - 2^i = 2^i, i = \overline{1, n}.$$

Do đó : $g(n+1) = 2^{n+1} - 2$

$\Rightarrow f(n+2) - f(n+1) = 2^{n+1} - 2$

$\Rightarrow f(n+2) = f(n+1) + 2^{n+1} - 2$

$= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2.$

Vậy : $f(n+2) = 2^{n+2} - 2$.

3. ĐA THỨC VỚI YẾU TỐ GIẢI TÍCH

3.1. Giới hạn, liên tục : Cho $f \in \mathbb{R}[x]$:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Ta có f liên tục trên $\mathbb{R}$ và :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ khi } a_0 > 0 \\ -\infty \text{ khi } a_0 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ khi n chẵn, } a_0 > 0 \text{ hoặc n lẻ, } a_0 < 0 \\ -\infty \text{ khi n lẻ, } a_0 > 0 \text{ hoặc n chẵn, } a_0 < 0 \end{cases}$$

3.2. Đạo hàm : Cho $f \in \mathbb{R}[x]$: •

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Thì : $f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1n^{n-2} + ... + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + ... + 2a_{n-2}$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3} + ... + 6a_{n-3}$

...

$f^{(n)}(x) = a_0n!.$

• ***Kết quả*** :

Nếu $\deg f = n$ thì :

$\deg f' = n-1 ; \deg f'' = n-2 ; ... ; \deg f^{(k)} = n-k \quad (1 \le k \le n)$

và $\deg f^{(n)} = 0.$

3.3. Nguyên hàm : Cho $f \in \mathbb{R}[x]$:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Có nguyên hàm :

$$F(x) = \int f(x)dx = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + ... + \frac{a_n}{1}x + c$$

Bài tập 21 : Cho đa thức $P \in \mathbb{R}[x]$ bậc lẻ.

Chứng minh rằng tồn tại 2 số $a < 0$ và $b > 0$ để $P(a).P(b) < 0$.

Giải :

Ta có : $P(x) = a_0x^{2m+1} + a_1x^{2m} + ... + a_{2m}x + a_{2m+1}$.

Với $a_0 \neq 0, \deg P = 2m+1$ lẻ :

- Xét $a_0 > 0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ nên tồn tại $a < 0$ để $P(a) < 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ nên tồn tại $b > 0$ để $P(b) > 0$.

Do đó : $P(a).P(b) < 0$.

- Xét $a_0 < 0$ thì tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ nên tồn tại $a < 0$ để $P(a) > 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ nên tồn tại $b > 0$ để $P(b) < 0$.

Do đó : $P(a).P(b) < 0$.

• ***Kết quả*** : Nếu đa thức $P(x) > 0, \forall x$ hoặc $P(x) < 0, \forall x$ thì $\deg P$ bậc chẵn với $n = 2k$.

Bài tập 22 :

a) Cho $P(x) = x^4 + 2ax^2 + a$ với $a > 0$.

Chứng minh :

$$Q(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + P'''(x) + P^{(4)}(x) > 0, \forall x.$$

b) Chứng minh nếu :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = 0, \forall x \in [0; 2\pi]$$

thì : $a_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$.

Giải :

a) Ta có : $P(x) = x^4 + 2ax^2 + a$;

$P'(x) = 4x^3 + 4ax$;

$P''(x) = 12x^2 + 4a$;

$P'''(x) = 24x$;

$P^{(4)}(x) = 24$.

Do đó : $Q(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + P'''(x) + P^{(4)}(x)$

$$= x^4 + 4x^3 + (2a+12)x^2 + (24+4a)x + 5a + 24$$

$$= (x^2+2x)^2 + 2a(x+1)^2 + 3a + 8(x^2+3x+3).$$

Vì : $x^2 + 3x + 3 > 0, \forall x$ và $a > 0$ nên $Q(x) > 0, \forall x$.

b) Với các số nguyên p, q. Ta có :

$$\int_0^{2\pi}\cos px.\cos qx.dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(p+q)x+\cos(p-q)x\right]dx$$

$$=\begin{cases}0 \text{ nếu } p\neq q\\ \pi \text{ nếu } p=q.\end{cases}$$

Vì : $f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx=0, \forall x\in[0;2\pi]$.

$\Rightarrow 0=\int_0^{2\pi}f(x).\cos px.dx=a_k\pi$ với $p=k, k=1,2,\ldots,n$.

Vậy các hệ số $a_k=0$.

Bài tập 23 : Cho $f(x)=ax^2+bx+c$. Chứng minh :

a) Nếu $|f(x)|\leq 1, \forall x\in[0;1]$ thì $f'(0)\leq 8$.

b) Nếu $|f(m)|\leq 1$ với $m=0, m=\pm 1$ thì $|f'(x)|\leq 4, \forall |x|\leq 1$.

Giải :

a) Ta có : $f(0)=c$; $f(1)=a+b+c$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c$.

Do đó : $b=4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0)$.

Mà : $f(x)=ax^2+bx+c$

Suy ra : $f'(x)=2ax+b$, do đó : $|f'(x)|=|2ax+b|$ (1)

Mà : $f(0)=c$; $f(1)=a+b+c$; $f(-1)=a-b+c$.

Do đó : $c=f(0)$; $a=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)-f(0)$; $b=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)$

$(1)\Rightarrow f'(1)=2a+b=\frac{3}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)-2f(0)$.

Nên : $|f'(1)|\leq\frac{3}{2}.1+\frac{1}{2}.1+2.1=4$.

Tương tự : $f'(-1)=-2a+b=-\frac{1}{2}f(1)-\frac{3}{2}f(-1)-2f(0)$.

Nên $|f'(-1)|\leq 4$.

Vì f' bậc nhất trên đoạn $[-1;1]$ nên :

$$|f'(x)|\leq\max\{|f'(-1)|,|f'(1)|\}\Rightarrow|f'(x)|\leq 4.$$

Bài tập 24 : Cho $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, biểu diễn các tổng sau đây theo $f(x)$ và $f'(x)$:

a) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}$.

b) $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x-x_i}$.

c) $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{3-x_i}$.

Giải :

a) Ta có : $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$.

$$f'(x)=(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)+...$$
$$...+(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1}).$$

Do đó :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}=\frac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}+$$
$$+...+\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

b) $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x-x_i}-1\right)=x\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}-n=x\frac{f'(x)}{f(x)}-n.$

c) $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{3-x_i}=-n+3\frac{f'(3)}{f(3)}.$

Bài tập 25 : Xác định đa thức $P(x)$ thoả mãn : $P(2x)=P'(x).P''(x)$.

Giải :

Xét $P(x)=C$, với $C=\text{const}$ thì $C=0$ nên $P(x)=0$ thoả.

Xét $\deg P=n, n\geq 1$.

Ta có : $\deg P'=n-1, \deg P''=n-2$.

Từ giả thiết ta có : $n=(n-1)+(n-2)\Rightarrow n=3$ nên :

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$

$\Rightarrow P'(x)=3ax^2+2bx+c$

$\Rightarrow P''(x)=6ax+2b.$

Và : $P(2x) = 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d.$

Ta có : $P(2x) = P'(x).P''(x)$

$\Leftrightarrow 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$

$\Leftrightarrow 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = 18a^2x^3 + 18abx^2 + (4b^2 + 6ac)x + 2bc.$

Đồng nhất hệ số :

$$\begin{cases} 18a^2 = 8a \\ 18ab = 4b \\ 4b^2 + 6ac = 2c \\ 2bc = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{9} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Do đó : $P(x) = \frac{4}{9}x^3.$

Vậy : $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = \frac{4}{9}x^3.$

Bài tập 26 : a) Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $P(x)$ để với $\forall x \in \mathbb{R}$ có các bất đẳng thức :

(1) : $P'(x) > P''(x)$ và (2) : $P(x) > P''(x)$.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu thay đổi bất đẳng thức (1) bằng bất đẳng thức (1') : $P(x) > P'(x)$?

(*Cộng hoà Dân chủ Đức 1974*)

Giải :

a) Nếu $P(x)$ là hằng số thì $P'(x) = P''(x) = 0$, và bất đẳng thức (1) không thoả mãn.

Giả sử $\deg P(x) = n \geq 1$. Khi đó, nếu n lẻ thì $\deg(P(x) - P''(x)) = n$ là số lẻ, từ đó $P(x) - P''(x) \leq 0$ với ít nhất một điểm $x \in \mathbb{R}$, nếu n chẵn thì $\deg(P'(x) - P''(x)) = n - 1$ là số lẻ, từ đó $P'(x) - P''(x) \leq 0$ với ít nhất một điểm $x \in \mathbb{R}$. Như vậy, trong cả hai trường hợp n lẻ và n chẵn, đa thức $P(x)$ không thoả mãn hoặc bất đẳng thức (2) hoặc bất đẳng thức (1).

Vậy a) được chứng minh xong.

b) Chọn $P(x) = x^2 + 3$. Khi đó với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ta có $P(x) - P'(x) \equiv x^2 - 2x + 3 > 0$ và $P(x) - P''(x) \equiv x^2 + 1 > 0$ nghĩa là khẳng định trên không còn đúng nữa.

Và : $P(2x) = 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d.$

Ta có : $P(2x) = P'(x).P''(x)$

$\Leftrightarrow 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$

$\Leftrightarrow 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = 18a^2x^3 + 18abx^2 + (4b^2 + 6ac)x + 2bc.$

Đồng nhất hệ số :

$$\begin{cases} 18a^2 = 8a \\ 18ab = 4b \\ 4b^2 + 6ac = 2c \\ 2bc = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{9} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Do đó : $P(x) = \dfrac{4}{9}x^3.$

Vậy : $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = \dfrac{4}{9}x^3.$

Bài tập 26 : a) Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $P(x)$ để với $\forall x \in \mathbb{R}$ có các bất đẳng thức :

(1) : $P'(x) > P''(x)$ và (2) : $P(x) > P''(x)$.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu thay đổi bất đẳng thức (1) bằng bất đẳng thức (1') : $P(x) > P'(x)$?

(Cộng hoà Dân chủ Đức 1974)

Giải :

a) Nếu $P(x)$ là hằng số thì $P'(x) = P''(x) = 0$, và bất đẳng thức (1) không thoả mãn.

Giả sử $\deg P(x) = n \geq 1$. Khi đó, nếu n lẻ thì $\deg(P(x) - P''(x)) = n$ là số lẻ, từ đó $P(x) - P''(x) \leq 0$ với ít nhất một điểm $x \in \mathbb{R}$, nếu n chẵn thì $\deg(P'(x) - P''(x)) = n - 1$ là số lẻ, từ đó $P'(x) - P''(x) \leq 0$ với ít nhất một điểm $x \in \mathbb{R}$. Như vậy, trong cả hai trường hợp n lẻ và n chẵn, đa thức $P(x)$ không thoả mãn hoặc bất đẳng thức (2) hoặc bất đẳng thức (1).

Vậy a) được chứng minh xong.

b) Chọn $P(x) = x^2 + 3$. Khi đó với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ta có $P(x) - P'(x) \equiv x^2 - 2x + 3 > 0$ và $P(x) - P''(x) \equiv x^2 + 1 > 0$ nghĩa là khẳng định trên không còn đúng nữa.

Bài tập 27 : Có tồn tại hay không đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ sao cho :

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}, \text{ với } \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải :

Từ bất đẳng thức : $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k} > k\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$

Suy ra : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) = +\infty.$

Do đó nếu tồn tại đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ thoả mãn bài toán thì :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \infty.$$

Như vậy bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$. Khi đó $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x.Q(x)}$ hoặc bằng ∞, hoặc là tỉ hệ số a_0/b_0 của bậc cao nhất của x trong $P(x)$ và $Q(x)$.

Mặt khác với $N > 0$ tuỳ ý, ta có :

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+...+\frac{1}{n}\right)$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N+1}+...+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{N}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N+1}+...+\frac{1}{n}\right)$$

$$\le 0+\lim_{n\to\infty}\frac{(n-N)}{n(N+1)} \le \frac{1}{N}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) = 0$, mâu thuẫn với khẳng định trên rằng $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x.Q(x)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{P(n)}{Q(n)}$ hoặc là ∞ hoặc a_0/b_0 (đpcm).

Bài tập 28 : Cho $f(x) = x^3-18x^2+115x-391$.

Tìm x nguyên dương để $f(x)$ là lập phương của một số nguyên dương.

(Thuỵ Điển 1989)

Giải :

Ta có : $f'(x) = 3x^2 - 36x + 115$.

Vì $\Delta' = -21 < 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x$.

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giả sử $f(x) = y^3$ với các số nguyên dương x, y.

Ta có : $f(10) = -41 < 0$

$f(11) = 27 = 3^3 > 0$ nên $x \geq 11$.

Và : $y^3 = f(x) = (x-5)^3 - (3x^2 - 40x + 266) > (x-5)^3$.

Đồng thời : $y^3 = f(x) = (x-9)^3 + (9x^2 - 128x + 338) < (x-9)^3$.

Do đó : $y = x - 6$ hay $y = x - 7$ hay $y = x - 8$.

Giải ra ta được : $x = 11 \rightarrow y = 3$;

$x = 12 \rightarrow y = 5$;

$x = 25 \rightarrow y = 16$.

Vậy giá trị của x là : 11, 12, 25.

Bài tập 29 : Cho dãy đa thức (P_n) sau đây :

$$P_0(x) = 0 ; P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n^2(x)}{2}, n \in N.$$

Chứng minh : $\forall x \in [0;1], \forall n \in N$ thì : $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$.

(Việt Nam 1989)

Giải :

Ta chứng minh quy nạp $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$.

Vì : $1 - P_{n+1}(x) = \frac{1-x}{2} + \frac{(1 - P_n(x))^2}{2} \geq 0 \Rightarrow P_{n+1}(x) \leq 1, \forall x \in [0;1]$.

Do đó dãy $P_n(x)$ tăng và bị chặn nên hội tụ về $f(x) \geq 0$.

Chuyển qua giới hạn :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n^2(x)}{2}$$

thì $f^2(x) = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$.

Do đó : $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0, \forall x \in [0;1]$ và $\forall n$.

Đặt $Q_n(x)=\sqrt{x}-P_n(x)$ với $0\le x\le 1$:

$$\Rightarrow Q_{n+1}(x)=Q_n(x)\left(1-\frac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_{n+1}(x)\le Q_n(x)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$\le\ldots$$

Do đó : $Q_n(x)\le\sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n=\frac{2}{n}.\frac{n\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

$$\le\frac{2}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\qquad\text{(Cauchy)}$$

$$=\frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$\le\frac{2}{n+1}\ \text{(đpcm).}$$

Bài tập 30 : Tính tổng : $S_k(n)=1^k+2^k+\ldots+n^k$, với $k=1,2,3$.

Giải :

Xét đa thức : $F(x)=(x-1)(x^2+x^3+\ldots+x^n)=x^{n+1}-x^2$.

Lấy đạo hàm cấp 2 $F''(x)$, ta có :

$$F''(x)=2(2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1})+(x-1)(2.1+3.2.x+\ldots+n(n-1)x^{n-2})$$
$$=(n-1).n.x^{n-1}-2.$$

Cho $x=1$, ta có : $2(2+3+\ldots+n)=(n-1).n-2=2(S_1(n)-1)$.

Vậy : $S_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lấy đạo hàm cấp ba $F'''(x)$, ta có :

$$F^{(3)}(x)=3(2.1+3.2.x+\ldots+n(n-1)x^{n-2})+$$
$$+(x-1)(3.2.1+4.3.2.x+\ldots+n(n-1)(n-2)x^{n-3})$$
$$=(n+1)n(n-1)x^{n-2}.$$

Cho $x=1$ thì : $3(2.1+3.2+\ldots+n(n-1))=(n+1)n(n-1)$.

Từ đó : $\sum_{m=1}^{n} m(m-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$

$$= S_2(n) - S_1(n).$$

Vậy : $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Tương tự, tính đạo hàm cấp bốn, ta có :

$$F^{(4)}(x) = 4(3.2.1 + 4.3.2 + ... + n(n-1)(n-2))x^{n-3} +$$
$$+(x-1)(4.3.2.1 + ... + n(n-1)(n-2)(n-3))x^{n-4}$$
$$= (n+1)n(n-1)(n-2)x^{n-3}.$$

Cho $x = 1$, ta có :

$$F^{(4)} = 4(3.2.1 + 4.3.2 + ... + n(n-1)(n-2)) = (n+1)n(n-1)(n-2).$$

Từ đó : $\sum_{m=1}^{n} m(m-1)(m-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$

$$= S_3(n) - 3S_2(n) + 2S_1(n).$$

Vậy : $S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. PHÉP CHIA ĐA THỨC. ƯỚC – BỘI

4.1. Định nghĩa :

Cho hai đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x]$ thì tồn tại cặp đa thức $q(x)$ và $r(x)$ duy nhất thuộc $\mathbb{R}[x]: f(x) = g(x).q(x) + r(x)$.

Với : $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Ta gọi $q(x)$ và $r(x)$ lần lượt là thương và số dư trong phép chia $f(x)$ cho $g(x)$. Nếu $r(x) = 0$ thì ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$, hay $g(x)$ chia hết $f(x)$ hay $f(x)$ là bội của $g(x)$ hay $g(x)$ là ước của $f(x)$, ta kí hiệu $f \vdots g$ hay $g | f$.

4.2. Ước chung lớn nhất :

Một đa thức $d(x)$ chia hết hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ gọi là ước chung của $f(x)$ và $g(x)$.

Nếu $d(x)$ là một ước chung chia hết cho mọi ước chung khác của 2 đa thức $f(x)$ và $g(x)$ đúng thì ta gọi $d(x)$ là ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$. Rõ ràng các ước chung lớn nhất sai khác hằng số, để bảo đảm tính duy nhất ta có thể quy ước chọn ước chung lớn nhất dạng chuẩn tắc (hệ số cao nhất bằng 1).

Viết tắt ƯCLN, kí hiệu :

$$d(x) = (f(x), g(x)).$$

4.3. Thuật toán Ơ-clít để tìm ƯCLN :

Ta chia liên tiếp :

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x)$$
$$g(x) = r(x).q_1(x) + r_1(x)$$
$$r(x) = r_1(x).q_2(x) + r_2(x)$$
$$\ldots$$
$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x).q_k(x) + r_k(x)$$
$$r_{k-1}(x) = r_k(x).q_{k+1}(x).$$

Thì : $(f(x), g(x)) = r_k^*(x)$ với $r_k^*(x) = c.r_k(x)$ mônic.

• ***Kết quả*** : Nếu $d(x)=(f(x),g(x))$ thì khi đó tồn tại hai đa thức $u(x), v(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho :

$$f(x).u(x)+g(x).v(x)=d(x).$$

Hơn nữa ta có thể chọn $\deg u<\deg g$ và $\deg v<\deg f$.

Bài tập 31 : Cho $P(x)=x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$.

Tìm dư của phép chia $P(x)$ cho :

a) $x-1$.

b) x^2-1.

Giải :

a) Ta có : $P(x)=(x-1)Q(x)+r(x)$

Với $\deg r(x)<\deg(x-1)=1\Rightarrow \deg r(x)=0$ nên dư $r(x)=c$.

Do đó : $P(x)=(x-1).Q(x)+c$.

Chọn $x=1\Rightarrow P(1)=c$ hay $c=P(1)=6$.

b) Ta có : $P(x)=(x^2-1).H(x)+s(x)$ với $\deg s(x)\le 1$

$$=(x^2-1).H(x)+ax+b.$$

Chọn : $x=1: P(1)=a+b=6.$

$x=-1: P(-1)=-a+b=-6.$

Do đó : $a=6, b=0$.

Vậy dư $r(x)=6x$.

• ***Kết quả*** **:** Dư của đa thức $P(x)$ chia cho $x-a$ là $P(a)$.

Bài tập 32 : Cho đa thức $f(x)$ và hai số a, b phân biệt. Biết dư của $f(x)$ chia cho $x-a$ là A, chia cho $x-b$ là B.

Tìm dư của $f(x)$ chia cho $(x-a)(x-b)$.

Giải :

Ta có : $f(x)=(x-a)(x-b)g(x)+r(x)$ với $r(x)=px+q$.

Chọn $x=a\Rightarrow f(a)=pa+q$;

Chọn $x=b\Rightarrow f(b)=pb+q$.

Mà : $f(x)$ chia $x-a$ dư $A\Rightarrow f(a)=A$.

$f(x)$ chia $x-b$ dư $B\Rightarrow f(b)=B$.

Do đó : $\begin{cases} pa+q=A \\ pb+q=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{A-B}{a-b} \\ q=\dfrac{aB-bA}{a-b} \end{cases}$

Vậy dư $r(x)=\dfrac{A-B}{a-b}x+\dfrac{aB-bA}{a-b}$

Bài tập 33 : Tìm dư của phép chia :

a) x^2+1 cho $x+1$.

b) x^6+x^3+1 cho x^2+x+1.

c) $x^{12}+x^8+x^4+1$ cho x^3+x^2+x+1.

d) $f(x^{100})$ cho $f(x)$ với $f(x)=x^{99}+x^{98}+...+x+1$.

(Trung Quốc 1981)

Giải :

a) Ta có : $x^2+1=(x+1)(x-1)+2 \Rightarrow$ dư 2.

b) Ta có : $x^6+x^3+1=(x^2+x+1)(x^4-x^3+2x-2)+2 \Rightarrow$ dư 2.

c) Ta có :

$x^{12}+x^8+x^4+1=(x^3+x^2+x+1)(x^9-x^8+2x^5+2x^4+3x-3)+4 \Rightarrow$ dư 4.

d) Ta có : $f(x)=x^{99}+x^{98}+...+x+1$

$\Rightarrow f(x^{100})=x^{9900}+x^{9800}+...+x^{100}+1$

$=f(x)(x^{9801}-x^{9800}+2x^{9701}-2x^{9700}+3x^{9601}-3x^{9600}+-...+99x-99)+100$

nên dư là 100.

Lưu ý : $\sum\limits_{k=0}^{98}(99-k)(x^{100(k+1)}-x^{100k})=(x^{100}-1)\sum(99-k)x^{100k}$

$=f(x)(x-1)\sum(99-k)x^{100k}$

$=f(x)\sum(99-k)(x^{100k+1}-x^{100k})$.

Bài tập 34 : Xác định đa thức :

a) $f(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ chia hết cho x^2-x+b.

b) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia hết cho $x-2$ và chia x^2-1 dư 2x.

Giải :

a) Lấy đa thức $f(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ chia cho $g(x)=x^2-x+b$ thì được thương là $q(x)=6x^2-x+(a-6b-1)$.

Phần dư $r(x)=(a-6b+2)x+(-ab+6b^2+b+2)$.

Vì $f(x) \vdots g(x)$ nên $r(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} a-5b+2=0 & (1) \\ -ab+6b^2+b+2=0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow a=5b-2$.

Thay vào (2) : $b^2+3b+2=0 \Rightarrow b=-1; b=-2$.

Khi $b=-1$ thì $a=-7$.

Khi $b=-2$ thì $a=-12$.

Vậy : $f(x)=6x^4-7x^3-7x^2+3x+2$ và $g(x)=x^2-x-1$.

$f(x)=6x^4-7x^3-12x^2+3x+2$ và $g(x)=x^2-x-2$.

b) Ta có : $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

Vì $f(x)$ chia hết cho $x-2$ nên $f(2)=8+4a+2b+c=0$.

Do $f(x)$ chia cho x^2-1 thì dư $2x$ nên $g(x)=f(x)-2x$ chia hết cho (x^2-1).

Suy ra : $g(1)=1+a+(b-2)+c=0$ hay $a+b+c=1$.

Và : $g(-1)=-1+a-b+2+c=0$ hay $a-b+c=-1$.

Từ đó ta nhận được : $a=-10; c=-10; b=-19$.

Vậy : $f(x)=x^3-10x^2-19x-10$.

Bài tập 35 : Tìm ước số chung lớn nhất của hai đa thức :

$$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1 \text{ và } g(x)=x^3+x^2-x-1.$$

Giải :

Ta thực hiện các phép chia liên tiếp và hỗ trợ với phép nhân thêm hằng số : $f(x)=q(x).g(x)+r(x)$

thì : $q(x)=x, r(x)=-2x^2-3x-1$

Và : $g(x)=q_1(x).r(x)+r_1(x)$

thì : $q_1(x)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ và $r_1(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

Và tiếp tục : $r(x)=q_2(x).r_1(x)+r_2(x)$

thì : $q_2(x)=-\frac{2}{3}(2x+1)$ và $r_2(x)=0$.

Do đó $(f(x),g(x))=x+1$ với quy ước lấy hệ số cao nhất bằng 1 từ $r_1(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$.

Bài tập 36 : Chứng minh các mệnh đề sau :

a) Nếu $(f(x),g_1(x))=(f(x),g_2(x))=1$ thì $(f(x).g_1(x)g_2(x))=1$.

b) Nếu $f(x).h(x)\vdots g(x)$ và $(h(x),g(x))=1$ thì $f(x)\vdots g(x)$.

c) Nếu $f(x)\vdots g_1(x), f(x)\vdots g_2(x)$ và $(g_1(x),g_2(x))=1$ thì :

$$f(x)\vdots g_1(x)g_2(x).$$

Giải :

a) Theo giả thiết và hệ quả lí thuyết nên tồn tại các đa thức $u_1(x), u_2(x), v_1(x), v_2(x)$ sao cho :

$$f(x).u_1(x)+g_1(x).v_1(x)=1$$
$$f(x).u_2(x)+g_2(x).v_2(x)=1.$$

Nhân hai đẳng thức trên lại ta được :

$$f(x)\left[f(x)u_1(x)u_2(x)+u_1(x)g_2(x)v_2(x)+u_2(x)g_1(x)v_1(x)\right]+$$
$$+g_1(x)g_2(x)v_1(x)v_2(x)=1$$

hay $f(x)u(x)+g_1(x)g_2(x)v(x)=1\Rightarrow(f(x),g_1(x)g_2(x))=1$.

b) Vì $(h(x),g(x))=1$ nên tồn tại $u(x), v(x)$ sao cho :

$$h(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

$\Rightarrow f(x)=f(x)h(x)u(x)+f(x)g(x)v(x)\vdots g(x)$ vì $f(x)h(x)\vdots g_2(x)$.

c) Vì $f(x)\vdots g_1(x)$ nên ta có $f(x)=g_1(x)g(x)$.

Và vì $f(x)\vdots g_2(x)$ nên $g_1(x)g(x)\vdots g_2(x)$

$\Rightarrow g(x)\vdots g_2(x)$ (vì $g_1(x), g_2(x)=1$)

$\Rightarrow f(x)=g_1(x)g(x)\vdots g_1(x)g_2(x)$ (đpcm).

Bài tập 37 : Cho $f(x)$ là đa thức có bậc lớn hơn 1 có các hệ số nguyên và k, h là 2 số tự nhiên nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh rằng : $f(k+h) \vdots k.h \Leftrightarrow f(k) \vdots h$ và $f(h) \vdots k$.

Giải :

Ta có : $f(k+h) - f(k) \vdots (k+h) - k = h$ (1)

$f(k+h) - f(h) \vdots (k+h) - h = k$ (2)

Do đó nếu $f(k+h) \vdots kh$ thì từ (1) $\Rightarrow f(k) \vdots h$ và từ (2) suy ra là $f(h) \vdots k$.

Ngược lại nếu $f(k) \vdots h$ thì $f(h) \vdots k$ thì từ (1), (2) suy ra $f(k+h) \vdots k$ và h.

Do đó : $f(k+h) \vdots kh$ (do $(k,h)=1$).

Lưu ý : Với $f \in \mathbb{Z}[x]$ và $a \in \mathbb{Z}$ thì :

$$f(x) = (x-a)g(x) + r \text{ với } g(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

Nên : $f(a) = 0 + r \Rightarrow r = f(a)$.

Do đó : $f(x) = (x-a)g(x) + f(a)$ hay $f(x) - f(a) = (x-a)g(x)$

hay $f(x) - f(a) \vdots x - a$.

Bài tập 38 : Giả sử m và n là hai số nguyên ≥ 2. Chứng minh các đa thức :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1};$$

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi m, n là hai số nguyên tố cùng nhau.

Giải :

Để ý rằng : $f(x) = \dfrac{x^m - 1}{x-1}; g(x) = \dfrac{x^n - 1}{x-1}$.

a) Giả sử m và n không nguyên tố cùng nhau, tức là m và n có một ước chung $d \geq 2$. Ta có $x^m - 1$ và $x^n - 1$ đều chia hết cho $x^d - 1$. Nên $f(x)$ và $g(x)$ đều chia hết cho đa thức : $\dfrac{x^d - 1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{d-1}$

Đa thức này có bậc ≥ 1 (vì $d \geq 2$). Như vậy $f(x)$ và $g(x)$ không nguyên tố cùng nhau.

b) Giả sử m và n là nguyên tố cùng nhau. Khi đó tồn tại hai số nguyên khác không u và v sao cho $mu + nv = 1$.

Dĩ nhiên trong 2 số nguyên u, v có một số dương và có một số âm. Vai trò của m và n là như nhau, và khi thay đổi kí hiệu, ta có thể xem rằng u và v là hai số nguyên dương sao cho $mu = nv + 1$.

Ta có : $x-1=(x^{mu}-1)-(x^{nv+1}-x)=(x^{mu}-1)-x(x^{nv}-1.)$

Mặt khác ta có : $x^{mu}-1=(x^{m}-1)p(x)$; $x^{nv}-1=(x^{n}-1)q(x)$.

Với $p(x), q(x)$ là hai đa thức. Khi đó :

$$1=\frac{x^{m}-1}{x-1}p(x)+\frac{x^{n}-1}{x-1}q(x)=f(x)p(x)+g(x)q(x) \text{ (đpcm).}$$

Bài tập 39 : Cho đa thức $f(x)=2x^2+x-2$.

Chứng minh : $f(f(x))-x$ chia hết cho $g(x)=2x^2+2x-1$.

Giải :

Ta có : $f(f(x))-x=f(f(x))-f(x)+f(x)-x$

$$=2f^2(x)+f(x)-2-2x^2-x+2+f(x)-x$$
$$=2(f^2(x)-x^2)+2(f(x)-x)$$
$$=2(f(x)-x).(f(x)+x+1)$$
$$=2(2x^2-2)(2x^2+2x-1).$$

Vậy : $f(f(x))-x \vdots g(x)$.

Bài tập 40 : Chứng minh rằng với mọi giá trị $n \in \mathbb{N}$, đa thức $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ chia hết cho đa thức x^2+x+1.

(New York 73, Bỉ 81)

Giải :

Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$:

- Với $n=0$ khẳng định đúng vì khi đó $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2} \equiv x^2+x+1$.
- Giả sử khẳng định đúng với $n-1$, nghĩa là $(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ chia hết cho x^2+x+1.
- Khi đó đa thức :

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2} \equiv (x+1)^2.(x+1)^{2n-1}+x.x^{n+1}$$
$$\equiv (x^2+2x+1)(x+1)^{2n-1}+x.x^{n+1}$$
$$\equiv (x^2+x+1)(x+1)^{2n-1}+x\left[(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}\right]$$

chia hết cho đa thức x^2+x+1.

Vậy $\forall n \in \mathbb{N}, (x+1)^{2n+1}+x^{n+2} \vdots x^2+x+1$.

Bài tập 41 : Chứng minh rằng $x^n - 1 \vdots x^k - 1$ khi và chỉ khi n là bội số của k.

Giải :

Có thể phát biểu bài toán dưới dạng :

Để $x^n - 1 \vdots x^k - 1$ thì điều kiện cần và đủ là n là bội số của k.

Chứng minh :

a) Điều kiện đủ :

Giả sử n là bội số của k tức là $n = km$ với m nguyên dương. Thì :

$x^n - 1 = x^{km} - 1 = (x^k)^m - 1 = (x^k - 1)[x^{k(m-1)} + x^{k(m-2)} + ... + x^k + 1]$.

Đẳng thức này chứng tỏ : $x^n - 1 \vdots x^k - 1$.

b) Điều kiện cần :

Ta hãy lấy số nguyên dương n chia cho số nguyên dương k. Giả sử q và r là thương và số dư trong phép chia, tức là ta có : $n = kq + r \quad (0 \le r < k)$.

Thì : $x^n - 1 = x^{kq+r} - 1 = x^{kq+r} - x^r + x^r - 1 = x^r(x^{kq} - 1) + x^r - 1 \qquad (1)$

Ở trên ta đã chứng minh : $x^{kq} - 1 \vdots x^k - 1$.

Vì vậy nếu $x^n - 1 \vdots x^k - 1$ thì từ (1) suy ra $x^r - 1 \vdots x^k - 1$.

Nhưng $r < k$ nên $x^r - 1 \vdots x^k - 1$ khi $r = 0$.

Thành thử nếu $x^n - 1 \vdots x^k - 1$ thì $r = 0$, tức là $n = kq$, nói cách khác n là bội số của k.

Bài tập 42 : Chứng minh rằng với mọi n, đa thức $x^{2n} - x^n + 1$ không chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Giải :

Để ý rằng : $x^{2n} - x^n + 1 = (x^{2n} + x^n + 1) - 2x^n$.

Ta nhận xét các trường hợp : $n = 3m$; $n = 3m + 1$; $n = 3m + 2$.

1) Nếu $n = 3m + 1$ hay $n = 3m + 2$ thì đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$ và rõ ràng $2x^n \not\vdots\, x^2 + x + 1$.

Vì vậy trong các trường hợp này : $x^{2n} - x^n + 1 \not\vdots\, (x^2 + x + 1)$.

2) Giả sử $n = 3m$: $x^{2n} - x^n + 1 = x^{6m} - x^{3m} + 1 = (x^{6m} - 1) - (x^{3m} - 1) + 1$ và như thế ta đã biết các đa thức $x^{6m} - 1$ và $x^{3m} - 1 \vdots x^2 + x + 1$ nên trong cả hai trường hợp này $x^{2n} - x^n + 1 \not\vdots\, (x^2 + x + 1)$.

Bài tập 43 : Với những số nguyên dương n nào thì :

a) Đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

b) Đa thức $x^{2n} - x^n + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

Giải :

a) Giả sử : $x^{2n} + x^n + 1 = (x^2 - x + 1)g(x)$ (1)

- Xét n lẻ : Thay x bởi $-x$, ta có : $x^{2n} - x^n + 1 = (x^2 + x + 1)g(-x)$

$\Rightarrow (x^{2n} - x^n + 1) \vdots (x^2 + x + 1)$: điều này không thể xảy ra.

Suy ra n không thể lẻ.

- Xét n chẵn : Thay x bởi $-x$, ta được :

$$x^{2n} + x^n + 1 = (x^2 + x + 1)g(-x) \Rightarrow n = 3m + 1 ; n = 3m + 2.$$

• Nếu $n = 3m + 1$:

Vì n chẵn, suy ra m lẻ $\Rightarrow m = 2k + 1 \Rightarrow n = 6k + 4$.

• Nếu $n = 3m + 2$:

Vì n chẵn, suy ra m cũng chẵn $\Rightarrow m = 2k \Rightarrow n = 6k + 2$.

Tóm lại : $(x^{2n} + x^n + 1) \vdots (x^2 - x + 1)$ khi và chỉ khi :

$$n = 6k + 2 \text{ và } n = 6k + 4 \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Giả sử : $x^{2n} - x^n + 1 = (x^2 - x + 1)g(x)$ (2)

- Xét n chẵn : Thay x bởi $-x$ trong (2), ta có :

$$x^{2n} - x^n + 1 = (x^2 + x + 1)g(-x)$$

Do đó : $(x^{2n} - x^n + 1) \vdots (x^2 + x + 1)$. Điều này không thể xảy ra.

- Xét n lẻ : Thay x bởi $-x$ trong (2), ta có :

$$x^{2n} + x^n + 1 = (x^2 + x + 1)g(-x)$$

Do đó : $n = 3m + 1 ; n = 3m + 2$.

• Nếu $n = 3m + 1 \Rightarrow m$ chẵn $\Rightarrow m = 2k \Rightarrow n = 6k + 1$.

• Nếu $n = 3m + 2 \Rightarrow m$ lẻ $\Rightarrow m = 2k + 1 \Rightarrow n = 6k + 5$.

Vậy $(x^{2n} - x^n + 1) \vdots (x^2 - x + 1)$ khi và chỉ khi $n = 6k + 1$ và $n = 6k + 5$.

Bài tập 44 : Tìm điều kiện của số nguyên p và q sao cho :

a) $P(x) = x^2 + px + q$ nhận cùng giá trị chẵn (lẻ) với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

b) $Q(x) = x^3 + px + q$ nhận cùng giá trị chia hết cho 3 với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

(Rumani 1962)

Giải :

a) $P(x)$ nhận giá trị cùng chẵn (hoặc lẻ) với mọi $x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi mỗi số $P(x+1)-P(x)=2x+1+p$ chia hết cho 2 nghĩa là p lẻ. Khi đó tính chẵn, lẻ của $P(x)$ phụ thuộc vào tính chẵn, lẻ của $q=P(0)$. Như vậy tất cả giá trị của $P(x)$ là chẵn (lẻ) khi p lẻ và q chẵn (tương ứng q lẻ).

b) Vì $Q(x)=x(x^2+p)+q$ nên $Q(3x)=3x(9x^2+p)+q$ chia hết cho 3. Với giá trị đó thì : $Q(3x\pm1)=(3x\pm1)(9x^2\pm6x+1+p)+q\equiv\pm(1+p)(\mathrm{mod}\,3)$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $1+p$ chia hết cho 3.

Vậy $Q(x)$ chia hết cho 3 (với mọi $x \in \mathbb{Z}$) khi :

$$q\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ p\equiv 2(\mathrm{mod}\,3).$$

Bài tập 45 : Cho đa thức bậc n : $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$.

Với số thực α, lập đa thức :

$$g(x)=(x-\alpha)f(x)=c_0x^{n+1}+c_1x^n+\ldots+c_{n-1}x+c_n.$$

Đặt : $A=\max\{|a_0|;|a_1|;\ldots;|a_n|\}$; $C=\max\{|c_0|;|c_1|;\ldots;|c_n|\}$.

Chứng minh : $A\le(n+1)C$.

Giải :

Lấy $g(x)$ chia cho $x-\alpha$, theo sơ đồ Horner, ta được :

$$\begin{cases} a_0=c_0 \\ a_1=c_1+\alpha c_0 \\ \ldots \\ a_n=c_n+\alpha c_{n-1}+\alpha^2c_{n-2}+\ldots+\alpha^nc_0 \end{cases}$$

Giả sử $|\alpha|\le1$ từ các đẳng thức trên ta có với mọi h $(0\le h\le n)$:

$$|a_n|\le|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_n|\le(h+1)C\le(n+1)C.$$

Suy ra : $A\le(n+1)C$.

Giả sử : $|\alpha|>1$, đặt $y=\dfrac{1}{x}$, ta được :

$$\left(y-\frac{1}{\alpha}\right)(a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\ldots+a_0)=-\frac{c_{n+1}}{\alpha}y^{n+1}-\ldots-\frac{c_1}{\alpha}y-\frac{c_0}{\alpha}.$$

Nên theo kết quả trên ta được : $A\le\dfrac{(n+1)C}{\alpha}<(n+1)C.$

5. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

5.1. Định nghĩa : Cho $f \in \mathbb{R}[x]$ và số $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ta gọi α là một nghiệm của f nếu $f(\alpha) = 0$.

5.2. Định lí Bézout :

Cho $f \in \mathbb{R}[x]$; α là một nghiệm thực của f khi và chỉ khi $f(x) \vdots (x-\alpha)$.

Chứng minh : Xét 2 đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x]$ với $g(x) = x - \alpha$ thì tồn tại duy nhất cặp đa thức $q(x), r(x)$ sao cho : $f(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x)$.

Vì $\deg r < \deg g = 1 \rightarrow r(x) \equiv \text{const}$

$f(x) = (x-\alpha)q(x) + c \Rightarrow f(x) = c$.

Do đó : $f(x) = (x-\alpha)q(x) + f(\alpha)$.

Nên α là nghiệm khi và chỉ khi $f(x) \vdots (x-\alpha)$.

5.3. Sơ đồ Horner : Để tìm thương và dư trong phép chia

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$ cho $g(x) = x - \alpha$.

Ta lập bảng :

	a_0	a_1	...	a_k	...	a_n
$x = \alpha$	$b_0 = a_0$	$b_1 = \alpha b_0 + a_1$	...	$b_k = \alpha b_{k-1} + a_k$	...	$b_n = \alpha b_{n-1} + a_n$

Với $f(x) = (x-\alpha)q(x) + f(\alpha)$; $f(\alpha) = b_n = \alpha b_{n-1} + a_n$;

$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}$.

5.4. Nghiệm bội : Cho $f \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$.

Ta gọi α là nghiệm bội k của $f(x)$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$ nghĩa là :

$$\begin{cases} f(x) = (x-\alpha)^k g(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ g(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Nếu $k = 1$, ta gọi α là nghiệm đơn hay vắn tắt là nghiệm.

5.5. Nghiệm hữu tỉ, nghiệm nguyên :

Định lí : Cho $f \in \mathbb{Z}[x], \deg f = n, a_i \in \mathbb{Z}$ sao cho :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0.$$

Nghiệm hữu tỉ nếu có $x = p/q$ với $(p, q) = 1$ thì p là ước của hệ số tự do và q là ước của hệ số cao nhất $p \mid a_n, q \mid a_0$.

Chứng minh : Thay $x = p/q$ vào phương trình $f(x) = 0$, ta có :

$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0$$

$\Rightarrow a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots a_{n-1}q^{n-1}p + a_nq^n = 0$

$\Rightarrow a_0p^n = -\left(a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}p + a_nq^n\right)$.

Do vế phải chia hết cho q nên a_0p^n chia hết cho q.

Mà $(p, q) = 1$ nên a_0 chia hết cho q. Suy ra : $q|a_0$.

Tương tự ta có : $a_nq^n = -\left(a_0p^n + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}p\right)$

Suy ra : a_nq^n chia hết cho p. Suy ra : $p|a_n$ (đpcm).

- Kết quả (1) : Nếu $a_0 = 1$ thì các nghiệm hữu tỉ của $f(x)$ đều là nghiệm nguyên với $f(x)$ là đa thức hệ nghiệm nguyên.
- Kết quả (2) : Dựa vào các phân số p/q đó và sơ đồ Horner để tìm các nghiệm.

5.6. Nghiệm phương trình bậc hai :

Cho phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

Lập $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

5.7. Tồn tại nghiệm của phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

Khi $\Delta \geq 0$ hoặc có số α mà $a.f(\alpha) \leq 0$.

Chứng minh : $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Nếu $\Delta \leq 0 \Rightarrow a.f(x) \geq 0, \forall x$.

Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow a.f(x)$ có dấu dương và dấu âm.

Do đó khi $a.f(\alpha) \leq 0$ thì ta có hoặc $\Delta = 0$ hoặc $\Delta > 0$ nên phương trình có nghiệm.

- *Đặc biệt :* Nếu $a.f(\alpha) < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1 < \alpha < x_2$.

Bài tập 46 : Cho $f(x) = 2x^5 - 70x^3 + 4x^2 - x + 1$. Tìm thương và dư của phép chia $f(x)$ cho $x - 6$.

Giải :

Ta lập sơ đồ Horner :

f	2	0	–70	4	–1	1
$\alpha = 6$	2	12	2	16	95	571

Ta có : $f(x) = (x-6)g(x) + f(6)$

$= (x-6)(2x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 16x + 95) + 571.$

Vậy thương : $g(x) = 2x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 16x + 95$

Và dư : $r(x) = f(6) = 571$.

Bài tập 47 : Cho $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 9$.

Tính $f(1), f(2), f(3)$. Nhận xét ?

Giải :

Theo sơ đồ Horner :

f	1	–4	6	–12	9
$\alpha = 1$	1	–3	3	–9	0
$\alpha = 2$	1	–2	2	–8	–7
$\alpha = 3$	1	–1	3	–3	0

Do đó : $f(1) = 0$; $f(2) = -7$; $f(3) = 0$.

Nhận xét : $f(1) = 0$; $f(3) = 0$.

Vậy nghiệm của phương trình : $x = 1$; $x = 3$.

Bài tập 48 : Tìm các nghiệm hữu tỉ của phương trình :

a) $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0$.

b) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$.

Giải :

a) Ta chỉ xét nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$ với $p | -2$ và $q | 3$.

Do đó : $x = \pm 1$; $x = \pm\frac{1}{3}$; $x = \pm 2$; $x = \pm\frac{2}{3}$.

Bằng cách thế trực tiếp hoặc dùng sơ đồ Horner ta chọn 2 nghiệm hữu tỉ $x = -2$; $x = \frac{1}{3}$.

b) Giải tương tự sau khi quy đồng, ta có :

$$2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0.$$

Ta có một nghiệm hữu tỉ là $x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 49 : Cho đa thức bậc chẵn và tất cả các hệ số đều lẻ. Chứng minh đa thức không có nghiệm hữu tỉ.

Giải :

Xét $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0.$

Với n chẵn, các a_i lẻ.

Giả sử đa thức có nghiệm hữu tỉ $x = p/q$ thì $p|a_0, q|a_n$. Do đó p, q lẻ.

Thế $x = p/q$ vào thì ta có : $a_np^n + a_{n-1}q^{n-1}p + ... + a_0q^n = 0.$

Điều này vô lí vì vế trái là tổng của một số lẻ các số hạng lẻ nên không thể bằng 0. Vậy đa thức không có nghiệm hữu tỉ.

Bài tập 50 : Cho số tự nhiên $n \geq 2$, chứng minh phương trình :

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 = 0$$

không có nghiệm hữu tỉ.

Giải :

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ α. Khi đó α là nghiệm hữu tỉ của đa thức :

$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + ... + n!\frac{x^k}{k!} + ... + n!\frac{x^2}{2!} + n!\frac{x}{1!} + n!.$$

Nhưng do $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số nguyên, hơn nữa hệ số của x^n bằng 1 nên suy ra α phải là số nguyên, do đó ta có :

$$\alpha^n + n\alpha^{n-1} + ... + n!\frac{\alpha^k}{k!} + ... + n!\frac{\alpha^2}{2!} + n!\frac{\alpha}{1!} + n! = 0 \quad (1)$$

Gọi p là một ước nguyên tố của n, $\forall k = \overline{1, n}$, kí hiệu r_k là số mũ của p thoả mãn $k! \vdots p_k^r$, ta có : $r_k = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{k}{p^s}\right]$ (2)

Với s là số nguyên không âm thoả mãn : $p^s \leq k \leq p^{s+1}$.

Từ (2) suy ra : $r_k \leq \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + ... + \frac{k}{p^s} = k\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)(p-1) < k.$

Nên : $r_n - r_k \geq r_n - k$. Suy ra : $r_n - r_k \geq r_n - k + 1$.

Vì vậy : $\dfrac{n!}{k!} \vdots p^{n-k+1}, \forall k = \overline{1, n}$ (3)

Hơn nữa, do $n \vdots p$ nên từ (1) ta có $\alpha^n \vdots p$, do đó $\alpha \vdots p$. Suy ra $\alpha^k \vdots p^k, \forall k = \overline{1, n}$. Kết hợp điều này với điều kiện (3), ta được $n!\dfrac{\alpha^k}{k!} \vdots p_n^{r+1}, \forall k = \overline{1, n}$. Từ đây và (1) ta suy ra $n! \vdots p_n^{r+1}$. Mâu thuẫn vừa nhận được chứng tỏ giả sử ban đầu là sai và vì vậy ta có đpcm.

Bài tập 51 : Cho đa thức $P(x)$ hệ số nguyên. Chứng minh đa thức không có nghiệm nguyên nếu $P(0)$ và $P(1)$ là các số lẻ.

Giải :

Giả sử a là nghiệm nguyên của $P(x)$ thì :

$$P(x) = (x - a)Q(x),\ Q(x) \text{ là hệ số nguyên.}$$

- Chọn $x = 0$ suy ra $P(0) = -a.Q(0)$. Vì $P(0)$ lẻ nên a lẻ.
- Chọn $x = 1$ suy ra $P(1) = (1 - a)Q(1)$. Vì $P(1)$ lẻ nên $1 - a$ lẻ. Suy ra a chẵn. Điều này vô lí.

Vậy phương trình đa thức không có nghiệm nguyên.

Bài tập 52 : Định m để $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz \vdots x + y + z\ ; \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Giải :

Đặt $f(x) = x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$.

Vì $f(x) \vdots x + y + z$ nên : $f(x) \vdots x - (y - z); \forall x, y, z$.

Nên $f(-y - z) = 0 \Leftrightarrow -(y + z)^3 + y^3 + z^3 + myz(-y - z) = 0\ ; \forall y, z$

$\Leftrightarrow yz(y + z)(m + 3) = 0\ ; \forall y, z \Leftrightarrow m = -3$. Vậy : $m = -3$.

Bài tập 53 : Cho $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $P(x) = 1\ ; P(x) = 2\ ; P(x) = 3$ có ít nhất một nghiệm nguyên lần lượt là x_1, x_2, x_3.

a) Chứng minh rằng x_1, x_2, x_3 là nghiệm nguyên duy nhất của các phương trình trên.

b) Suy ra $P(x) = 5$ không có hơn một nghiệm nguyên.

Giải :

a) Ta có : $P(x) = (x - x_2)q(x) + 2$ với $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Cho $x = x_1$ và $x = x_3$, ta được :

$$1 = P(x_1) = (x_1 - x_2)q(x_1) + 2 \Rightarrow (x_1 - x_2)q(x_1) = -1.$$

$$3 = P(x_3) = (x_3 - x_2)q(x_3) + 2 \Rightarrow (x_3 - x_2)q(x_3) = 1.$$

Vì $x_1 - x_2 ; x_3 - x_2 ; q(x_1) ; q(x_3)$ là những số nguyên nên $x_1 - x_2$ và $x_3 - x_2$ chỉ có thể bằng ± 1. Nhưng $x_1 \neq x_3$ nên :

- Hoặc $x_1 - x_2 = 1$ và $x_3 - x_2 = -1$.
- Hoặc $x_1 - x_2 = -1$ và $x_3 - x_2 = 1$.

Do đó x_2 là trung bình cộng của x_1, x_3. Giả sử phương trình $P(x) = 2$ còn có một nghiệm nguyên $x_2' \neq x_2$. Lặp lại lập luận trên cho 3 số x_1, x_2, x_3 thì ta thấy x_2' là trung bình cộng của x_1, x_3, tức là $x_2' = x_2$ (mâu thuẫn). Vậy x_2 là nghiệm duy nhất của phương trình $P(x) = 2$.

Giải tương tự cho $P(x) = 1 ; P(x) = 3$.

b) Giả sử phương trình $P(x) = 5$ có một nghiệm nguyên x_5, ta có :

$$5 = P(x) = (x_5 - x_2)q(x_5) + 2 \Rightarrow (x_5 - x_2)q(x_5) = 3.$$

Nên $x_5 - x_2$ có thể lấy các giá trị $\pm 1 ; \pm 3$. Nếu $x_5 - x_2 = \pm 1$ thì theo chứng minh trên x_5 phải trùng với x_1 hoặc x_3. Vô lí vì x_5 khác với x_1 và x_3. Do đó chỉ có thể xảy ra khả năng $x_5 - x_2 = \pm 3$.

Mà : $P(x) = (x - x_3)r(x) + 3 \; ; r(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Suy ra : $5 = P(x_5) = (x_5 - x_3)r(x_5) + 3 \Rightarrow (x_5 - x_3)r(x_5) = 2$.

Suy ra : $x_5 - x_3$ chỉ có thể lấy các giá trị $\pm 1 ; \pm 2$. Có thể thấy $x_5 - x_3 = \pm 1$ (mâu thuẫn). Nên $x_5 - x_3 = \pm 2$, do đó :

- Nếu $x_1 - x_2 = 1$ và $x_3 - x_2 = -1$ thì $x_5 - x_2 = -3$.
- Nếu $x_1 - x_2 = -1$ và $x_3 - x_2 = 1$ thì $x_5 - x_2 = 3$.

Như vậy nghiệm nguyên x_5 (nếu nó tồn tại) của phương trình $P(x) = 5$ được xác định hoàn toàn bởi x_1, x_2, x_3. Các số này là duy nhất, vậy phương trình $P(x) = 5$ không thể có hơn một nghiệm nguyên.

Bài tập 54 : Chứng minh phương trình bậc 2 : $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm trong các trường hợp :

a) $5a+4b+6c=0$.

b) $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0,\ m>0$.

Giải :

a) Từ : $5a+4b+6c=0 \Rightarrow b=\frac{-(5a+6c)}{4}$.

Do đó : $\Delta=b^2-4ac=\frac{1}{16}(5a+6c)^2-4ac=\frac{1}{16}(25a^2+36c^2-4ac)$

$$=\frac{1}{16}\left[(a-2c)^2+24a^2+32c^2\right]>0,\text{ đpcm.}$$

Chú ý : $25a^2-4ac+36c^2=f(a)>0$, do $\Delta<0$.

b) Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$. Ta sử dụng định lí đảo : $f(0)=c$.

$$f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=a\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2+b\left(\frac{m+1}{m+2}\right)+c$$

$$=\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\left(\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}\right)+c$$

$$=\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\left(-\frac{c}{m}\right)+c=\frac{-c}{m(m+2)}.$$

Suy ra : $f(0)f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\le 0$, do $m>0$.

Vậy phương trình có nghiệm : $x_0\in\left(0;\frac{m+1}{m+2}\right)$.

Bài tập 55 : Cho tam thức bậc hai : $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$.

a) Chứng minh nếu $a.c<0$ thì phương trình $f(f(x))=0$ có nghiệm.

b) Chứng minh nếu phương trình $f(x)=x$ vô nghiệm thì phương trình $f(f(x))=x$ vô nghiệm.

c) Cho $a=1$, giả sử phương trình $f(x)=x$ có hai nghiệm phân biệt.

Chứng minh rằng phương trình $f(f(x))=x$ có 4 nghiệm nếu :

$$(b+1)^2>4(b+c+1).$$

Giải :

a) Vì $a.c<0$ nên phương trình $ay^2+by+c=0$ có hai nghiệm y_1, y_2 và $y_1y_2<0$. Ở đó : $y=ax^2+bx+c$.

Mà $(ay_1)(ay_2) = a^2y_1y_2 < 0$, nên ay_1, ay_2 trái dấu. Chẳng hạn $ay_1 > 0$.

Khi đó $ax^2 + bx + c = y_1$ có nghiệm vì $a(c - y_1) = ac - ay_1 < 0$.

b) Giả sử $a > 0$ có tam thức $g(x) = ax^2 + (b-1)x + c$ có $\Delta < 0$ thành thử $g(x) > 0$ với mọi x nên $f(x) > x, \forall x$.

Vậy $f(f(x)) > f(x) > x, \forall x$ nên $f(f(x)) = x$ vô nghiệm.

c) Vì $a = 1$, suy ra : $f(x) = x^2 + bx + c$.

Giả sử α, β là hai nghiệm của $f(x) = x$.

Khi đó : $f(f(\alpha)) - \alpha = f(\alpha) - \alpha = 0$; $f(f(\beta)) - \beta = f(\beta) - \beta = 0$ và $f(f(x)) - x = (x-\alpha)(x-\beta)[x^2 + (b+1)x + c + b + 1]$.

Do đó : $f(f(x)) = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha \\ x = \beta \\ x^2 + (b+1)x + c + b + 1 = 0. \end{array}\right.$

Mà : $\Delta = (b+1)^2 - 4(b+c+1) > 0$. Do đó phương trình có 4 nghiệm.

Bài tập 56 : Cho đa thức : $P(x) = 1 + x^2 + x^9 + x^{n_1} + \ldots + x^{n_s} + x^{1992}$ Với $n_1, \ldots, n_s$ là các số tự nhiên cho trước thoả mãn : $9 < n_1 < \ldots < n_s < 1992$.

Chứng minh rằng nghiệm của đa thức $P(x)$ (nếu có) không thể lớn hơn $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(Việt Nam 1992)

Giải :

Với $x \geq 0$ thì $P(x) \geq 1 > 0$. Ta sẽ chứng minh $P(x) > 0$ với $\forall x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$. Thật vậy với $x < 0$ và $x \neq -1$, ta có :

$$P(x) \geq 1 + x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2k+1} + \ldots + x^{1991}$$

$$= 1 + x\frac{(x^{1990} + x^{1998} + \ldots + 1)(1 - x^2)}{(1 - x^2)}$$

$$= 1 + x\frac{1 - x^{996}}{1 - x^2} = \frac{1 - x^2 + x - x^{997}}{1 - x^2}.$$

Mà với $x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ thì $1 - x^2 > 0; -x^{997} > 0$; $1 - x^2 + x > 0$.

Nên $P(x)>0$ với $\forall x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$.

Vậy $P(x)>0$ với $\forall x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 57 : Cho các đa thức : $P_k(x), k=1,2,3,...$ xác định bởi :

$$P_1(x)=x^2-2\ ;\ P_{i+1}=P_1(P_i(x)), i=1,2,3,...$$

Chứng minh rằng $P_n(x)=x$ có 2^n nghiệm thực phân biệt nhau.

(*Quốc tế 1976*)

Giải :

Đặt $x=2\cos t$, ta thu hẹp việc xét nghiệm của phương trình trên đoạn $[-2;2]$. Khi đó, bằng quy nạp ta chứng minh được : $P_n(x)=2\cos 2^n t$, và phương trình $P_n(x)=x$ trở thành : $\cos 2^n t=\cos t$.

Từ đó ta được 2^n nghiệm :

$$t=\frac{2k\pi}{2^n-1},\ t=\frac{2k\pi}{2^n+1},\ k=1,2,...,n.$$

Suy ra rằng phương trình $P_n(x)=x$ có 2^n nghiệm thực phân biệt nhau.

Bài tập 58 : Cho đa thức : $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ có n nghiệm thực.

Chứng minh rằng $\forall p>n-1$ thì đa thức :

$$g(x)=a_0+a_1px+a_2p(p-1)x^2+...+a_np(p-1)...(p-n+1)x^n$$

cũng có n nghiệm thực.

Giải :

Để giải bài toán trên ta xét 2 trường hợp :

a) *Trường hợp 1 :* $f(x)$ không nhận $x=0$ làm nghiệm.

Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n=1$ bài toán hiển nhiên đúng.

Giả sử bài toán đúng với $n=k$, ta chứng minh đúng với $n=k+1$, tức là :

Nếu đa thức : $f(x)=a_0+a_1x+...+a_{k+1}x^{k+1}$ có $k+1$ nghiệm thực khác 0 thì đa thức $g(x)=a_0+pa_1x+...+p(p-1)...(p-k)a_{k+1}x^{k+1}$ cũng có $k+1$ nghiệm thực khác 0 với mọi $p>k$.

Gọi c là một nghiệm của $f(x)$ thì $f(x)=(x-c)q(x)$ (1)

Với $q(x)$ là đa thức bậc k của x :

$$q(x)=b_0+b_1x+...+b_kx_k \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), đồng nhất hệ số, ta được :

$$a_0=cb_0\,;\,a_1=cb_1+b_0;...;a_k=cb_k+b_{k-1}\,;\,a_{k+1}=b_k.$$

Do đó : $g(x)=a_0+pa_1x+...+p(p-1)...(p-k)a_{k+1}x^{k+1}$

$$=cb_0+p(cb_1+b_0)x+...+p(p-1)...(p-k)b_kx^{k+1}$$

$$=cQ(x)+pxQ(x)-x^2Q(x) \quad (3)$$

Trong đó : $Q(x)=b_0+b_1px+...+p(p-1)...(p-k+1)b_kx^k$.

Do $f(x)$ có $k+1$ nghiệm thực khác 0 nên $q(x)$ có k nghiệm thực khác 0. Mặt khác $p>k$ nên $p>k-1$. Nên theo giả thiết quy nạp, ta có đa thức $Q(x)$ có k nghiệm thực. Do đó $g(x)$ có $k+1$ nghiệm thực.

Vậy theo nguyên lí quy nạp, bài toán đúng.

b) *Trường hợp 2 :* $f(x)$ nhận $x=0$ làm nghiệm.

Giả sử $x=0$ là nghiệm bội k của $f(x)$, $(k\in\mathbb{Z}^+, k\le n)$. Khi đó ta có :

$$f(x)=a_kx^k+...+a_nx^n=(a_nx^{n-k}+...+a_k)x^k \text{ và}$$

$$g(x)=p(p-1)...(p-k+1)a_kx^k+...+p(p-1)...(p-n+1)a_nx^n$$

$$=p(p-1)...(p-k+1)x^k\left[a_k+...+(p-k)...(p-n+1)a_nx^{n-k}\right]$$

Vì $f(x)$ có n nghiệm thực nên $H(x)=a_k+...+a_nx^{n-k}$ có $(n-k)$ nghiệm thực khác 0.

Do đó áp dụng kết quả của trường hợp 1 cho $H(x)$ và $p'=p-k>n-k-1$ (do $p>n-1$), ta được đa thức :

$R(x)=a_k+...+(p-k)...(p-n+1)a_nx^{n-k}$ có $n-k$ nghiệm thực.

Vậy $g(x)$ có n nghiệm thực (đpcm).

Bài tập 59 : Cho đa thức $p(x)$ bậc 5 có 5 nghiệm thực phân biệt. Tìm số bé nhất của các hệ số khác 0.

(*Trung Quốc 1996*)

Giải :

Xét $p(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx+e$, $a\neq 0$.

Nếu có 4 hệ số bằng 0 thì $b = c = d = e = 0$ nên $P(x) = ax^5$ có nghiệm bội (loại) tức là $p(x)$ không thể có một hệ số khác 0.

Do đó $p(x)$ có ít nhất 2 hệ số khác 0.

Xét $p(x) = ax^5 + bx^n$, $n \geq 2$ thì $p(x)$ có nghiệm bội : loại.

Xét $p(x) = ax^5 + dx = ax\left(x^4 + \frac{d}{a}\right)$ có tối đa 3 nghiệm : loại.

Xét $p(x) = ax^5 + e$ có một nghiệm : loại.

Do đó $p(x)$ có ít nhất 3 hệ số khác 0.

Chọn $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$.

Thì $p(x)$ có đúng 5 nghiệm phân biệt và đúng 3 hệ số khác 0 : tồn tại min. Vậy số bé nhất của hệ số khác 0 là 3.

Bài tập 60 : Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức : $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ với hệ số thực (hoặc phức) có môđun không vượt quá :

a) $1 + \max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$, $k = 1, 2, ..., n$.

b) $p + \max\left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right|$, $k = 1, 2, ..., n$; p là số dương bất kì.

c) $2\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, $k = 1, 2, ..., n$

d) $\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + \max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$.

Giải :

a) Ta có : $f(x) = a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + ... + \frac{a_n}{a_0x^n}\right)$.

Gọi $A = \max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$ thì với $|x| \leq 1$ là hiển nhiên $|x| \leq 1 + A$, còn với nghiệm $|x| > 1$ thì :

$$f(x) = 0 \Rightarrow -1 = \frac{a_1}{a_0}.\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}.\frac{1}{x^2} + ... + \frac{a_n}{a_0}.\frac{1}{x^n}$$

$$\Rightarrow 1 \le A\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x^2|}+\dots+\frac{1}{|x^n|}\right)=\frac{A}{|x|}\cdot\frac{1-\frac{1}{|x^n|}}{1-\frac{1}{|x|}} \le \frac{A}{|x|}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{|x|}}$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{A}{|x|-1} \Rightarrow A \ge |x|-1 \Rightarrow |x| \le 1+A.$$

b) Ta có : $\frac{1}{p^n}f(x)=a_0\left(\frac{1}{p}\right)^n+\frac{a_1}{p}\left(\frac{x}{p}\right)^{n-1}+\dots+\frac{a_n}{p}.$

Theo câu 1), mọi nghiệm x của đạ thức đều phải có :

$$\frac{|x|}{p}<1+\max\left|\frac{a_k}{a_0p^k}\right| \Leftrightarrow |x| \le p+\max\left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right|.$$

c) Đặt $p=\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, khi đó :

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right| \le p^k \Rightarrow \left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right| \le p \text{ nên } \max\left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right| \le p.$$

Do đó, theo câu 2, môđun tất cả các nghiệm không vượt quá :

$$|x| \le p+\max\left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right| \le 2p = 2\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}.$$

d) Đặt $p=\max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$, khi đó $|a_k| \le a_1p^{k-1}$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_1}{a_0}\right| \Rightarrow \max\left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_1}{a_0}\right|.$$

Theo câu b), nghiệm của đa thức không vượt quá :

$$|x| \le p+\max\left|\frac{a_k}{a_0p^{k-1}}\right| \le \left|\frac{a_1}{a_0}\right|+\max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$$

6. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3 VÀ BẬC CAO

6.1. Lí thuyết giải phương trình bậc 3 tổng quát :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0.$$

Ngoài việc tách nhóm số hạng hoặc tìm một nghiệm rồi phân tích thành nhân tử, ta có cách giải tổng quát như sau :

Chia hai vế $a \neq 0$ rồi đưa về phương trình có dạng :

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Đặt $x = y - \frac{B}{3}$ rồi đưa tiếp về phương trình $y^3 - py = q$, trong đó :

$$p = \frac{B^2}{3} - C \; ; \; q = -\frac{2B^3}{27} + \frac{BC}{3} - D$$

Có hai hướng để giải phương trình : $y^3 - py = q$ (1)

Hướng 1 : Đặt $y = u + v$ và chọn $uv = \frac{p}{3}$ thì từ

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) \text{ ta có hệ : } \begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3v^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases}$$

Vậy u^3, v^3 là nghiệm của phương trình : $Z^2 - qZ + \frac{p^3}{27} = 0$. Nếu $\Delta < 0$ sau này ta dùng số phức để chuyển tiếp số phức ra số thực.

Hướng 2 : Xét hai trường hợp sau :

- Nếu $p = 0$ thì từ (1) ta có $y^3 = q \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{q}$.
- Nếu $p > 0$. Đặt $y = 2\sqrt{\frac{p}{q}}.t$ thì từ (1) ta được $4t^3 - 3t = m$. (2)

Trong đó : $m = \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{p}}$.

Xét $|m| \leq 1$, đặt $m = \cos\alpha$ thì (2) có 3 nghiệm :

$$t_1 = \cos\frac{\alpha}{3} \; ; t_2 = \cos\frac{\alpha + 2\pi}{3} \; ; \; t_3 = \cos\frac{\alpha - 2\pi}{3}.$$

Xét $|m| > 1$, đặt $m = \frac{1}{2}\left(d^3 + \frac{1}{d^3}\right) \Rightarrow d^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$.

Phương trình (2) có một nghiệm :

$$t=\frac{1}{2}\left(d+\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2-1}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{m^2-1}}\right).$$

• Nếu $p<0$. Đặt $y=2\sqrt{-\frac{p}{3}}.t$ thì từ (1) ta được : $4t^3+3t=m$ (3)

Ta đặt tiếp $m=\frac{1}{2}\left(k^3-\frac{1}{k^3}\right)\Rightarrow k^3=m\pm\sqrt{m^2+1}.$

Phương trình (3) có một nghiệm :

$$t=\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2+1}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{m^2+1}}\right).$$

Ta thường gọi phương trình bậc 3 : $4x^3+3x-m=0, 4x^3-3x-m=0$ là các dạng phương trình bậc 3 chuẩn tắc. Ý nghĩa cơ bản là mọi phương trình bậc 3 đều đưa về được dạng chuẩn tắc đó.

Chú ý thêm khi $|m|\geq 1$: $4x^3+3x-m=(x-\alpha)(4x^2+4\alpha x+4\alpha^2+3)$

Với $\alpha=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2+1}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{m^2+1}}\right)$ có $\Delta'=-12(\alpha^2+1)<0$

Và $4x^3-3x-m=(x-\beta)(4x^2+4\beta x+4\beta^2-3).$

Với $\beta=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2-1}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{m^2-1}}\right)$ có $\Delta'=12(1-\beta^2)<0.$

6.2. Các phương trình bậc 4 dạng đặc biệt :

a) $ax^4+bx^2+c=0, a\neq 0.$

Đặt $t=x^2, t\geq 0$ thì đưa về phương trình bậc 2 : $at^2+bt+c=0.$

b) $(x+a)^4+(x+b)^4=c.$

Đặt $t=x+\frac{a+b}{2}$, đưa về phương trình trùng phương $At^4+Bt^2+C=0.$

c) $(ax^2+bx+c)(ax^2+bx+d)=m.$

Đặt $t=ax^2+bx$, đưa về phương trình bậc 2 : $(t+c)(t+d)=m.$

d) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m.$

Nếu có $a+d=b+c$ thì ghép cặp $(x+a)(x+d)$ và $(x+b)(x+c)$ rồi đặt $t=x^2+(a+d)x=x^2+(b+c)x$ để đưa về dạng trên.

e) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ với $ad^2=eb^2\neq 0$ thì chia hai vế cho $x^2\neq 0$ rồi đặt $t=x+\frac{e}{ax}$ (đây là phương trình quy hồi bậc 4).

6.3. Phương trình quy hồi (đối xứng hệ số) :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Trong đó : $a_0 = a_n ; a_1 = a_{n-1} ; a_2 = a_{n-2} ; \ldots$

• Xét $n = 2m$:

Chia 2 vế cho $x^m \neq 0$ rồi đặt $t = x + \frac{1}{x}$ đưa về phương trình bậc $m = \frac{n}{2}$.

• Xét $n = 2m + 1$:

Phương trình có nghiệm $x = -1$ nên phân tích ra thành $(x+1)$ và thừa số bậc 2m lại là phương trình quy hồi bậc chẵn. Tiếp tục giải như trên.

* Đôi khi ta mở rộng dạng quy hồi (quy hồi kèm tỉ lệ) với cách đặt $t = x - \frac{1}{x} ; t = x + \frac{a}{x}$.

6.4. Phương trình bậc cao :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

• Nguyên tắc chung : Biến đổi về dạng tích, đặt ẩn phụ để đưa về phương trình bậc thấp hơn.

• Đặc biệt :

- Nếu tổng các hệ số bằng 0 thì có nghiệm $x = 1$.
- Nếu tổng đan dấu các hệ số bằng 0 thì có nghiệm $x = -1$.
- Nghiệm hữu tỉ nếu có thì có dạng $x = \frac{p}{q}$ với $p \mid a_n$ và $q \mid a_0$. Thế trực tiếp hoặc dùng sơ đồ Horner để thử nghiệm.

• Đôi khi phương trình bậc cao đối với biến x mà lại bậc thấp đối với tham số thì ta chuyển về phương trình theo ẩn là tham số đó.

Bài tập 61 : Giải phương trình :

a) $4x^3 - 10x^2 + 6x - 1 = 0$.

b) $8x^3 - 36x + 27 = 0$.

Giải :

a) Ta có : $4x^3 - 10x^2 + 6x - 1 = 4x^3 - 2x^2 - 8x^2 + 4x + 2x - 1$

$$= 2x^2(2x-1) - 4x(2x-1) + (2x-1)$$

$$= (2x-1)(2x^2 - 4x + 1).$$

Do đó : $4x^3 - 10x^2 + 6x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2x^2-4x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ 2x^2-4x+1=0 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x=\dfrac{1}{2}$; $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có : $8x^3-36x+27=8x^3-12x^2+12x^2-18x-18x+27$

$$=4x^2(2x-3)+6x(2x-3)-9(2x-3)$$

$$=(2x-3)(4x^2+6x-9)$$

Từ đó : $8x^3-36x+27=0$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(4x^2+6x-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ 4x^2+6x-9=0. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x=\dfrac{3}{2}$; $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{45}}{4}$.

Bài tập 62 : Tìm quan hệ giữa p và q để phương trình $x^3+px+q=0$ có thể viết dưới dạng : $x^4=(x^2-ax+b)^2$.

Áp dụng kết quả đó để giải phương trình : $x^3-18x+27=0$.

Giải :

Ta có : $x^4-(x^2-ax+b)^2=m(x^3+px+q)$.

Suy ra : $\begin{cases} a^2+2b=0 \\ 2ab=pm \\ 2a=m\,;b^2=qm. \end{cases}$

Từ đó : $b=p \Rightarrow p^2=mq \Rightarrow m=\dfrac{p^2}{q}$.

Do : $a^2=-2b$ mà $2a=m \Rightarrow a=\dfrac{m}{2} \Rightarrow \dfrac{m^2}{4}=-2b=-2p \Rightarrow m^2=-8p$.

Từ đó : $\dfrac{p^4}{q^2}=-8p \Rightarrow p^4+8pq^2=0$. Vậy : $p^3+8q^2=0$.

Ta có : $x^3-18x+27=0 \Leftrightarrow x^4=(x^2+6x-18)^2$

$$\Leftrightarrow (6x-18)(2x^2+6x-18)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \vee x=\frac{-3\pm\sqrt{45}}{2}.$$

Bài tập 63 : Giải và biện luận phương trình :

a) $x^3 - 3x^2 + 3(a+1)x - (a+1)^2 = 0.$

b) $x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0.$

Giải :

a) Ta có : $x^3 - 3x^2 + 3(a+1)x - (a+1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow -x^3 = -3x^2 + 3(a+1)x - (a+1)^2$$

• Nếu $a \neq -1$: Nhân hai vế của phương trình với $(a+1)$, ta được :

$$-x^3(a+1) = -3x^2(a+1) + 3(a+1)^2 x - (a+1)^3$$

Cộng hai vế của phương trình trên với x^3 ta được : $-ax^3 = (x-a-1)^3$

Từ đó ta được : $x - a - 1 = -x\sqrt[3]{a} \Rightarrow x = \dfrac{a+1}{\sqrt[3]{a}+1} = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1.$

• Nếu $a = -1$ thì phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 0 \wedge x_2 = 3.$

b) Viết phương trình dưới dạng : $xa^2 + (2x^2+1)a + x^3 - 1 = 0.$

Xem a là ẩn, x là tham số thì ta có một phương trình bậc 2 ẩn là a.

Giải ra ta được : $\left[\begin{array}{ll} a = 1 - x & (1) \\ a = -\dfrac{x^2+x+1}{x} & (2) \end{array}\right.$

Nói cách khác ta đã phân tích phương trình thành :

$$(x+a-1)\left[x^2 + (a+1)x + 1\right] = 0.$$

Từ (1) cho ta : $x = -a + 1.$

Từ (2) $\Leftrightarrow x^2 + (a+1)x + 1 = 0.$

Ta có : $\Delta = (a-1)(a+3) \geq 0$ nếu $a \leq 1 \vee a \leq -3.$

Do đó phương trình luôn có một nghiệm $x_1 = 1 - a$ và nếu $a \geq 1$ hoặc $a \leq -3$ nó còn có thêm 2 nghiệm là : $x_{2,3} = \dfrac{1}{2}\left(-a - 1 \pm \sqrt{(a-1)(a+3)}\right).$

Bài tập 64 : Giải các phương trình :

a) $x^4 + x^2 - 6 = 0$ (1)

b) $x^8 - x^4 - 20 = 0$ (2)

c) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$ (3)

Giải :

a) Đặt $t = x^2, t \geq 0.$ Phượng trình (1) trở thành : $t^2 + t - 6 = 0$

Ta có : $\Delta = 25 \Rightarrow t = -3$ (loại) ; $t = 2 > 0$. Do đó : $x = \pm\sqrt{2}$.

b) Đặt $t = x^4$, $t \geq 0$. Phương trình (2) trở thành $t^2 - t - 20 = 0$

Ta có : $\Delta = 81 \Rightarrow t = -4$ (loại) ; $t = 5$. Do đó : $x = \pm\sqrt[4]{5}$.

c) Đặt : $t = x + \dfrac{3+5}{2} = x + 4$.

Phương trình (3) trở thành : $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2$

$\Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 2$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2(t^2+6) = 0 \Rightarrow t = 0$.

Do đó : $x = -4$.

Bài tập 65 : Giải phương trình :

a) $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1) = 4$ (1)

b) $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12) + x^2 + 5x - 6 = 0$ (2)

Giải :

a) Ta có : (1) $\Leftrightarrow (12x^2+11x+2)(12x^2+11x-1) = 4$.

Đặt : $y = 12x^2 + 11x$, ta được : $y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -3 \\ y_2 = 2. \end{array}\right.$

• Với $y_1 = -3$, ta có: $12x^2 + 11x + 3 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

• Với $y_2 = 2$, ta có: $12x^2 + 11x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{217}}{24}$.

b) Vì $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6).$$

Do đó, đặt : $y = x^2 + 5x$, từ (2) ta được :

$$(y+4)(y+6) + y - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -2 \\ y_2 = -9 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy với $y_1 = 2$, ta có: $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Bài tập 66 : Giải phương trình quy hồi :

a) $x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0$ (1)

b) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$ (2)

Giải :

a) Xét $x = 0$ thì (1) vô nghiệm.

Xét khi $x \neq 0$, chia 2 vế của (1) cho x^2, ta được :

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 9 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 + 9 = 0.$$

Đặt : $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2$, ta được : $t^2 - 8t + 7 = 0$ (*)

Giải (*), ta được : $t = 1$ (loại) $\vee t = 7$.

Thế $t = 7$ vào phương trình (*) :

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

b) Xét $x = 0$ thì (2) vô nghiệm.

Xét $x \neq 0$, chia 2 vế của (2) cho x^2, ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 21x + 74 - \frac{105}{x} + \frac{50}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0. \qquad (*)$$

Đặt : $y = x + \frac{5}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$

Thế y vào (*) ta được : $2y^2 - 21y + 54 = 0$.

Giải ra ta được : $y_1 = 6$; $y_2 = \frac{9}{2}$.

- Với $y_1 = 6$, ta có : $x + \frac{5}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{array}\right.$

- Với $y_2 = \frac{9}{2}$, ta có: $x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_4 = \frac{5}{2}. \end{array}\right.$

Bài tập 67 : Giải các phương trình :

a) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = 0$ (1)

b) $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$ (2)

c) $x^4 - 3x^2 - 10x - 4 = 0$ (3)

Giải :

a) $(1) \Leftrightarrow (x-2)(x^3-6x+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2)(x^2+2x-2)=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2+2x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)^2=0\\ x^2+2x-2=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm : $x=2$; $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$.

b) $(2) \Leftrightarrow x^4=-x^2-4x+3 \Leftrightarrow (x^2+1)^2=(x-2)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)^2-(x-2)^2=0 \Leftrightarrow (x^2-x+3)(x^2+x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^2-x+3=0 & (\text{vô nghiệm})\\ x^2+x-1=0 & (*)\end{array}\right.$$

Giải (*), phương trình (2) có nghiệm : $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) $(3) \Leftrightarrow x^4=3x^2+10x+4 \Leftrightarrow x^4+2x^2+1=5x^2+10x+5$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)^2-5(x+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2+1+\sqrt{5}(x+1)\right]\left[x^2+1-\sqrt{5}(x+1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^2+1+\sqrt{5}(x+1)=0 & (\text{vô nghiệm})\\ x^2+1-\sqrt{5}(x+1)=0 & (*)\end{array}\right.$$

Giải (*), phương trình đã cho có nghiệm là : $x=\dfrac{\sqrt{5}\pm\sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}$.

Bài tập 68 : Giải phương trình :

a) $2x(2x^2+x+3)+13x(2x^2-5x+3)=6(2x^2-5x+3)(2x^2+x+3)$ (1)

b) $x^2+\dfrac{4x^2}{(x-2)^2}=5$ (2)

Giải :

a) Ta thấy $x=1$ và $x=\dfrac{3}{2}$ không phải là nghiệm.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $(2x^2-5x+3)(2x^2+x+3)\neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2x+\frac{3}{x}-5}+\frac{13}{2x+\frac{3}{x}+1}=6 \qquad (*)$$

Đặt $y=2x+\frac{3}{x}$, thế vào (*) ta được : $\frac{2}{y-5}+\frac{13}{y+1}=6$.

Giải phương trình trên, thì : $y=1$ hoặc $y=\frac{11}{2}$.

• Với $y=1 \Rightarrow 2x+\frac{3}{x}=1$, phương trình vô nghiệm.

• Với $y=\frac{11}{2} \Rightarrow 2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2} \Rightarrow x_1=2\ ;\ x_2=\frac{3}{4}$.

b) Vế trái của (2) có thể viết lại :

$$(2) \Leftrightarrow \left(x+\frac{2x}{x-2}\right)^2-\frac{4x^2}{x-2}=5 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2-\frac{4x^2}{x-2}=5 \qquad (*)$$

Từ đó ta thấy nếu đặt $y=\frac{x^2}{x-2}$ thế vào (*), ta được :

$$(*) \Leftrightarrow y^2-4y-5=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=5 \\ y_2=-1. \end{array}\right.$$

• Với $y_1=5$ thì : $\frac{x^2}{x-2}=5$, phương trình vô nghiệm.

• Với $y_2=-1$ thì : $\frac{x^2}{x-2}=-1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-2. \end{array}\right.$

Bài tập 69 : Cho phương trình : $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ có nghiệm.

Tìm giá trị bé nhất của a^2+b^2.

(*Vô địch quốc tế 1973*)

Giải :

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình trên thì :

$$x_0^4+ax_0^3+bx_0^2+ax_0+1=0 \qquad (*)$$

• Xét $x_0=0$ thì (*) vô nghiệm.

• Xét $x_0\neq 0$, chia 2 vế của (*) cho x_0^2, ta được :

$$(*) \Leftrightarrow x_0^2+ax_0+b+\frac{a}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x_0^{\ 2}+\frac{1}{x_0^{\ 2}}\right)+a\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)+b=0.$$

Đặt $y=x_0+\dfrac{1}{x_0}$. Điều kiện : $|y|=|x_0|+\left|\dfrac{1}{x_0}\right|\geq 2.$

Nên : $(y^2-2)+ay+b=0\Rightarrow|2-y^2|=|ay+b|\leq\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{y^2+1}$

$$\Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{(2-y^2)^2}{1+y^2}.$$

Đặt : $t=y^2$, $t\geq 4$. Ta chứng minh : $\dfrac{(2-t)^2}{1+t}\geq\dfrac{4}{5}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 5(2-t)^2\geq 4(1+t)\Leftrightarrow 5t^2-24t+16\geq 0$ đúng vì $t\geq 4$.

Bài tập 70 : Giải phương trình :

a) $x^6-7x^2+\sqrt{6}=0$ (1)

b) $x^7-2x^6+3x^5-x^4-x^3+3x^2-2x+1=0$ (2)

Giải :

a) Đặt $t=x^2$, $t\geq 0$.

(1) $\Leftrightarrow t^3-7t+\sqrt{6}=0\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{6}\right)\left(t^2+\sqrt{6}t-1\right)=0.$

Giải phương trình trên, ta được :

$$t=\sqrt{6}\vee t=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2};\ t=\frac{-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}\ \text{(loại).}$$

Nên : $x=\pm\sqrt[4]{6}\vee x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}.$

b) Phương trình quy hồi bậc lẻ :

(2) $\Leftrightarrow(x+1)\left(x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1=0\quad(*)\end{array}\right.$$

Giải (*) như sau :

Chia 2 vế của (*) cho x^3, đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, $|t|\geq 2$.

Phương trình : $t^3-3t^2+3t-1=0\Leftrightarrow(t-1)^3=0$ nên $t=1$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm : $x=-1$.

Bài tập 71 : Chứng minh các phương trình sau vô nghiệm :

a) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$ (1)

b) $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$ (2)

Giải :

a) $(1) \Leftrightarrow x^2(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)+2x^2=0$

$\Leftrightarrow (x^2+1)(x+1)^2+2x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x=0 \end{array}\right.$ Không xảy ra đồng thời nên phương trình vô nghiệm.

b) $(2) \Leftrightarrow \left(x^4-\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2-x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x^4-\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2}{3}=0.$

Vì vế trái dương nên phương trình vô nghiệm.

Bài tập 72 : Giải phương trình :

a) $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2$ (*Việt Nam 2002*)

b) $x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}$ (*Việt Nam 1991*)

Giải :

a) $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 4-3\sqrt{10-3x}=(x-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 3\sqrt{10-3x}=4x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, 4x-x^2 \ge 0 \\ 9(10-3x)=(4x-x^2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, 0 \le x \le 4 \\ x^4-8x^3+16x^2+27x-90=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ x^4-8x^3+16x^2+27x-90=0 \quad (*) \end{cases}$

Giải (*), ta có $x=3$ là một nghiệm nên phương trình :

$(x-3)(x^3-5x^2+x+30)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x^2-7x+15)=0$ do $\Delta < 0$ và $x=-2$ (loại), phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

b) Từ phương trình : $x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}$.

Ta có điều kiện $x\ge -1$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si :

$$8\sqrt[4]{4x+4}=4\sqrt[4]{4.4.4(x+1)}\le x+13$$

Do đó : $x^3-3x^2-8x+40\le x+13$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-9x+27\le 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-6x+9)\le 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-3)^2\le 0.$

Vì $x\ge -1$ nên $(x-3)^2\le 0 \Rightarrow x=3$. Thử lại đúng. Vậy $x=3$.

Bài tập 73 : Chứng minh :

a) $x=\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a\ge\frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ.

Giải :

a) Áp dụng hằng đẳng thức : $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$.

Ta có : $x^3=2a+(1-2a)x \Leftrightarrow x^3+(2a-1)x-2a=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2a)=0$$

Xét đa thức bậc 2 : $x^2+x+2a=0$ có $\Delta=1-8a\ge 0$.

• Khi $a=\frac{1}{8}$, ta có : $x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=1$.

• Khi $a>\frac{1}{8}$, ta có : $1-8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm thực duy nhất $x=1$. Vậy với mọi $a\ge\frac{1}{8}$ ta có $x=1$ là số tự nhiên.

b) Ta có : $x^3=2+4+3\sqrt[3]{8}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$ (*)

Đặt : $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. Thế x vào (*), ta được :

(*)$\Rightarrow x^3=6+6x \Leftrightarrow x^3-6x-6=0.$

Giả sử x hữu tỉ mà $a_0=1$. Suy ra x là số nguyên.

Và $2<\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}<4$ nên $x=3$.

Do đó : $x^3-6x-6=3\ne 0$: vô lí.

Vậy x là số vô tỉ.

Bài tập 74 : Tìm đa thức theo x có bậc bé nhất với hệ số nguyên, biết một nghiệm là $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

(*Việt Nam 1984*)

Giải :

Đặt $a=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, ta có :

$$a^2=2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9} \text{ và } a^3=2\sqrt{2}+6\sqrt[3]{3}+3\sqrt{2}.\sqrt[3]{9}+3 \qquad (*)$$

Rút ra : $\sqrt[3]{3}=a-\sqrt{2}$.

$$\sqrt[3]{9}=a^2-2-2\sqrt{2}\left(a-\sqrt{2}\right)=a^2+2-2\sqrt{2}a.$$

Thay vào (*), ta có :

$$a^3=2\sqrt{2}+6\left(a-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}\left(a^2+2-2\sqrt{2}a\right)+3$$

$$\Leftrightarrow a^3+6a-3=\sqrt{2}\left(3a^2+2\right).$$

Bình phương 2 vế của phương trình $a^3+6a-3=\sqrt{2}\left(3a^2+2\right)$ ta thấy a là nghiệm của đa thức :

$$a^6-6a^4-6a^3+12a^2-36a+1=0.$$

Bằng phép đồng nhất hệ số, ta chứng minh đa thức trên không phân tích được thành tích 2 đa thức bậc thấp hơn có hệ nguyên nên đa thức trên chính là đa thức có bậc bé nhất thoả đề bài.