ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2012
Môn thi: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I .

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 2z - z^2 \\ (y-z)^2 = 2x - x^2 \\ (z-x)^2 = 2y - y^2 \end{cases}$$

2) Cho hình vuông ABCD cạnh a. M và N là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh AB và BC sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{CN}{CB} = x$ với $0 < x < 1$. Các đường thẳng qua M,N song song với BD lần lượt cắt AD tại Q và CD tại P. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và x và tìm x sao cho diện tích này lớn nhất.

Câu II .

Số nguyên dương n được gọi là số điều hòa nếu như tổng các bình phương của các ước dương của nó (kể cả 1 và n) đúng bằng $(n+3)^2$.

a) Chứng minh rằng số 287 là số điều hòa.

b) Chứng minh rằng số $n = p^3$ (p nguyên tố) không phải là số điều hòa.

c) Chứng minh rằng nếu số $n = pq$ (p,q là các số nguyên tố khác nhau) là số điều hòa thì $n+2$ là số chính phương.

Câu III .

a) Tìm giá trị $x \in R$ thỏa mãn $x^2 - 5x + 4 + 2\sqrt{x-1} \geq 0$

b) Chứng minh rằng với các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 3$, ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac$$

Câu IV .

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên đường thẳng vuông góc với AB tại B ta lấy điểm D di động cùng phía với C đối với đường thẳng AB.

a) Chứng minh rằng nếu $AC + BD < CD$ thì trên cạnh AB tồn tại hai điểm M, N sao cho $\widehat{CMD} = \widehat{CND} = 90^0$

b) Giả sử điều kiện trên được thỏa mãn. Đường thẳng qua A song song với MD cắt đường thẳng qua B song song với MC tại E. Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Câu V .

Cho đa giác đều n cạnh. Dùng 3 màu xanh,đỏ, vàng tô màu các đỉnh đa giác một cách tùy ý (mỗi đỉnh được tô bởi một màu và tất cả các đỉnh đều được tô màu). Cho phép thực hiện thao tác sau đây: chọn hai đỉnh kề nhau bất kì (nghĩa là hai đỉnh liên tiếp) khác màu và thay màu của hai đỉnh đó bằng màu còn lại.

a) Chứng minh rằng bằng cách thực hiện thao tác trên một số lần ta luôn luôn làm cho các đỉnh đa giác chỉ còn được tô bởi hai màu.

b) Chứng minh rằng với $n = 4$ và $n = 8$, bằng cách thực hiện thao tác trên một số lần ta có thể làm cho các đỉnh của đa giác chỉ còn được tô bởi một màu.

— Hết —