

# TỔNG HỢP 60 BÀI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## Bài 1.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 & (1) \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:  $(x-2)^3 = (3+y)^3 \Rightarrow x = y+5$  (3)

Thế (3) vào phương trình (2) của hệ ta được:  $y^2 + 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = 3 \\ y = -3 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

Đáp số:  $(3; -2), (2; -3)$  là nghiệm của hệ.

## Bài 2.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:  $(x-1)^3 = (2-y)^3 \Rightarrow x = 3-y$  (3)

Thế (3) vào phương trình (2) của hệ ta được:  $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Đáp số:  $(2; 1), (1; 2)$  là nghiệm của hệ.

## Bài 3.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 & (1) \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:  $(x-4)^3 = (3-y)^3 \Rightarrow x = 7-y$  (3)

Thế (3) vào phương trình (2) của hệ ta được:  $y^2 - 7y + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \Rightarrow x = 3 \\ y = 3 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

Đáp số:  $(3; 4), (4; 3)$  là nghiệm của hệ.

## Bài 4.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} & (1) \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy phương trình (1) nhân với 25 cộng theo với với phương trình (2) nhân với 50 rồi nhóm lại ta được:

$$25(3x+y)^2 + 50(3x+y) - 119 = 0 \Leftrightarrow 3x+y = \frac{7}{5}; 3x+y = -\frac{17}{5}.$$

Trường hợp 1:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ y = \frac{7}{5} - 3x \end{cases}$  Thế ta được:  $x = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5}; x = \frac{11}{25} \Rightarrow y = \frac{2}{25}$

Trường hợp 2:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ y = -\frac{17}{5} - 3x \end{cases}$  vô nghiệm.

Vậy  $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right); \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25}\right)$  là nghiệm của hệ.

## Bài 5.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy phương trình (1) cộng với phương trình (2) nhân với 3 được:

$$x^3 + 3x^2 + (3y^2 - 24y + 51)x + 3y^2 - 24y + 49 = 0 \Leftrightarrow (x+1)((x+1)^2 + 3(y-4)^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1, y = 4 \end{cases}$$

Lần lượt thế vào phương trình (1) của hệ ta được  $(-1; 4), (-1; -4)$  là nghiệm của hệ.

**Bài 6.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 & (1) \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:

$$(6y + 15)x^2 + 3(2y + 5)x + 2y^3 + 15y^2 + 39y + 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y + 5) \left( 3 \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y + \frac{5}{2} \right)^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Lần lượt thế vào phương trình (1) ta được:  $\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$  là nghiệm của hệ.

**Bài 7.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x + y \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

**Giải**

Chú ý rằng:  $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(3(x-y)^2 + (x+y)^2)$

nên ta đặt  $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases}$  thì được hệ mới: 
$$\begin{cases} 3a^2 + b^2 = 4b & (1) \\ ab = 3 & (2) \end{cases}$$

Đem thế  $a = \frac{3}{b}$  từ phương trình (2) vào phương trình (1) rồi giải tìm được  $b = 3 \Rightarrow a = 1$

Từ đó tìm lại được:  $x = 2; y = 1$  là nghiệm của hệ.

**Bài 7.1**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} = y + 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

**Giải**

ĐK:  $y \geq -1$  Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 6 = y^2 + 2y + 1 \\ \frac{1}{4}(3(x+y)^2 + (x-y)^2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+2) = -5 \\ 3(x+y)^2 + (x-y)^2 = 28 \end{cases} \quad (**)$$

Đặt  $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases}$  khi đó (\*\*) trở thành  $\begin{cases} b(a+2) = -5 \\ 3a^2 + b^2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$

Giải hệ trên ta thu được nghiệm:  $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có tập hợp nghiệm là:  $\{(-3; 2), (1; 2)\}$

**Bài 8.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = xy + 2y \\ 2x^3 + 3xy^2 = 2y^2 + 3x^2y \end{cases}$$

**Giải**

Với  $y = 0 \Rightarrow x = 0$  là nghiệm của hệ.

Với  $y \neq 0$ , nhân phương trình 1 với  $-y$  rồi cộng theo về với phương trình 2 ta được:

$$2x^3 - 4x^2y + 4xy^2 - 2y^3 = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thế lại vào phương trình 1 của hệ ta được:  $2y^2 = 2y \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$

Vậy  $(1; 1), (0; 0)$  là nghiệm của hệ

**Bài 9.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 8\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \\ x - 3y = 6 \end{cases} \quad (*)$$

**Giải**

Đk:  $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ . Lúc đó hpt (\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}) = 6(4\sqrt{x} + \sqrt{y}) & (1) \\ x - 3y = 6 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) có:  $3(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}) = (x - 3y)(4\sqrt{x} + \sqrt{y}) \Leftrightarrow \sqrt{x}(x + \sqrt{xy} - 12y\sqrt{x}) = 0$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(\sqrt{x} + 4\sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 9y$ . Thay vào (2) có  $y = 1 \Rightarrow x = 9$ .

Vậy hpt có 1 nghiệm  $\begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$

**Bài 10.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2y}{x}} = 3 \\ x - y + xy = 3 \end{cases} \quad (*)$$

**Giải**

Đk  $x, y > 0$ . Lúc đó hpt (\*)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} = 3 \\ x - y + xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0 \\ x - y + xy = 3 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)(2x - y) = 0 \\ x - y + xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y^2 + y - 3 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$

Lúc đó kết hợp với đk ta được hpt có nghiệm  $(x; y)$  là  $(2; 1); (-3; -\frac{3}{2}); (-1; -2); (\frac{3}{2}; 3)$

**Bài 11.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy phương trình 1 trừ đi phương trình 2 nhân với 8 ta được:  $(x - 2)^2 = (y - 4)^4 \Leftrightarrow x = y - 2; x = 6 - y$

Lần lượt thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

Trường hợp 1:  $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$

Trường hợp 2:  $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x = 6 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy  $(4; 2), (-4; -2)$  là nghiệm của hệ.

**Bài 12.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-y) = \sqrt{xy} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

**Giải**

Đk:  $x \geq y$ . Lúc đó  $\sqrt{2}(x-y) = \sqrt{xy} \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2x \end{cases}$

Khi  $x = 2y \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

Khi  $y = 2x \Rightarrow -3x^2 = 3$  (pt vô nghiệm)

Vậy đổi chiều với đk hpt có một nghiệm là (2; 1)

**Bài 13.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x-1)^2 + 6(x-1)y + 4y^2 = 20 \\ x^2 + (2y+1)^2 = 2 \end{cases}$$

**Giải**

hệ phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 6xy - 6y + 4y^2 = 20 \\ x^2 + 4y^2 = 1 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+9}{3x-5} \quad (1) \\ x^2 + 4y^2 = 1 - 4y \end{cases}$

thế (1) vào hệ (2) ta được  $x^2 + \left(\frac{2x+18}{3x-5} + 1\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{-9}{55} \cdot \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 = 1$  hay  $x = -1$   
suy ra  $x = -1 \Rightarrow y = -1$

**Bài 14.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 & (1) \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy (1)+2.(2) ta được:  $(x+2y)^2 + 3(x+2y) + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2y+1)(x+2y+2) = 0$

TH1:  $x+2y+1=0 \Rightarrow x = -2y-1$  thay vào (2) ta được

$$y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = -3 - 2\sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x = -3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

TH2:  $x+2y+2=0 \Rightarrow x = -2y-2$  thay vào (2) ta được

$$y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -3 + \sqrt{5} \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Do đó hpt đã cho có 4 nghiệm

$(x; y)$  là:  $(-3 - 2\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}); (-3 + 2\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}); (-3 + \sqrt{5}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}); (-3 - \sqrt{5}; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

**Bài 15.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3x + 1 \\ x^2 + 3y^2 = 3x + 1 \end{cases}$$

**Giải**

hệ phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} t = x^3 - 3x - 1 \\ 3t + (x^2 - 3x - 1)y = 0 \end{cases}$  với  $t = y^3$ .

ta có  $D = x^2 - 3x - 1$ ,  $D_t = (x^3 - 3x - 1)(x^2 - 3x - 1)$ ,  $D_y = -3(x^3 - 3x - 1)$

nhận thấy nếu  $D = 0$  mà  $D_y \neq 0$  suy ra pt VN

Xét  $D \neq 0$  ta có  $\frac{D_t}{D} = \left(\frac{D_y}{D}\right)^3$  hay  $(x^2 - 3x - 1)^3 = -27(x^3 - 3x - 1)$

$\Rightarrow x = 2$  hay  $28x^5 + 47x^4 - 44x^3 - 151x^2 - 83x - 13 = 0 \Rightarrow x = 2$  hay  $x \approx -1,53209$

từ đây suy ra được y

### Bài 16.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (2x^2 + y)(x + y) + x(2x + 1) = 7 - 2y \\ x(4x + 1) = 7 - 3y \end{cases}$$

#### Giải

**Cách 1:** Thế  $7 = 4x^2 + x + 3y$  ở phương trình (2) vào phương trình (1) ta được:

$$(2x^2 + y)(x + y) = 2x^2 + y \Rightarrow y = -2x^2 \text{ hoặc } y = 1 - x$$

Trường hợp 1:  $\begin{cases} y = -2x^2 \\ x(4x + 1) = 7 - 3y \end{cases}$  vô nghiệm.

Trường hợp 2:  $\begin{cases} y = 1 - x \\ x(4x + 1) = 7 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \\ y = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$

Đáp số:  $\left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right); \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}; \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)$  là nghiệm của hệ.

**Cách 2:** Phân tích (1) ta có  $2x^3 + 2x^2y + xy + y^2 + 2x^2 + x = 7 - 2y$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2(y + 1) + x(y + 1) + (y + 1)^2 = 8 \Leftrightarrow 2x^2(x + y + 1) + (y + 1)(x + y + 1) = 8$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)(2x^2 + y + 1) = 8 \Leftrightarrow (x + y + 1)(4x^2 + 2y + 2) = 16$$

ta có  $\begin{cases} (x + y + 1)(4x^2 + 2y + 2) = 16 \\ 4x^2 = 7 - x - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y + 1)[9 - (x + y)] = 16 \\ 4x^2 = 7 - x - 3y \end{cases} \text{ suy ra } x + y = 1 \text{ hay } x + y = 7$

Với  $x + y = 1$  ta tìm đc  $x = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{17})$  hay  $y = 1 - x$

Với  $x + y = 7$  thay vào (2) phương trình VN

KL

### Bài 16.1

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + 7y = (x + y)^2 + x^2y + 7x + 4 & (1) \\ 3x^2 + y^2 + 8y + 4 = 8x & (2) \end{cases}$$

#### Giải

Từ pt thứ (2) trong hệ ta rút  $4 = 8x - 3x^2 - y^2 - 8y$

Thay vào pt thứ (1) trong hệ thu gọn ta được  $(x - y)(x^2 + 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$

Với  $x = y$  thay vào pt thứ 2 ta được  $-4x^2 = 4$  pt vô nghiệm

Với  $x = 3$  thay vào pt thứ 2 ta được  $y^2 + 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -7 \end{cases}$

Với  $x = -5$  thay vào pt thứ 2 ta được  $y^2 + 8y + 119 = 0$  pt vô nghiệm

Vậy hệ pt có 2 nghiệm  $(x; y)$  là  $(3; -1); (3; -7)$

### Bài 17.

|                       |                                                                                                                    |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Giải hệ phương trình: | $\begin{cases} x^3 - 12z^2 + 48z - 64 = 0 \\ y^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \\ z^3 - 12y^2 + 48y - 64 = 0 \end{cases}$ |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Giải**

Cộng theo vế các phương trình của hệ ta được:  $(x-4)^3 + (y-4)^3 + (z-4)^3 = 0$  (\*)

từ đó suy ra trong 3 số hạng ở tổng này phải có ít nhất 1 số hạng không âm,

không mất tổng quát ta giả sử  $(z-4)^3 \geq 0 \Rightarrow z \geq 4$

Thế thì phương trình thứ nhất của hệ tương đương  $x^3 - 16 = 12(z-2)^2 \geq 12 \cdot 2^2 \Rightarrow x \geq 4$

Thế thì phương trình thứ hai của hệ tương đương  $y^3 - 16 = 12(x-2)^2 \geq 12 \cdot 2^2 \Rightarrow y \geq 4$

Do vậy từ  $(x-4)^3 + (y-4)^3 + (z-4)^3 = 0$  (\*)  $\Rightarrow x = y = z = 4$  Thử lại thỏa mãn.

Vậy  $(4; 4; 4)$  là nghiệm của hệ.

**Bài 18.**

|                       |                                                                                |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Giải hệ phương trình: | $\begin{cases} x^4 + 4x^2 + y^2 - 4y = 2 \\ x^2y + 2x^2 + 6y = 23 \end{cases}$ |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------|

**Giải**

hệ đã cho tương đương 
$$\begin{cases} t - 4y = 2 - x^4 - 4x^2 \\ (x^2 + 6)y = 23 - 2x^2 \end{cases}$$

với  $t = y^2$  ta tính được  $D = x^2 + 6$ ,  $D_t = -x^6 - 10x^4 - 30x^2 + 104$ ,  $D_y = 23 - 2x^2$ .

ta có  $\frac{D_t}{D} = \left(\frac{D_y}{D}\right)^2$  suy ra  $(x^2 + 6)(-x^6 - 10x^4 - 30x^2 + 104) = (23 - 2x^2)^2$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1+x^2)(x^4 + 16x^2 + 95) = 0$  vậy suy ra  $x = 1$  hay  $x = -1$ , từ đây tìm được y

**Bài 19.**

|                       |                                                                               |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Giải hệ phương trình: | $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 7x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$ |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------|

**Giải**

**Cách 1:** Cộng theo vế 2 phương trình của hệ ta được  $(2x + y - 3)(x + y - 2) = 0$  Từ đó dẫn đến 2 trường hợp:

Trường hợp 1: 
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Trường hợp 2: 
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Kết luận:  $(1; 1), (2; -1)$  là nghiệm của hệ.

**Cách 1:** đặt  $\begin{cases} x = a + 1 \\ y = b + 1 \end{cases}$  hệ trở thành 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 3a + 3b + ab = 0 & (1) \\ a^2 - 3a - 3b + 2ab = 0 & (2) \end{cases}$$

cộng (1) và (2) ta đc  $2a^2 + b^2 + 3ab = 0 \Leftrightarrow (2a + b)(a + b) = 0$  suy x và y

**Bài 20.**

|                       |                                                                                                     |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Giải hệ phương trình: | $\begin{cases} 3(x^2 + y^2) + \frac{1}{(x-y)^2} = 2(10 - xy) \\ 2x + \frac{1}{x-y} = 5 \end{cases}$ |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Giải**

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{1}{(x-y)^2} = 20 \\ x+y+x-y+\frac{1}{x-y} = 5 \end{cases} \quad \text{Đặt} \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y + \frac{1}{x-y} \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ sau: } \begin{cases} 2u^2 + v^2 - 2 = 20 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - u \\ 2u^2 + (5-u)^2 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{14}{3} \end{cases}$$

$$\text{TH 1: } \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y + \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{TH 2: } \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{3} \\ x-y + \frac{1}{x-y} = \frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = \frac{7+2\sqrt{10}}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = \frac{7-2\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4+\sqrt{10}}{3} \\ y = \frac{-3-\sqrt{10}}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{4-\sqrt{10}}{3} \\ y = \frac{-3+\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

#### Bài 21.

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} a(a+b) = 3 \\ b(b+c) = 30 \\ c(c+a) = 12 \end{cases}$$

**Giải**

#### Bài 22.

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 - 4x - y = 0 \end{cases}$$

**Giải**

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } y = 0 \Rightarrow x = 1$$

Với  $x \neq 0; y \neq 0$  thay (1) vào (2) ta được:

$$4x^4 + y^4 = (4x+y)(x^3 + y^3 - xy^2) \Leftrightarrow 3y^2 - 4xy + x^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = y \text{ thay vào (1) ta có } x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = 3y \text{ thay vào (1) ta có } x = \frac{3}{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

Vậy hpt có 4 nghiệm phân biệt  $(x; y)$  là  $(0; 1); (1; 0); (1; 1); \left(\frac{3}{\sqrt[3]{25}}; \frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)$

#### Bài 23.

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ \log_3(x+y) - \log_5(x-y) = 1 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x+y > 0 \\ x-y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ pt (1) có } \log_3(x^2 - y^2) = 1 \Leftrightarrow \log_3(x+y) + \log_3(x-y) = 1 \Leftrightarrow \log_3(x+y) = 1 - \log_3(x-y) \quad (*)$$

Thay (\*) vào pt (2) có

$$1 - \log_3(x-y) - \log_5 3 \cdot \log_3(x-y) = 1 \Leftrightarrow \log_3(x-y)(1 - \log_3 5) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x-y) = 0 \Leftrightarrow x-y = 1$$

Lúc đó ta có hpt mới 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hpt có 1 nghiệm duy nhất 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

#### Bài 24.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) - \log_4(2x) + 1 = \log_4(x + 3y) \\ \log_4(xy + 1) - \log_4(2y^2 + y - x + 2) = \log_4\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2} \end{cases}$$

#### Giải

hệ phương trình 
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x^2 + y^2)2}{xy + 1} = x + 3y & (1) \\ \frac{x}{2y^2 + y - x + 2} = \frac{x}{2y} & (2) \end{cases}$$

(1) 
$$\Leftrightarrow x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (3) \\ x = 2y & (4) \end{cases}$$

(2), (3) 
$$\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{R} > 0$$

(2), (4) 
$$\Leftrightarrow x = 2, y = 1$$

#### Bài 25.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2(y + 1) = 6y - 2(1) \\ x^4y^2 + 2x^2y^2 + y(x^2 + 1) = 12y^2 - 1(2) \end{cases}$$

#### Giải

Để thấy  $y \neq 0$  và  $y \neq -1$ . Từ (1) 
$$\Rightarrow x^2y(y + 1) = 6y^2 - 2y, \text{ và } x^2 - 2 = \frac{4y - 4}{y + 1}; x^2 + 3 = \frac{9y + 1}{y + 1}$$

Thay (1) vào (2), ta có: 
$$x^4y^2 + x^2y^2 + y + 6y^2 - 2y = 12y^2 - 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 3)y^2 - y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(y - 1)(9y + 1)y^2}{(y + 1)^2} = y - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 4(9y + 1)y^2 = (y + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

#### Bài 26.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x = 2(1) \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2(2) \end{cases}$$

#### Giải

Cách 1: Đk: 
$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Đặt  $t = x + 1, 0 \leq t \leq 2$ . Lúc đó hpt đã cho trở thành:

$$\begin{cases} t^3 - 3t^2 + 2 = y^3 - 3y^2 + 2 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2 \end{cases}$$

Xét hàm số  $f(a) = a^3 - 3a^2, 0 \leq a \leq 2$ . Có  $f'(a) = 3a^2 - 6a; f'(a) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

Lập BBT ta có  $f(a) = a^3 - 3a^2$  nghịch biến với  $0 \leq a \leq 2$  Vậy  $f(t) = f(y) \Rightarrow t = y \Rightarrow x + 1 = y$

Thay  $x + 1 = y$  vào pt (2) có 
$$x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} = -2 \Leftrightarrow 1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1 - x^2} - 1)(\sqrt{1 - x^2} + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} = 1 \\ \sqrt{1 - x^2} = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$$

Vậy hpt có 1 nghiệm  $(x; y)$  duy nhất là  $(0; 1)$

**Cách 2:** Sự xuất hiện của 2 căn thức ở pt (2) mách bảo ta đặt  $z = 1 - y$  khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x^3 - 3x + z^3 - 3z = 0 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{1-z^2} = -2 \end{cases}$$

Phương trình (1) của hệ này tương đương  $x + z = 0$  hoặc  $x^2 + xz + z^2 = 3$

Thế thì xảy ra 2 trường hợp:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} z = -x \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{1-z^2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} x^2 + xz + z^2 = 3 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{1-z^2} = -2 \end{cases}$$

Phương trình đầu của hệ này kết hợp với điều kiện của  $x$  và  $z$  dẫn đến  $x = z = -1; x = z = 1$ , cả 2 khả năng này đều không thỏa mãn phương trình thứ 2, nên trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận:  $(0; 1)$  là nghiệm của hệ.

### Bài 27.

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 - y^2 - y = 0 \\ x^2 + xy + x = 1 \end{cases}$$

**Giải**

### Bài 28.

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) = -125 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}$$

**Giải**

Với  $y = 0$  hệ pt vô nghiệm. Với  $y \neq 0$  chia 2 vế pt (1) và pt (2) lần lượt cho  $y^3 \neq 0; y^2 \neq 0$  ta có hpt

$$\begin{cases} 27x^3 + \frac{125}{y^3} = 9 \\ 45\frac{x^2}{y} + 75\frac{x}{y^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^3 + \frac{125}{y^3} = 9 \\ 3x \cdot \frac{5}{y} (3x + \frac{5}{y}) = 6 \end{cases} (*)$$

Đặt  $u = 3x; v = \frac{5}{y}, v \neq 0$

$$\text{Lúc đó: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ uv(u+v) = 6n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 9 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3 = 27 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1 \\ \frac{5}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \\ \frac{5}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy hpt đã cho có 2 nghiệm  $(x; y)$  là  $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right); \left(\frac{2}{3}; 5\right)$

### Bài 29.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y - 24 = 0 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Đk:  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 32 \\ y \leq 4 \end{cases}$ . Lấy (1) + (2) về theo về ta có  $\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 6y + 21$  (\*)

Có  $y^2 + 6y + 21 = (y-3)^2 + 12 \geq 12$

Lại có  $\sqrt{x} + \sqrt{32-x} \leq \sqrt{(1+1)(x+32-x)} = 8 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq \sqrt{(1+1)(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})} = 4$

Vậy  $\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq 12$

Do (\*) nên có hpt 
$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{32-x} \\ \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{32-x} \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ pt có một nghiệm duy nhất (x;y) là (16;3)

**Bài 30.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3x+3y} & (1) \\ 12x(2x^2+3y+7xy) = -1 - 12y^2(3+5x) & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Đặt  $\sqrt{x+y+1} = a \geq 0; \sqrt{3x+3y} = b \geq 0$

(1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - b^2 = 3 \\ 9a + 9 = 4b^4 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - b^2 = 3 \\ 9a + (3a^2 - b^2)^2 = 4b^4 + 9b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - b^2 = 3 \\ 9a - 9b + 9a^4 - 6a^2b^2 - 3b^4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - b^2 = 3 \\ (a-b)(9a^3 + 9a^2b + 3ab^2 + 3b^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - b^2 = 3 \\ a = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow 2x + 2y = 1. \Leftrightarrow 2x = 1 - 2y$

Thay vào (2) ta được :  $(x,y) = \left(\frac{-5}{6}; \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{10}; \frac{-1}{6}\right)$

**Bài 31.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3y(1+y) + x^2y^2(y+2) + xy^3 = 30 \\ x^2y + x(1+y+y^2) + y - 11 = 0 \end{cases}$$

**Giải**

**Bài 32.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x(1+x) + \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} + 1\right) = 4 & (1) \\ x^3y^3 + y^2x^2 + xy + 1 = 4y^3 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

(2)  $\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) = 4$  Từ (1), (2)  $\Rightarrow x + \frac{1}{y}$  và  $x^2 + \frac{1}{y^2}$  là nghiệm của pt

$A^2 - 4A + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

**Bài 33.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2 + 6y + \sqrt{x-2y} = \frac{x}{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-2y} = x + 3y - 2 \end{cases}$$

**Giải**

**Bài 34.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y+3x}\right) \sqrt{x} = 2 & (1) \\ \left(1 + \frac{12}{y+3x}\right) \sqrt{y} = 6 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

**Cách 1:** Đk:  $x > 0; y > 0$

Từ đó lấy (1) + (2); (2) - (1) ta được hpt 
$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{y}} = 2 \\ \frac{24}{y+3x} = \frac{6}{\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{y+3x} = \frac{9}{y} - \frac{1}{x} \Rightarrow 12xy = (y+3x)(9-y)$$

$$\Rightarrow y^2 + 6xy - 27x^2 = 0 \Rightarrow (y+9x)(y-3x) = 0 \Rightarrow y = 3x \text{ do } x > 0, y > 0$$

Thay  $y = 3x$  vào pt (1) ta được:  $x - 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 3(4 + 2\sqrt{3})$

Vậy hpt có 1 nghiệm  $(x; y)$  là  $(4 + 2\sqrt{3}; 3(4 + 2\sqrt{3}))$

**Cách 2:** Đk:  $x > 0; y > 0$  Nhân pt (1) với  $\sqrt{3}$  và nhân pt (2) với hệ số ảo  $i$  rồi cộng 2 về ta được:

$$\sqrt{3x} + \sqrt{yi} - \frac{12}{y+3x}(\sqrt{3x} - \sqrt{yi}) = 2\sqrt{3} + 6i$$

Đặt  $z = \sqrt{3x} + \sqrt{yi}$  thì  $z - \frac{12}{z} = 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z^2 - (2\sqrt{3} + 6i)z - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow z = 3 + \sqrt{3} + (3 + \sqrt{3}i) \text{ (thỏa mãn) hoặc } z = (\sqrt{3} - 3) + (3 - \sqrt{3}i) \text{ (loại vì } \sqrt{3x} < 0)$$

Với  $z = 3 + \sqrt{3} + (3 + \sqrt{3}i) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x} = 3 + \sqrt{3} \\ \sqrt{y} = 3 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 12 + 6\sqrt{3} \end{cases}$

**Bài 35.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$$

**Giải**

Nhân chéo ta có:

$$3x^2(x^2 + y^2) = 20y^2(x^2 - y^2) \Leftrightarrow 3x^4 - 17x^2y^2 + 20y^4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 5y^2 \text{ or } x^2 = 4y^2$$

Thay vào ta có các nghiệm  $(x; y) = (0; 0), \left(\pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}}; \pm\sqrt[4]{\frac{27}{125}}\right); (\pm 1; \pm 2)$

**Bài 36.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} & (1) \\ \sqrt{y-1} - \sqrt{4-x} + 8 - x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

(1) 
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3y+2} = \sqrt{x+2} + 3\sqrt{y} \Leftrightarrow 4(x+3y+2) = x+2+9y+6\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} - \sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow y = x+2$$

Thay vào (2), ta có:  $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 8 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{x-3}{\sqrt{4-x}+1} + (3-x)(3+x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$$

Ta cần cm pt  $\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} = x+3 (*)$  vô nghiệm trên đoạn  $[-1, 4]$

Ta có:  $\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \leq \frac{1}{2}$   $\frac{1}{\sqrt{4-x}+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} < \frac{3}{2}$  mà  $x+3 \geq 2 \Rightarrow (*)$  vô nghiệm

### Bài 37.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}) = 1 & (1) \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy+6x+1 & (2) \end{cases}$$

#### Giải

**Cách 1:** Xét  $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$ ,  $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} > \frac{|t|-t}{\sqrt{t^2+1}} \geq 0$

Do đó  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

(1)  $\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} = -y + \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$

(2)  $\Leftrightarrow x\sqrt{6x+2x^2+1} = -4x^2+6x+1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2+6x+1} - \frac{x}{2})^2 = \frac{25}{4}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \\ \sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \end{cases}$

Với  $\sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+6x+1 = 9x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2-6x-1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \rightarrow y = -1$

Với  $\sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+6x+1 = 4x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-6x-1 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{11}}{2} \rightarrow y = \frac{-3+\sqrt{11}}{2}$

**Cách 2:** Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ thành:  $x + \sqrt{1+x^2} = -y + \sqrt{1+y^2}$  (1)

Rõ ràng (1) khiến ta nghĩ đến hàm số  $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$ , hàm này đồng biến trên  $\mathbb{R}$

nên (1) tương đương  $x = -y$  thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$x\sqrt{6x+2x^2+1} = -4x^2+6x+1$  (2) Có một cách hay để giải (2) bằng ẩn phụ, nhưng để đơn giản, ta

lũy thừa 2 vế ta tìm được nghiệm  $x = 1; x = \frac{3-\sqrt{11}}{2}$

Kết luận:  $(1; -1); (\frac{3-\sqrt{11}}{2}; -\frac{3-\sqrt{11}}{2})$  là nghiệm của hệ.

### Bài 38.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}} + 1 \end{cases}$$

#### Giải

$2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{(3-2y)^3} + \sqrt{3-2y}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3-2y} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)$  (Do hàm số  $f(t) = t^3 + t$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ )

Thay vào phương trình thứ hai ta được:  $(\sqrt{x+2}-3) - (\sqrt[3]{15-x}-2) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-7}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{x-7}{\sqrt[3]{(15-x)^2}+2\sqrt[3]{15-x}+4} = 0 \Leftrightarrow x = 7 \Rightarrow y = \frac{111}{98}$

### Bài 39.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 2x - y = 0 \\ x^4 - 4(x+y-1)x^2 + y^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

#### Giải

Từ pt (2) ta có  $x^4 - 4x^3 - 4yx^2 + 4x^2 + y^2 + 2xy = 0$

$\Leftrightarrow (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 4(x^2 - 2x)y + 4y^2 - 3y^2 - 6xy = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2y)^2 = 3y^2 + 6xy$

Lúc đó hpt đã cho trở thành:  $\begin{cases} x^2 + 2xy - 2x - y = 0 \\ (x^2 - 2x - 2y)^2 = 3y^2 + 6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + 2xy - 2x & (3) \\ y^2(1 + 2x)^2 = 3y(y + 2x) & (4) \end{cases}$

Từ (4) có  $2y(2xy + 2x^2 - 3x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2xy + 2x^2 - 3x - y = 0 \end{cases}$

+ Với  $y = 0$  từ (3) có  $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

+ Với  $2xy + 2x^2 - 3x - y = 0 \Rightarrow y = 2xy + 2x^2y - 3x$  thay vào (3) có  $x(2xy - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = \frac{x+1}{2x} (x \neq 0) \end{cases}$

Thay  $y = \frac{x+1}{2x} (x \neq 0)$  vào pt (3) ta có  $(x-1)(2x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$

Vậy hpt đã cho có 3 nghiệm  $(x; y)$  là  $(0; 0), (2; 0), (1; 1)$

#### Bài 40.

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 4 \\ (x^2 + xy)(y + 1) + x = 6 \end{cases}$

**Giải**

#### Bài 41.

Tìm  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất:  $\begin{cases} 3y - m\sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ x + y + \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} = m^2 \end{cases}$

**Giải**

Hệ pt đã cho trở thành  $\begin{cases} y + \sqrt{x^2 + 1} = m^2 \\ 3y - m\sqrt{x^2 + 1} = 1 \end{cases} \quad (I)$

\* Điều kiện cần:

giả sử hpt có nghiệm  $(x_0; y_0)$  thì  $(-x_0; y_0)$  cũng là nghiệm của hệ

nên hpt có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow x_0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0$

Lúc đó hệ (I)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = m^2 - 1 \\ 3y = 1 + m \end{cases} \Rightarrow 3m^2 - m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = \frac{4}{3}$

\* Điều kiện đủ:

+ Với  $m = -1$  ta có (I)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y + \sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ 3y + \sqrt{x^2 + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  Vậy  $m = -1$  (nhận)

+ Với  $m = \frac{4}{3}$  ta có (I)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{16}{9} \\ 3y - \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + 1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{7}{9} \end{cases}$  Vậy  $m = \frac{4}{3}$  (nhận)

Do đó  $m = -1; m = \frac{4}{3}$  là các giá trị cần tìm.

#### Bài 42.

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y - 1 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$

**Giải**

#### Bài 43.

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} xy + x - 7y = -1 & (1) \\ x^2y^2 + xy - 13y^2 = -1 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Từ pt (1)  $\Rightarrow xy + 1 = 7y - x$  thế xuống pt (2)

$$\text{pt (2)} \Leftrightarrow (xy + 1)^2 - xy - 13y^2 = 0 \Leftrightarrow (7y - x)^2 - xy - 13y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 15xy + 36y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3y)(x - 12y) = 0 \Rightarrow x = 3y \text{ Hoặc } x = 12y$$

Tới đó là ra rồi :D

**Bài 44.**

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} (2011x + 3)(\ln(x - 2) - \ln 2011x) = (2011y + 3)(\ln(y - 2) - \ln 2011y) & (1) \\ 2y^6 + 55y^2 + 58\sqrt{x - 2} = 2011 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

**Giải**

Điều kiện:  $x, y > 2$ , khi đó từ (1), ta xét hàm số:  $f(t) = (2011t + 3)(\ln(t - 2) - \ln 2011t)$   $t > 2$ , dễ thấy  $f(t)$  đơn điệu trên tập xác định của nó nên:  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ ,

Thay vào (2), ta được phương trình:

$$2x^6 + 55x^2 + 58\sqrt{x - 2} = 2011 \Leftrightarrow 2x^6 + 55x^2 - 1953 + 58(\sqrt{x - 2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3)(x^4 + 18x^2 + 217) + 58 \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3) \left( (x + 3)(2x^4 + 18x^2 + 217) + \frac{58}{\sqrt{x - 2} + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3, \text{ vì: } (x + 3)(2x^4 + 18x^2 + 217) + \frac{58}{\sqrt{x - 2} + 1} > 0 \quad x > 2$$

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có nghiệm là: (3; 3)

**Bài 45.**

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} 8x^6 - \frac{1}{2}xy = y - 3x^4 & (1) \\ x^3 - 4x^2y = y & (2) \end{cases}$$

**Giải**

$$\text{Từ phương trình thứ nhất rút ra: } y = \frac{8x^6 + 3x^2}{x + 2}$$

$$\text{Từ phương trình thứ hai rút ra: } y = \frac{x^3}{4x^2 + 1}$$

$$\text{Từ đó dẫn đến: } \frac{8x^6 + 3x^2}{x + 2} = \frac{x^3}{4x^2 + 1} \Rightarrow x^3(64x^6 + 16x^4 + 23x^2 - 2x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Đáp số: (0; 0)

**Bài 46.**

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} x^2 + xy + 2x + 2y - 16 = 0 & (1) \\ (x + y)(4 + xy) = 32 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

$$\text{Hệ pt đã cho } \begin{cases} (x + y)(x + 2) = 16 & (1') \\ (x + y)(4 + xy) = 32 & (2') \end{cases}$$

$$* \text{ Với } x = y \text{ từ pt(1) có } x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{hpt đã cho thỏa} \\ x = -4 & \text{hpt đã cho không thỏa} \end{cases}$$

\* Với  $x = -y$  hpt không thỏa.

$$* \text{ Với } x \neq -y \text{ lấy } \frac{(1')}{(2')} \Rightarrow \frac{x + 2}{4 + xy} = \frac{1}{2} \Rightarrow x(2 - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 8 \\ y = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ hay } x = -6 \end{cases}$$

Vậy hpt có 3 nghiệm phân biệt  $(x; y)$  là  $(2; 2), (0; 8), (-6; 2)$

#### Bài 47.

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} xy = x + 7y + 1 \\ x^2y^2 = 10y^2 - 1 \end{cases}$$

#### Giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ rút  $x$  theo  $y$  ta được:  $x = \frac{7y+1}{y-1}$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:  $\left(\frac{7y+1}{y-1}\right)^2 \cdot y^2 = 10y^2 - 1$

$$\Rightarrow 39y^4 + 34y^3 - 8y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = 3 \\ y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Đáp số:  $(3; -1), \left(1; -\frac{1}{3}\right)$  là nghiệm của hệ.

#### Bài 48.

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} x^3(3y+55) = 64 \\ xy(y^2+3y+3) = 12+51x \end{cases}$$

#### Giải

Để thấy  $x = 0$  không thỏa mãn hệ. Viết lại hệ dưới dạng:  $\begin{cases} 3y+55 = t^3 \\ y^3+3y^2+3y = 3t+51 \end{cases}$

với  $t = \frac{4}{x}$  Cộng vế với vế của hệ ta được:

$$(y+1)^3 + 3(y+1) + 51 = t^3 + 3t + 51 \Leftrightarrow y+1 = t \text{ (do } f(t) = t^3 + 3t + 51 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R})$$

$$\text{từ đó có: } t^3 - 3(y-1) - 55 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2+4t+13) = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

#### Bài 49.

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \log_3(2x+1) - \log_3(x-y) = \sqrt{4x^2+4x+2} - \sqrt{(x-y)^2+1} - 3x^2+y^2-4x-2xy-1 \\ \log_3(2x) + 4x^2 - \sqrt{4x^2+1} = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

#### Giải

Viết phương trình thứ nhất của hệ thành:

$$\sqrt{(2x+1)^2+1} - (2x+1)^2 - \log_3(2x+1) = \sqrt{(x-y)^2+1} - (x-y)^2 - \log_3(x-y) \quad (*)$$

Xét hàm số:  $f(t) = \sqrt{(t)^2+1} - (t)^2 - \log_3(t)$  với  $t > 0$

$$\text{Có: } f'(t) = \frac{t}{\sqrt{(t)^2+1}} - (2t + \frac{1}{t}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \leq 0 \text{ nên } f \text{ nghịch biến. Thế thì } (*) \Leftrightarrow 2x+1 = x-y \quad (1)$$

Với phương trình thứ hai, xét hàm:  $f(x) = \log_3(2x) + 4x^2 - \sqrt{4x^2+1}$  với  $x > 0$

$$\text{Có: } f'(x) = 4x(2 - \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}) + \frac{1}{x} > 0 \text{ nên } f \text{ đồng biến}$$

$$\text{Thế mà } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{2} \text{ nên } x = \frac{1}{2} \text{ thỏa mãn phương trình thứ hai.}$$

$$\text{Kết hợp với (1) cho ta } y = -\frac{3}{2} \text{ Vậy } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \text{ là nghiệm của hệ.}$$

#### Bài 50.

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 & (1) \\ x^2 + y^6 - 8x + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

ĐK:  $x \neq 0; y \neq 0$

Với pt(1): Đặt  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t \Rightarrow t^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$

Mặt khác:  $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 = (t^2 - 2)^2 \Rightarrow \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} + 2 = t^4 - 4t^2 + 4$

Từ đó:  $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = t^4 - 4t^2 + 2$

Theo AM-GM có  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow t^2 \geq 4 \Leftrightarrow |t| \geq 2$

Ta có vế trái của pt (1)  $g(t) = t^4 - 5t^2 + t + 4, |t| \geq 2$  Có  $g'(t) = 2t(2t^2 - 5) + 1$

Nhận xét:

$+t \geq 2 \Rightarrow 2t(2t^2 - 5) \geq 4(8 - 5) > 0 \Rightarrow g'(t) > 0$

$+t \leq -2 \Rightarrow 2t \leq -4; 2t^2 - 5 \geq 3 \Rightarrow -2t(2t^2 - 5) \geq 12 \Rightarrow 2t(2t^2 - 5) \leq -12 \Rightarrow g'(t) < 0$

Lập BBT có giá trị nhỏ nhất của  $g(t) = -2$  đạt được tại  $t = -2$

Vậy từ pt(1) có  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$  (\*)

Đặt  $u = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{u}, u \neq 0$

Lúc đó pt (\*)  $\Leftrightarrow u + \frac{1}{u} = -2 \Leftrightarrow (u+1)^2 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \Leftrightarrow x = -y$

Thay  $x = -y$  vào pt(2) có:  $x^6 + x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 [x^2(x+1)^2 + 2(x+1)^2 + 4] = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$

Vậy hpt có duy nhất 1 nghiệm  $(x; y)$  là  $(1; -1)$

**Bài 51.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (2x^2 - 1)(2y^2 - 1) = \frac{7}{2}xy \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

**Giải**

Dễ thấy  $xy = 0$  không thỏa mãn hệ.

Với:  $xy \neq 0$  viết lại hệ dưới dạng: 
$$\begin{cases} \left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(2y - \frac{1}{y}\right) = \frac{7}{2} \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

ĐK để phương trình  $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$  (ẩn  $x$ ) có nghiệm là:

$\Delta_1 = (y-7)^2 - 4y^2 + 24y - 56 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$

ĐK để phương trình  $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$  (ẩn  $y$ ) có nghiệm là:

$\Delta_2 = (x-6)^2 - 4x^2 + 28x - 56 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$

Xét hàm số  $f(t) = 2t - \frac{1}{t}$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$

Nên:  $\Rightarrow f(x) \cdot f(y) \geq f(2) \cdot f(1) = \frac{7}{2}$

Kết hợp với phương trình thứ nhất ta được  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$  là nghiệm của hệ

**Bài 52.**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\frac{1}{4} + 3\sqrt{3} & (1) \\ y^4 + 2x^3 - y = -\frac{1}{4} - 3\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Lấy (1)+(2), ta có:  $x^4 + 2x^3 - x + y^4 + 2y^3 - y = \frac{-1}{2}$   
 $\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - (x^2 + x) + \frac{1}{4} + (y^2 + y)^2 - (y^2 + y) + \frac{1}{4} = 0$   
 $\Leftrightarrow (x^2 + x - \frac{1}{2})^2 + (y^2 + y - \frac{1}{2})^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$

**Bài 53.**

Đề thi thử lần 2 chuyên Lê Quý Đôn\_ Bình Định

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} \log_2(3x+1) - \log_4 y = 3 & (1) \\ 2\sqrt{x^2-4y} + 3^{\log_9 4} = 10 & (2) \end{cases}$

**Giải**

Đk:  $x > -\frac{1}{3}, y > 0, x^2 - 4y \geq 0$

Từ pt(1) có:  $\log_2(3x+1) = 3 + \log_2 \sqrt{y} \Leftrightarrow 3x+1 = 4\sqrt{4y} \quad (*)$

Từ pt(2) có:  $2\sqrt{x^2-4y} + 2 = 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-4y} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4y} = 3 \Leftrightarrow 4y = x^2 - 9 \quad (**)$

Thay (\*\*) vào (\*) ta được:  $3\sqrt{x^2-9} = 16(x^2-9) \Leftrightarrow 7x^2 - 6x - 145 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -\frac{19}{7} \quad (\text{loại})$

Với  $x = 5 \Rightarrow y = 4$ . Vậy hệ pt có 1 nghiệm  $(x; y)$  là  $(5; 4)$

**Bài 54.**

Giải hệ:  $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = 2\frac{\sqrt{x}}{y} + 2(1) \\ y(\sqrt{x^2+1}-1) = \sqrt{3(x^2+1)}(2) \end{cases}$

**Giải**

(1)  $\Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{x}}{x} = \frac{2(y+\sqrt{x})}{y} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -y(*) \\ y = 2x(**) \end{cases}$

Với (\*), ta dễ thấy  $y < 0$ , tức là VT của (2)  $< 0$ , trong khi VP lại lớn hơn 0 nên loại!

Với (\*\*), ta có:  $2x(\sqrt{x^2+1}-1) = \sqrt{3(x^2+1)} \Leftrightarrow 4x^4 - 8x^2\sqrt{x^2+1} - 3(x^2+1) = 0 \quad (\text{ĐK: } x > 0)$

$\Leftrightarrow 4(x^2 - \sqrt{x^2+1})^2 = \frac{7}{4}(x^2+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{x^2+1} = \frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{x^2+1} (i) \\ x^2 - \sqrt{x^2+1} = \frac{-\sqrt{7}}{2}\sqrt{x^2+1} (ii) \end{cases}$

Dễ thấy (ii) vô nghiệm bởi vì  $\frac{-\sqrt{7}}{2} + 1 < 0$  Còn (i)  $\Leftrightarrow x^4 - (\frac{11}{4} + \sqrt{7})x^2 - (\frac{11}{4} + \sqrt{7}) = 0$

Đặt  $\alpha = \frac{11}{4} + \sqrt{7}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha)^2 + 4\alpha}}{2}}$

**Bài 55.**

Giải hệ:  $\begin{cases} 2\sqrt{2x+3y} + \sqrt{5-x-y} = 7 \\ 3\sqrt{5-x-y} - \sqrt{2x+y-3} = 1 \end{cases}$

**Giải****Bài 56.**

Bài hệ hay!

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5xy - 7x + 3y + 2 = 0 & (1) \\ \frac{x-y}{3} = \ln(x+2) - \ln(y+2) & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Đk:  $x > -2; y > -2$

Từ pt (1) có:  $y^2 + (3 - 5x)y + 6x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 3x + 2)(y - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

Từ pt (2) có  $x - 3\ln(x+2) = y - 3\ln(y+2)$

Xét hàm số  $y = f(t) = t - 3\ln(t+2), t > -2$  Có  $f'(t) = \frac{t-1}{t+2}$

Từ đó  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Lập BBT ta nhận có nhận xét hàm số  $y = f(t)$  nghịch biến trên  $(-2; 1)$  và đồng biến trên  $(1; +\infty)$

Từ đó ta đi đến các nhận xét sau:

+ Với  $x = 1 \Rightarrow y = 1$  kiểm tra ta thấy  $x; y$  thỏa hệ

+ Với  $x, y \in (-2; +\infty), (x \neq 1) \Rightarrow f(y) > f(x)$

Thật vậy: vì  $y = 3x - 2 \vee y = 2x - 1 \Rightarrow y - x = 2(x - 1) \vee y - x = x - 1$

Nhận thấy

+  $x > 1 \Rightarrow y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$  do hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$

+  $x < 1 \Rightarrow y < x \Rightarrow f(y) > f(x)$  do hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 1)$

Do đó hệ pt đã cho có 1 nghiệm  $(x; y)$  duy nhất là  $(1; 1)$ .

**Bài 57.**

Trích đề học sinh giỏi Thừa Thiên Huế 2008 - 2009 khối chuyên.

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} 2^x + 4^y = 32 \\ xy = 8 \end{cases}$$

**Giải**

Ta có  $x; y$  phải là số dương. Vì nếu  $x; y$  âm thì  $2^x + 4^y < 2 < 32$

Khi đó ta có:  $2^x + 4^y \geq 2\sqrt{2^{x+2y}} \geq 2\sqrt{2^2 \cdot 2^{xy}} = 32$

Dấu = xảy ra khi  $x = 2y$ . Khi đó  $x = 4$  và  $y = 2$

**Bài 58.**

Trích đề học sinh giỏi Hà Tĩnh 2008 - 2009

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} \frac{x^4 - 16}{8x} = \frac{y^4 - 1}{y} \\ x^2 - 2xy + y^2 = 8 \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện  $x \neq 0, y \neq 0$

Phương trình thứ nhất của hệ có dạng  $f\left(\frac{x}{2}\right) = f(y)$  (1)

Với  $f(t) = \frac{t^4 - 1}{t}, t \neq 0$ . Ta có  $f'(t) = 3t^2 + \frac{1}{t^2} > 0$

Suy ra hàm số  $f$  đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 0), (0; +\infty)$

★ Trên  $(-\infty; 0)$

(1)  $\Leftrightarrow \frac{x}{2} = y$ , thay vào phương trình thứ hai của hệ thu được:  $y^2 = 8 \Leftrightarrow y = -2\sqrt{2} \Rightarrow x = -4\sqrt{2}$

★ Trên  $(0; +\infty)$

(1)  $\Leftrightarrow \frac{x}{2} = y$ , thay vào phương trình thứ hai của hệ thu được:  $y^2 = 8 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$

Vậy hệ có các nghiệm  $(x; y)$  là  $(2\sqrt{2}; 4\sqrt{2}), (-2\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$

**Bài 59.**

Trích đề học sinh giỏi Cần Thơ 2008 - 2009 vòng 1

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

**Giải**

Thay  $y^2 + 1 = xy$  vào phương trình dưới ta được:  $x^2 + xy + 2(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + y) = 0$

Nếu  $x = -2$  thì  $y = -1$

Nếu  $x = -y$  thì  $y = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$

**Bài 60.**

Trích đề học sinh giỏi Quảng Bình 2008 - 2009 vòng 2

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 22} - \sqrt{y} = y^2 + 2y + 1 \\ \sqrt{y^2 + 2y + 22} - \sqrt{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện  $x \geq 0, y \geq 0, x = 0$  hoặc  $y = 0$  đều không thỏa hệ nên  $x > 0, y > 0$ .

Trừ hai phương trình của hệ theo về ta được

$$\sqrt{x^2 + 2x + 22} + \sqrt{x} + x^2 + 2x + 1 = \sqrt{y^2 + 2y + 22} + \sqrt{y} + y^2 + 2y + 1$$

Phương trình này có dạng  $f(x) = f(y)$  với  $f(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 22} + \sqrt{t} + t^2 + 2t + 1$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+22}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t + 2 > 0$$

Suy ra  $f$  là hàm đồng biến  $\Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thay vào PT thứ nhất ta có  $x^2 + 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 22} + \sqrt{x} = 0$

Phương trình này có dạng  $g(x) = g(1)$  với  $g(x) = x^2 + 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 22} + \sqrt{x} = 0$ ,

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}} > 2 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}} > 0$$

(Vì  $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}} \leq \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+22}} = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt{x^2+2x+22}} < 1$ )  $\Rightarrow g$  là hàm đồng biến nên  $g(x) = g(1) \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm là  $(x; y) = (1; 1)$