CHUYÊN ĐỀ 5 - PHẦN HÌNH HỌC

I. TAM GIÁC VUÔNG

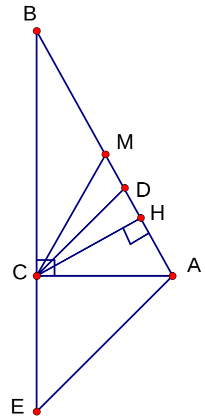
*Dang1. Tính độ dài trung truyến, phân giác từ đỉnh góc vuông.

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại C, AB = 7,5cm; $\widehat{A} = 58^0 25'$. Từ C kẻ phân giác CD và trung truyến CM.

a. Tính độ dài các cạnh CA và CB

b. Tính độ dài đường trung tuyến CM và phân giác CD.

c. Tính diện tích ΔABC và ΔCDM.



Lời giải

a, AC = AB.CosA = 7,5.Cos$58^0 25'$ ≈ **3.928035949**(cm)

CB = AB.SinA = 7,5.Sin$58^0 25'$ ≈ **6.389094896**(cm)

b, CM = AB/2 = 7,5:2 = 3,75

Từ A kẻ AE // CD (E ∈ BC) $\Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{CAE} = 45^0$(so le trong)

$\Rightarrow \Delta CAE$ vuông cân tại C $\Rightarrow$ CE = CA

Mặt khác CD // EA $\Rightarrow \Delta BEA \sim \Delta BCD \Rightarrow \dfrac{CD}{EA} = \dfrac{BC}{BE} \Rightarrow CD = \dfrac{EA.BC}{BE}$

$$\Rightarrow CD = \frac{\sqrt{2}.CA.BC}{BC + CA} = \frac{\sqrt{2}.AB.\cos A.AB.\sin A}{AB.\sin A + AB.\cos A} = \frac{\sqrt{2}AB.\sin A.\cos A}{\sin A + \cos A}$$

$$= \frac{\sqrt{2}.7,5.\sin 58^0 25'.\cos 58^0 25'}{\sin 58^0 25' + \cos 58^0 25'} \approx \mathbf{3,440098294}\ (cm)$$

c, Ta có: $\dfrac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{AD.AH}{AB.AH} = \dfrac{AD}{AB}$ mà $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{EC}{EB}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{EC}{EB} = \frac{CA}{CA + CB} = \frac{AB\cos A}{AB\cos A + AB\sin A} = \frac{\cos A}{\cos A + \sin A}$$

Trong đó: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}CA.CB = \dfrac{1}{2}AB.\cos A.AB.\sin A = \dfrac{1}{2}AB^2.\cos A.\sin A \approx$ **12.54829721**(cm^2).

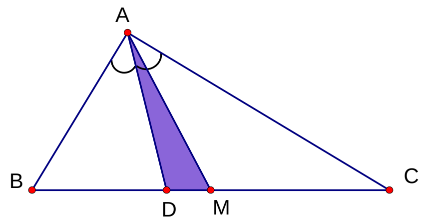
$$\Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{\cos A}{\cos A + \sin A}.S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\cos^2 A.\sin A}{2(\cos A + \sin A)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CDM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ACD} = \frac{1}{4}AB^2.\cos A.\sin A - \frac{AB^2\cos^2 A.\sin A}{2(\cos A + \sin A)} \approx \mathbf{1,496641828}\ (cm^2)$$

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có AB = 14,25cm; AC = 23,5cm. AM và AD theo thứ tự là trung tuyến và phân giác của tam giác.

a. Tính BD và CD

b, Tính diện tích tam giác ADM



Lời giải

a, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$ mà áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{DB}{BC - DB} \Rightarrow DB = \frac{AB.BC}{AB + AC} = \frac{AB\sqrt{AB^2 + AC^2}}{AB + AC}$$

$$\Rightarrow DB = \frac{14,25\sqrt{(14,25)^2 + (23,5)^2}}{14,25 + 23,5} \approx 10,37435833 \Rightarrow DC = BC - DB \approx \mathbf{17,10859093}$$

b, Ta có: $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}} = \dfrac{DB.AH}{DC.AH} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ mà $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta AMB} - S_{\Delta ADM} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADM}$

$$S_{\Delta ADC} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta ADM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADM}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC} - 2S_{\Delta ADM}}{S_{\Delta ABC} + 2S_{\Delta ADM}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow S_{\Delta ADM} = \frac{S_{\Delta ABC}(AC - AB)}{2(AC + AB)} = \frac{AB.AC(AC - AB)}{4(AB + AC)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ADM} = \frac{23,5.14,25(23,5-14,25)}{4(23,5+14,25)} \approx 20,51386589$$

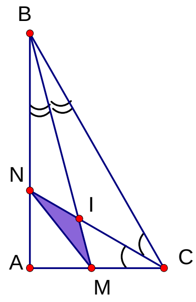
***Dang2**. Tính độ dài trung truyến, phân giác từ đỉnh góc nhọn.*

Bài 1. Cho ΔABC ($\hat{A} = 90^0$), $AB = \sqrt{3}$, $\widehat{ACB} = 60^0$. Các đường phân giác BM và CN cắt nhau tại I

a. Tính BM và CN

b, Tính diện tích ΔIMN

Lời giải



a. $AC = \dfrac{AB}{tgC}$ mà $NC = \dfrac{AC}{\cos\frac{C}{2}} = \dfrac{AB}{tgC.\cos\frac{C}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{tg60^0.\cos 30^0} \approx$ **1,154700538** (cm)

$(\hat{B} = 90^0 - \hat{C} = 30^0) \Rightarrow BM = \dfrac{AB}{\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{Cos\frac{30^0}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{Cos15^0} \approx$ **1,793150944** (cm)

b, $S_{\Delta IMN} = S_{\Delta NMC} - S_{\Delta IMC} = \frac{1}{2}AN.MC - \frac{1}{2}r.MC$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC):

$$S_{\Delta ABC} = p.r \Rightarrow \frac{1}{2}AB.AC = \frac{AB+AC+BC}{2}.r \Rightarrow r = \frac{AB.AC}{AB+AC+BC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta IMN} = \frac{1}{2}(AN - \frac{AB.AC}{AB+AC+BC}).(AC - AM)$$

$$= \frac{1}{2}(ACtg30^0 - \frac{AB.AC}{AB+AC+BC})(AC - ABtg15^0)$$ (trong đó AC = 1, BC = 2, AB = $\sqrt{3}$)

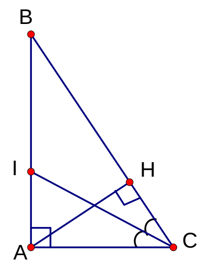
$$= \frac{1}{2}(tg30^0 - \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}})(1-\sqrt{3}tg15^0) = \mathbf{0,056624327}\ (cm^2)$$

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A với AB = 4,6892; BC = 5,8516

a, Tính góc B (độ, phút, giây)

b, Tính đường cao AH

c, Độ dài phân giác CI



Lời giải

a, $CosB = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4,6892}{5,8516} \Rightarrow \hat{B} =$ **36⁰44'25,64"**

b, AH = AB.sinB = **2,805037763**

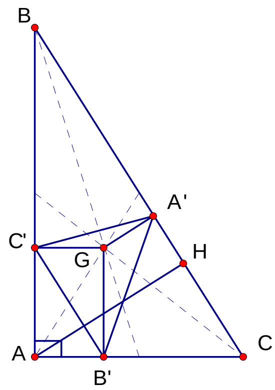
c, $IC = \dfrac{AC}{Cos\frac{C}{2}} = \dfrac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{Cos\frac{90^0 - B}{2}} =$ **3,915754262**

Bài 3. Gọi G là trọng tâm ΔABC vuông tại A, AB =23,82001, AC = 29,1945. Gọi A', B' C' lần lượt là hình chiếu của G xuống các cạnh BC, AC, AB. Gọi S và S' là diện tích hai tam giác ABC và A'B'C'

a, Tính S'/S (=2/9)

b, Tính S' (≈ 77,26814244)

Lời giải



a, Kẻ AH ⊥ BC (H ∈ BC) ⇒ $GA' = \frac{1}{3}AH = \frac{h}{3}$; $GB' = \frac{1}{3}AB$; $GC' = \frac{1}{3}AC$

Mặt khác $S_{\Delta A;B'C'} = S_{\Delta GA'B'} + S_{\Delta GA'C'} + S_{\Delta GB'C'}$

$$= \frac{1}{2}(GA'.GB'.\sin(A'GB') + GA'.GC'.\sin(A'GC') + GB'.GC')$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}.\frac{1}{3}h.AB.\sin C + \frac{1}{3}.\frac{1}{3}h.AC.\sin B + \frac{1}{3}.\frac{1}{3}AB.AC)$$

$$= \frac{1}{18}(h.AB\sin C + h.AC\sin B + AB.AC) = \frac{1}{18}(HB + HC + AB.AC)$$

$$= \frac{1}{18}(BC.h + AB.AC) = \frac{1}{9}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta\ ABC}) = \frac{2}{9}S_{\Delta ABC} \Rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2}{9}$$

b, $S_{\Delta A'B'C'} = \frac{2}{9}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{9}AB.AC = \frac{1}{9}.23{,}82001.29{,}1945 \approx \mathbf{77{,}26814244}$

*** Bài tập áp dung**

Bài1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ phân giác AD và trung tuyến AM và đường cao AH (D, B, H ∈ BC)

a. Cho AB = 3,74cm; AC = 4,51cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, AM và AH

b. Cho BC = 8,916cm; BD= 3,178. Tính AB; AC, AM

Bài2. Cho ΔABC vuông tại A; AB = 2,75cm; $\hat{C} = 37^0 25'$. Từ A kẻ các đường cao AH, phân giác AD và trung tuyến AM. (Đề thi Khu vực 2007)

a. Tính độ dài các đoạn AH, AD, AM

b. Tính diện tích ΔADM

Bài3. Cho ΔABC vuông tại A với AB = 4,6892; BC = 5,8516

a, Tính góc B (độ, phút, giây)

b, Tính đường cao AH

c, Độ dài phân giác CI

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. AB = 15, BC = 26 kẻ phân giác trong BD. Tính DC (D ∈ AC)

Bài 5. Cho một tam giác vuông có độ dài hai cạnh tam giác vuông là $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[4]{3}$. Tính tổng bình phương độ dài các đường trung tuyến

Bài 6. Cho hình vẽ: Biết

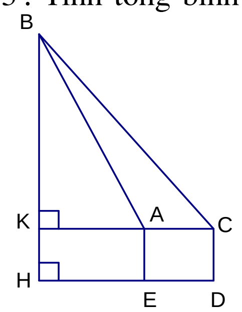
\ AE = CD = 1,5cm

\ ED = 10cm

\ $\widehat{KBA} = 45^0 39'$; $\widehat{KBC} = 51^0 49'12''$

a, Tính gần đúng BH

b, Tính diện tích ΔABC



Bài 7. Cho ΔABC vuông tại B. cạnh BC = 18,6cm. Hai trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau. Tính CN

II. TAM GIÁC THƯỜNG

Tính cạnh, phân giác trong, trung tuyến, diện tích trong tam giác.

Bài1. Cho ΔABC, $\hat{B} = 120^0$, AB = 6cm, BC =12cm. Kẻ phân giác BD (D ∈ AC)

a. Tính độ dài đường phân giác BD

b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABD và ABC.

c. Tính diện tích ΔABD.

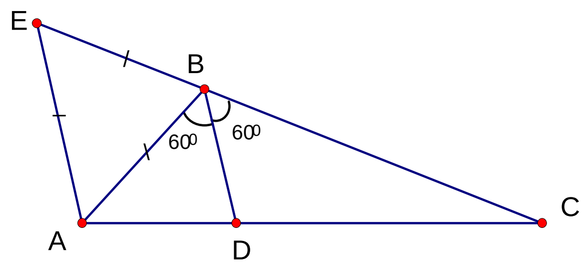
Lời giải

a, Qua A kẻ AE // BD cắt BC tại E ⇒ ΔABE đều

$\Rightarrow AB = AE = BE = 6cm$. Vì BD // AE $\Rightarrow \frac{BD}{AE} = \frac{CB}{CE}$

$$\Rightarrow BD = AE.\frac{CB}{CE} = AB.\frac{CB}{CB+BE} = \frac{AB.CB}{CB+AB}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{6.12}{6+12} = 4\text{ cm.}$$



b, $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}h_B.AD}{\frac{1}{2}h_B.AC} = \frac{AD}{AC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AB+BC} = \frac{6}{6+12} = \frac{1}{3}$

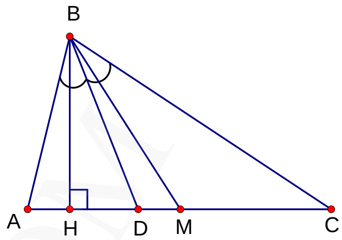
c, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h_A.BC = \frac{1}{2}AB.\sin 60^0.BC = \frac{1}{2}6.12.\text{Sin}60^0 \approx \mathbf{31{,}17691454}\ (cm^2)$

$\Rightarrow S_{\Delta ABD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \approx$ **10,39230485**(cm^2)

Bài2. Cho ΔABC; AB = 4,71cm; BC = 6,26cm; AC = 7,62cm. Phân giác trong BD

a. Tính độ dài đường cao BH, trung tuyến BM của góc B.

b. Tính diện tích ΔBHD.



Lời giải

a, +) ***Tính độ dài đường cao BH.***

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BH = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow h = BH = 2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{.AC}$$

$= \mathbf{3{,}863279635}(cm)$

+) ***Tính độ dài đường trung tuyến BM .***

Theo định lý Pitago trong tam giác vuông HBC ta có:

$$BC^2 = HB^2 + HC^2 = HB^2 + (HM + MC)^2 = HB^2 + (\frac{AC}{2} + HM)^2$$

$$AB^2 = HB^2 + HA^2 = HB^2 + (MA - HM)^2 = HB^2 + (\frac{AC}{2} - HM)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = 2HB^2 + \frac{AC^2}{2} + 2HM^2 = 2(HB^2 + HM^2) + \frac{AC^2}{2} = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{\frac{AB^2}{2}+\frac{BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}} \approx \mathbf{4{,}021162767}(cm)$$

b, ***Tính diện tích tam giác BHD***

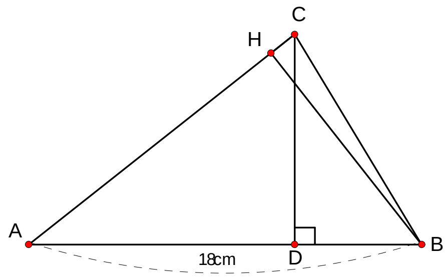
$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{2}+\frac{BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{AB^2}{2}-\frac{BC^2}{2}+\frac{AC^2}{4}}$$

Mặt khác. Do AD là tia phân giác $\Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow \frac{BA}{BC+BA} = \frac{DA}{DC+DA} \Rightarrow \frac{BA}{BC+BA} = \frac{DA}{AC}$

$$\Rightarrow DA = \frac{AC.AB}{BC+BA} \Rightarrow HD = DA - AH = \frac{AC.AB}{BC+BA} - \sqrt{\frac{AB^2}{2}-\frac{BC^2}{2}+\frac{AC^2}{4}}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BHD} = \frac{1}{2}BH.HD = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{.AC}.(\frac{AC.AB}{BC+BA} - \sqrt{\frac{AB^2}{2}-\frac{BC^2}{2}+\frac{AC^2}{4}}) \approx \mathbf{1{,}115296783}\ cm^2$$

Bài3. Tính diện tích ΔABC biết AB = 18cm, $\hat{A} = \frac{2}{3}\hat{B} = \frac{1}{2}\hat{C}$



Lời giải

Áp dụng định lý về tổng ba góc trong một tam giác ta có:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^0$ mà theo giả thiết $\hat{A} = \frac{2}{3}\hat{B} = \frac{1}{2}\hat{C}$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}\hat{A} = 180^0 \Rightarrow \hat{A} = 40^0 \Rightarrow \hat{B} = 60^0, \hat{C} = 80^0$$

Kẻ hai đường cao BH và CD khi đó: BH = ABsinA và $BC = \frac{BH}{\sin C} = \frac{AB\sin A}{\sin C}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CD = \frac{1}{2}AB.BC.\sin B = \frac{AB^2\sin A\sin B}{2\sin C} \approx \mathbf{91{,}57178586}\ (cm^2)$$

*** *Bài tập áp dụng***

Bài1. Tam giác ABC có cạnh AC = b = 3,85 cm ; AB = c = 3,25 cm và đường cao AH = h = 2,75cm. (Đề thi khu vực năm 2007) a, Tính các góc A, B, C và cạnh BC của tam giác.

($B = 57^o47'44,78"$, $C = 45^o35'4,89"$, $A= 76^o37'10,33"$)

b, Tính độ dài của trung tuyến AM (M thuộc BC)

c, Tính diện tích tam giác AHM.

(góc tính đến phút ; độ dài và diện tích lấy kết quả với 2 chữ số phần thập phân

Bài 2. Cho ΔABC có đường cao AH = 12,341. Các đoạn thẳng BH = 4,183, CH = 6,748.

a. Tính diện tích tam giác

b. Tính góc A(độ, phút, giây)

Bài 3. Cho ΔABC có đường cao AH = 21,431cm, các đoạn thẳng HB = 7,384cm, HC = 9,318cm

a, Tính các cạnh AB và AC (AB ≈ 22,66740428; AC ≈ 23,36905828

b, Tính diện tích ΔABC (S ≈ 178,9702810)

c, Tính góc A(độ, phút, giây) ($\widehat{A} \approx 42^0 30'37''$)

Bài 4. Cho ΔABC có AB =1,05; BC = 2,08; AC = 2,33.

a, Tính diện tích ΔABC (S ≈ 1,0920)

b, Tính đường cao BH (≈ 0,9383)

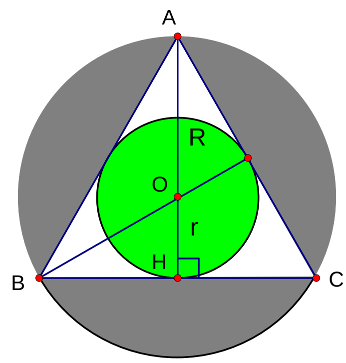
Bài 5. Cho ΔABC có BC =10, đường cao AH = 8. Gọi I và O lần lượt là trung điểm của AH và BC. Tính diện tích các tam giác IOA và IOC

Bài 6. Tam giác ABC có cạnh BC = 9,95 cm, góc $\widehat{ABC} = 114^0 43'12''$, góc $\widehat{BCA} = 20^0 46'48''$. Từ A vẽ các đường cao AH, đường phân giác trong AD, phân giác ngoài AE và đường trung tuyến AM.

a) Tính độ dài của các cạnh còn lại của tam giác ABC và các đoạn thẳng AH, AD, AE, AM.

b) Tính diện tích tam giác AEM.

III. TAM GIÁC ĐỀU - ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP, NGOẠI TIẾP



Bài1. Cho tam giác ABC đều cạnh a = 3,36cm .

a, Tính độ dài đường cao, tính diện tích tam giác.

b. Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đều.

c, Tính miền diện tích tạo bởi (O;r) và ΔABC và miền diện tích tạo bởi (O;R) và ΔABC

Lời giải

a. Gọi AH là đường cao hạ từ A xuống cạnh BC

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a \approx \mathbf{2,909845357} \text{ (cm)}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a.a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \approx \mathbf{4.888540199} \text{ (cm}^2\text{)}$$

b. Gọi O là giao của 3 đường trung tuyến trong tam giác đều, R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC:

$$R = OA = \frac{2}{3}.AH = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a \approx \mathbf{1,939896904} \text{ (cm)}$$

$$r = OH = \frac{1}{3}.AH = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a \approx \mathbf{0,969948452} \text{ (cm)}$$

c, +) Gọi S_1 là phần diện tích giới hạn bởi (O;r) và ΔABC

$$\Rightarrow S_1 = S_{\Delta ABC} - S_{(O;\,r)} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \pi r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{1}{12}\pi a^2 \approx 6.82147003 \text{ (cm}^2\text{)}$$

+) S_2 là phần diện tích giới hạn bởi (O; R) va ΔABC

$$\Rightarrow S_2 = S_{(O;\,R)} - S_{\Delta ABC} = \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{3}\pi a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 2,045361075 \text{ (cm}^2\text{)}$$

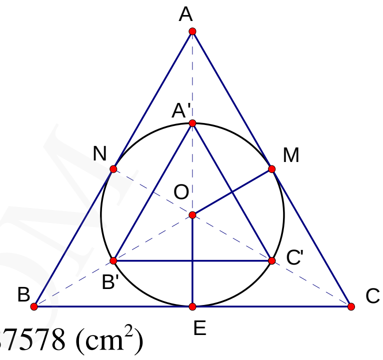
Bài2. Tính diện tích tam giác đều nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn (O; R); với R = 4,25 cm

Lời giải

+) ***Tính diện tích ΔABC đều ngoại tiếp đường tròn(O; R)***

Gọi ΔABC và ΔA'B'C' lần lượt ngoại tiếp và nội tiếp đường tròn (O; R)

Trong ΔABC ba trung tuyến AE, BM và CN cắt nhau tại O



$$\Rightarrow OE = R = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{6}BC \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}R$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AE.BC = \frac{1}{2}.3R.2\sqrt{3}R = 3\sqrt{3}R^2 \approx 93,85550314\ (cm^2)$$

+) ***Tính diện tích đều ΔA'B'C' nội tiếp (O; R)***

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}B'C'.h_{A'} = \frac{1}{2}\frac{BC}{2}.\frac{AE}{2} = \frac{1}{2}.\sqrt{3}R.\frac{3R}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \approx 23,46387578\ (cm^2)$$

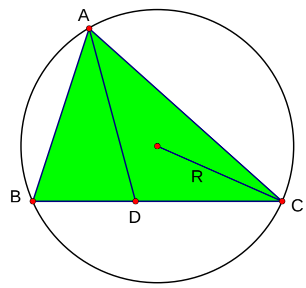
* ***Chú ý: Ta có thể sử dụng công thức***: $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$; $S_{\Delta A'B'C'} = pr$

Bài3. Cho ΔABC; BC = 8,571cm; AC= 6,318cm; AB = 7,624cm

a. Tính diện tích tam giác ABC và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b. Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài ΔABC

Lời giải



a, Áp dụng công thức Hêrông ta có: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow S \approx 23,28705703\ (cm^2)$

Mặt khác: $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} =$ 4,43220058 (cm)

b, Gọi S' là phần diện tích hình tròn nằm ngoài ΔABC

$\Rightarrow S' = \pi R^2 - \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 38,42765192\ (cm^2)$

Quy trình ấn phím liên tục:

8,571 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{A}}$; 6,318 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{B}}$;7,624 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{C}}$

ấn tiếp: $\boxed{(}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{A}}\boxed{+}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{B}}\boxed{+}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{C}}\boxed{)}\boxed{\div}2\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{D}}$

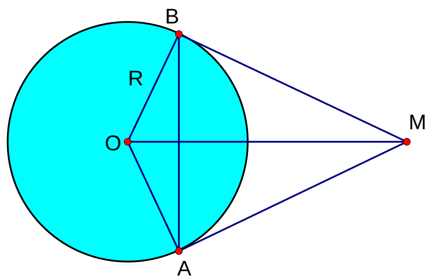
ấn tiếp: $\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{(}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{D}}\boxed{(}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{D}}\boxed{-}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{A}}\boxed{)}\boxed{(}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{D}}\boxed{-}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{B}}\boxed{)}$

$\boxed{(}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{D}}\boxed{-}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{C}}\boxed{)}\boxed{)}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{E}}$ ta tìm được diện tích ΔABC

ấn tiếp: $\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{x}}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{B}}\boxed{\text{x}}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{C}}\boxed{\div}\boxed{(}4\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{E}}\boxed{)}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{F}}$ ta tìm được R

ấn tiếp: $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{EXP}}\boxed{\text{x}}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{F}}\boxed{x^2}\boxed{-}\boxed{\text{ALPHA}}\boxed{\text{E}}\boxed{=}$ Kết quả tìm được S'

Bài4. Từ điểm M nằm ở ngoài đường tròn (O;R) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Biết $\widehat{AOB} = 120^0$ và R = 4,23cm



a. Tính diện tích tứ giác AOBM

b. Tính diện tích miền trong tứ giác (phần màu trắng)

Lời giải

a, $S_{AOBM} = 2.S_{\Delta AOM} = AO.AM = R.\ R.tg(AOM)$

$= R^2.tg60^0 \approx$ **31,43256524** (cm^2)

b, Gọi S' là diện tích phần mầu trắng nằm trong tứ giác AOBM.

Diện tích phần hình quạt nằm trong tứ giác AOBM là: $\frac{120.2\pi}{360} = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow S' = R^2tg60^0 - \frac{2\pi}{3} \approx$ **29,33817013** (cm^2)

Bài 5. a, Một tam giác có chu vi là 49,49cm, các cạnh tỷ lệ với 20:21:29. Tính bán kính đường tròn nội tiếp. (r ≈ 4,242)

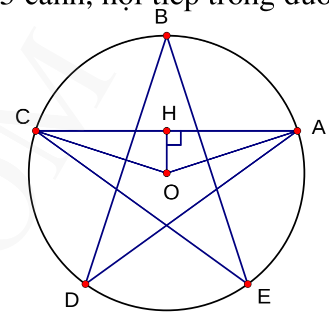
Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\frac{a}{20}=\frac{b}{21}=\frac{c}{29}=\frac{a+b+c}{20+21+29}=\frac{49,49}{70}$

$\Rightarrow$ a = 14,14cm ; b = 14,847cm; c = 20,503cm

Áp dụng công thức: $r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ = 4,242 (cm)

Bài 6. Tính khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp của một ngôi sao 5 cánh, nội tiếp trong đườn tròn bán kính R = 5,712cm



Lời giải

Ta phải tính độ dài đoạn thẳng AC. Kẻ OH ⊥ AC tại H ∈ (AC) khi đó

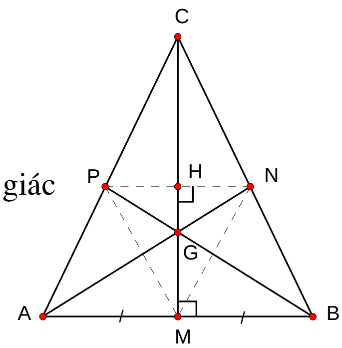
$\widehat{OAH}=\frac{1}{2}\widehat{CAD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}sđ\widehat{CD}=\frac{1}{4}.\frac{360^0}{5}=18^0$

$\Rightarrow$ AC = 2AH =2.(OA.cos18^0) = 2.5,712.cos18^0 ≈ **10,86486964** (cm)

Bài7: Cho tam giác ABC cân tại C; $\frac{AC}{AB}=k \quad (k\neq 1)$

Vẽ các phân giác CM, AN, BP. Chứng minh $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}}=\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$

Áp dụng tính S_{ABC} biết S_{MNP} là 2,3456 cm^2 và k = 1,2345



Lời giải

Gọi PN ∩ CM = H ; Đặt CM = h, MH =h_1 . áp dụng tính chất đường phân giác

Ta có: $\frac{AC}{CB}=\frac{NC}{NB}\Rightarrow\frac{NC}{NB}=k$

Mà ΔABC cân ⇒ ΔPAB = ΔNBA(g.c.g)

$\Rightarrow PA=NB\Rightarrow NP//AB\Rightarrow NP\perp CM\Rightarrow\frac{HC}{HM}=k\Rightarrow\frac{h-h_1}{h_1}=k\Rightarrow\frac{h}{h_1}=k+1$ (*)

Mặt khác $\frac{PN}{AB}=\frac{CH}{CM}=\frac{h-h_1}{h}\Rightarrow\frac{PN}{AB}=1-\frac{h_1}{h}=1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}\Rightarrow\frac{AB}{PN}=\frac{k+1}{k}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}}=\frac{h.AB}{h_1.NP}=\frac{(k+1)^2}{k}=\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ (đpcm)

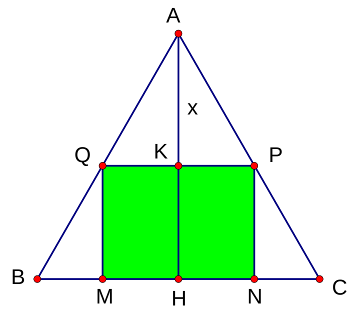
Áp dụng: S_{MNP} là 2,3456 cm^2 và k = 1,2345 ⇒ $S_{\Delta ABC}$ ≈ **9,486883702** (cm^2)

Bài8. Cho ΔABC đều cạnh a. MNPQ là hình chữ nhật nội tiếp tam giác. M, N thuộc BC, P và Q tương ứng thuộc AC và AB.

a, Xác định điều kiện để MNPQ có diện tích lớn nhất.

b, Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật MNPQ trong trường hợp: a = 18,17394273

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A xuống cạnh BC, K là giao điểm của AH với PQ

Đặt AK= x; PQ = y. AH = h; Ta có $S_{ABC}=S_{AQP}+S_{BQPC}$

$\Rightarrow\frac{ah}{2}=\frac{xy}{2}+\frac{(y+a)(h-x)}{2}$ ⇒ ah = xy + yh - xy + ah - ax

⇒ yh = ax ⇒ y = $\frac{ax}{h}$. Vậy S_{MNPQ} = = y.(h - x) = (h - x). $\frac{ax}{h}$

= $\frac{a}{h}$x(h - x) mà x(h - x) lớn nhất khi x = h - x ⇒ x = $\frac{h}{2}$

a, MNPQ có diện tích lớn nhất khi P, Q là trung điểm của AC và AB

b, max $S_{MNPQ}=\frac{a}{h}x(h-x)=\frac{ah}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ ≈ **71,51035775** (đvdt)

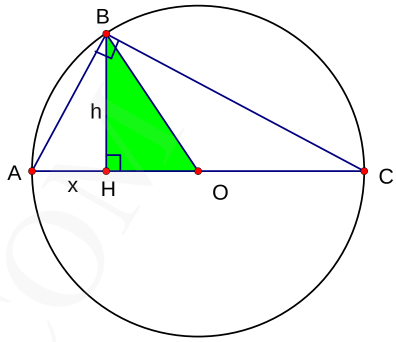
Bài9. Cho đường tròn tâm O đường kính AC, B là một điểm nằm trên đường tròn, H là hình chiếu của B lên AC a, Xác định vị trí của B để diện tích tam giác OBH lớn nhất

b, Áp dụng tính khi R = 1,94358198 (cm)

Lời giải

Đặt BH = h, AH = x $(0 < x \le R, 0 < h \le R)$

Tacó: $h^2 = AH.HB = x(2R- x) \Rightarrow h = \sqrt{x(2R-x)}$



$\Rightarrow S_{OBH} = \dfrac{OH.HB}{2} = \dfrac{(R-x).\sqrt{x(2R-x)}}{2}$

Mặt khác: $(R - x)\sqrt{x(2R-x)}$ lớn nhất khi $R - x = \sqrt{x(2R-x)}$

$\Rightarrow (R - x)^2 = 2Rx - x^2 \Leftrightarrow 2(R - x)^2 = R^2 \Rightarrow R - x = \dfrac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow h = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \dfrac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta BOH$ cân tại H

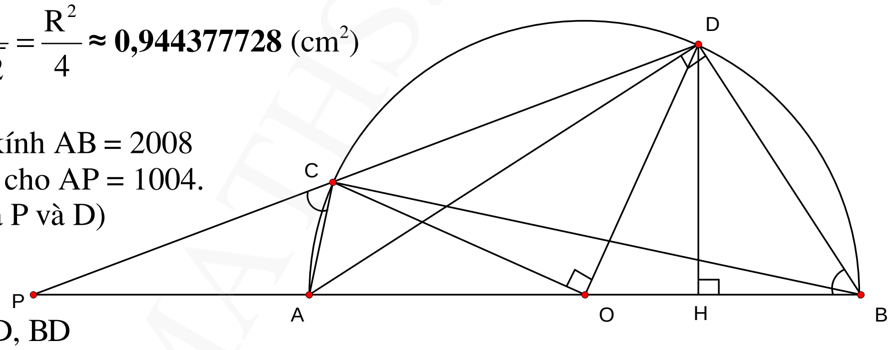
a, Nếu B cách AC một khoảng $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ thì S_{OBH} đạt giá trị lớn nhất

b, Max $S_{OBH} = \dfrac{HO.HB}{2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{R}{\sqrt{2}}.\dfrac{R}{\sqrt{2}} = \dfrac{R^2}{4} \approx$ **0,944377728** (cm^2)

Bài10. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2008 trên tia đối của tia AB lấy điểm P sao cho AP = 1004. Qua P kẻ cát tuyến PCD (C nằm giữa P và D) sao cho CD $=1004\sqrt{2}$

a, Tính độ dài đoạn thẳng PC và PD

b, Tính độ dài các đoạn thẳng CA, AD, BD



Lời giải

a, Vì $\Delta PBC \sim \Delta PDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PB}{PD} = \dfrac{PC}{PA} \Rightarrow PA.PB = PC.PD \Rightarrow 1004.2008 = PC(PC + 1004\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow PC^2 + 1004\sqrt{2}\,PC - 2016032 = 0 \Rightarrow PC = -502\sqrt{2} + \sqrt{2520040} \approx 877{,}5281771$

$\Rightarrow PD \approx PC + CD = -502\sqrt{2} + \sqrt{2520040} + 1004\sqrt{2} = 502\sqrt{2} + \sqrt{2520040} \approx 2297{,}398597$

b, Ta tính đường trung tuyến DA trong ΔPDO. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} PD^2 = DH^2 + PH^2 = DH^2 + (PA + AH)^2 = (AH + AO)^2 \\ OD^2 = DH^2 + OH^2 = DH^2 + (AH - AO)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow PD^2 + OD^2 = 2DH^2 + 2AH^2 + 2AO^2$$

$\Rightarrow PD^2 - AO^2 = 2(DH^2 + AH^2) \Leftrightarrow 2AD^2 = PD^2 - AO^2 \Rightarrow AD = \sqrt{\dfrac{PD^2 - PA^2}{2}} \approx 1461{,}168077$

Gán: $502\sqrt{2} + \sqrt{2520040}$ $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{A}}$; 1004 $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{STO}}\boxed{\text{B}}$ sau đó tính AD

$\Rightarrow DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{4PA^2 - \dfrac{PD^2 - PA^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{9PA^2 - PD^2}{2}} \approx 1377{,}335054$

Ta thấy: $\Delta PAC \sim \Delta PDB \Rightarrow \dfrac{PA}{PD} = \dfrac{AC}{DB} \Rightarrow AC = \dfrac{PA.DB}{PD} = \dfrac{PA}{PD}.\sqrt{\dfrac{9PA^2 - PD^2}{2}} \approx 601{,}9174896$

* ***Bài tập áp dụng***:

Bài1. Một ngôi sao năm cánh có khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp là 9,651cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp(qua 5 đỉnh)

Bài2. Cho một tam giác nội tiếp một đường tròn. Các đỉnh của tam giác chia đường tròn thành ba cung có độ dài tỉ lệ 3:4:5. Tính diện tích tam giác đó

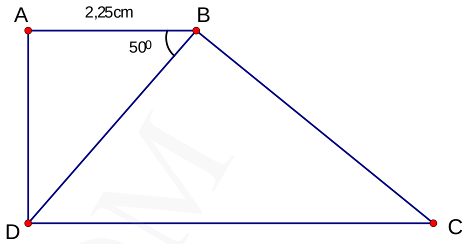
Bài 3. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, phân giác trong của góc A lần lượt cắt cạnh BC tại D và E. Giả sử AD = AE

Hãy tính $AB^2 + AC^2$ theo R

IV. TÍNH CANH, DIÊN TÍCH HÌNH THANG, HÌNH CHỮ NHÂT, HÌNH BÌNH HÀNH.

Bài1. Biết diện tích hình thang vuông ABCD là 9,92cm^2. AB = 2,25cm; $\widehat{ABD} = 50^0$. Tính độ dài các cạnh AD, DC, BC và số đo các góc ABC và BCD.

Lời giải



+) AD = AB.tg50^0 = 2,25.tg50^0 ≈ 2,681445583(cm).

+) $S = \dfrac{AB+DC}{2}.AD \Rightarrow CD = \dfrac{2S}{AD} - AB = \dfrac{2S}{ABtg50^0} - AB$

$\Rightarrow CD \approx 5,148994081(cm)$

+) $BC = \sqrt{AD^2+(DC-AB)^2} = \sqrt{AB^2tg^2 50^0 + \left(\dfrac{2S}{ABtg50^0} - 2AB\right)^2}$ ≈ **3,948964054** (cm)

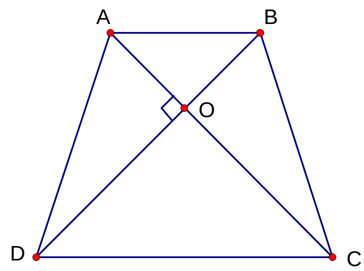
+) $tgC = \dfrac{ABtg50^0}{\dfrac{2S}{ABtg50^0} - 2AB} \approx 0,924957246 \Rightarrow \hat{C} \approx 42^0 46'3,02''$

$\Rightarrow \widehat{CBD} = 180^0 - 50^0 - 42^0 46'3,02'' = 87^0 13'56,98''$

Bài 2. Cho hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau nhau. Hai đáy có độ dài 15,34cm và 24,35cm.

a. Tính độ dài cạnh bên của hình thang.

b. Tính diện tích hình thang.



Lời giải

a, Gọi K,H lần lượt là trung điểm của AB và CD, O = AC ∩ BD

⇒ Vì ABCD là hình thang cân ⇒ ΔOAB cân tại O

$\Rightarrow OB = OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$, Tương tự $OC = OD = \dfrac{CD}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AD = BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{\dfrac{AB^2+CD^2}{2}}$ ≈ **20,34991523** (cm)

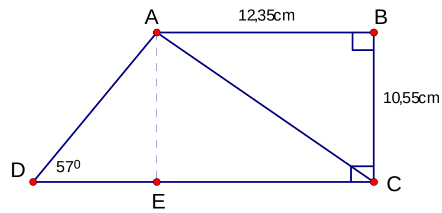
b, Vì AC ⊥ BD $\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{1}{2}(OA + OC)^2 = \dfrac{1}{4}(AB^2 + CD^2)$ ≈ **207,059525** (cm^2)

Bài 3. Cho hình thang vuông ABCD như hình vẽ:

a. Tính chu vi hình thang ABCD (54,68068285)

b. Tính diện tích hình thang ABCD (166,4328443)

c. Tính các góc còn lại của ΔADC



Lời giải

a, Kẻ AE ⊥ CD ⇒ DE = AE.tg(DAE) = BC.tg33^0

⇒ DC = DE + EC = BC.tg33^0 + AB

Mặt khác: $AD = \dfrac{AE}{\sin 57^0} = \dfrac{BC}{\sin 57^0}$

$\Rightarrow C_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 2.12,35 + 10,55 + 10,55tg33^0 + \dfrac{10,55}{\sin 57^0} \approx 54,68068285$ (cm)

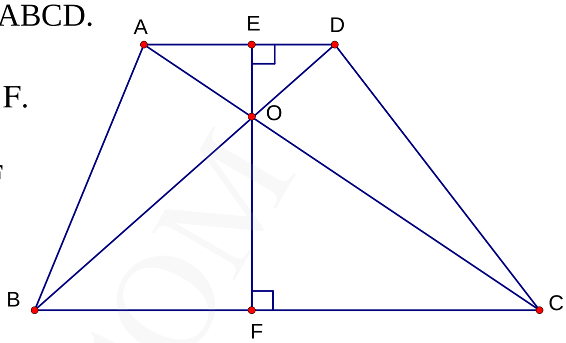
b, $S_{ABCD} = \dfrac{AB+DC}{2}.BC = \dfrac{AB+AB+DE}{2}.BC = \dfrac{2AB+BCtg33^0}{2}.BC = \dfrac{2.12,35+10,55tg33^0}{2}.10,55$

≈ 166,4328443 (cm^2)

c, $tg(CAE) = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12,35}{10,55} \Rightarrow \widehat{CAE} = 49^0 19'39,69'' \Rightarrow \widehat{DAC} = 82^0 19'36,69''$

$$\text{tg}(ACE) = \frac{BC}{AB} = \frac{10,55}{12,35} \Rightarrow \widehat{ACE} = 40^0 30'20,31''$$

Bài 4. Cho hình thang ABCD(AD//BC) có 2 đường chéo cắt nhau tại O.Hai tam giác AOD và BOC có diện tích lần lượt là $\sqrt{\sqrt{2}};\sqrt{\sqrt{3}}$ .Tính diện tích hình thang ABCD.



Lời giải

Qua O kẻ đường thẳng vuông góc và cắt AD tại E, cắt BC tại F.

$$\frac{S_{OAD}}{S_{OBC}} = \frac{OE.AD}{OF.BC} = \frac{OE^2}{OF^2} \Rightarrow \frac{OE}{OF} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3}}}} = k \Rightarrow OE = kOF$$

Đặt $S_{\Delta AOD} = S_1$; $S_{\Delta BOC} = S_2$; $EF = h$

$$S_{ABCD} = S_1 + S_{\Delta ODC} + S_2 + S_{\Delta OAB}$$

$$= S_1 + (S_{\Delta CAD} - S_1) + S_2 + (S_{\Delta BAD} - S_1)$$

$$= S_2 - S_1 + S_{\Delta BAD} + S_{\Delta CAD} = S_2 - S_1 + \frac{h.AD}{2} + \frac{h.AD}{2} = S_2 - S_1 + h.AD$$

$$= S_2 - S_1 + (OE + OF)AD = S_2 - S_1 + (OE + \frac{OE}{k})AD = S_2 - S_1 + 2S_1 + \frac{2S_1}{k}$$

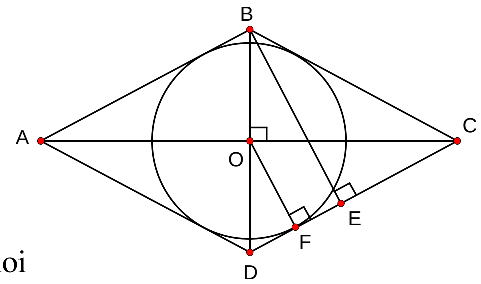
$$= S_2 + S_1 + 2.\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}}}\, S_1 = \sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}} + 2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}}}.\sqrt{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}} + 2\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}.\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^2 = \mathbf{5,007347938} \text{ (đvdt)}$$

Bài5. Một hình thoi có cạnh bằng 24,13cm, khoảng cách giữa hai cạnh là 12,25cm

a. Tính các góc của hình thoi(độ, phút giây) ($\widehat{A} \approx 30^0 30'30,75''$; $\widehat{B} \approx 149^0 19'29,2''$)

b, Tính diện tích của hình tròn (O) nội tiếp hình thoi(chính xác đến 4 chữ số thập phân) (S ≈ 194,9369057)



Lời giải

Kẻ BE ⊥ CD (E ∈ CD)

a, $\text{Sin}C = \frac{BE}{BC} = \frac{12,25}{24,13} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A} = 30^0 30'30,75''$

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D} = 180^0 - \widehat{C} = 149^0 29'29,2''$

b, Từ O kẻ OF ⊥ CD ⇒ OF là bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi

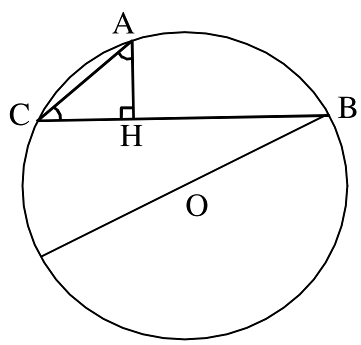
Dễ thấy $OF = \frac{BE}{2}$(tính chất đường trung bình trong tam giác)

$\Rightarrow S_{(O)} = \pi(OF)^2 = \pi\frac{BE^2}{4} = \mathbf{117,8588119}$ (cm^2)

Bài6. Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 11,25\ cm$. Trên đường tròn đã cho, đặt các cung $AB = 90^o$, $BC = 120^o$ sao cho A và C nằm cùng một phía đối với BO.

a) Tính các cạnh và đường cao AH của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC (chính xác đến 0,01).



Lời giải

a) Theo hình vẽ:

sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$ - sđ $\overset{\frown}{AB}$ = $120^0 - 90^0 = 30^0$.

Tính các góc nội tiếp ta được: $\widehat{ABC} = 15^0$; $\widehat{ACB} = 45^0$.

Suy ra: $\widehat{BAC} = 120^0$; $\widehat{CAH} = 45^0$; $\widehat{BAH} = 75^0$.

Ta có: $AB = R\sqrt{2}$; $BC = R\sqrt{3}$.

Vì ΔAHC vuông cân, nên $AH = HC$ (đặt $AH = x$).

Theo định lí Pitago ta có: $AH^2 = AB^2 - HB^2$. Do đó: $x^2 + \left(R\sqrt{3} - x\right)^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2$ hay $2x^2 - 2R\sqrt{3}x + R^2 = 0$. Suy ra: $x_1 = \dfrac{R\sqrt{3} - R}{2}$; $x_2 = \dfrac{R\sqrt{3} + R}{2}$.

Vì $AH < AC < R$, nên nghiệm $x_2 = \dfrac{R\sqrt{3} + R}{2}$ bị loại. Suy ra: $AC = AH\sqrt{2} = \dfrac{R(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$.

Gọi diện tích ΔABC là S, ta có:

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3} - R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2(3 - \sqrt{3})}{4}.$$

ấn phím: 11.25 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (15.91) Vậy $AB \approx 15{,}91\,cm$.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ *Kết quả*:19.49 Vậy: $BC \approx 19{,}49\,cm$.

ấn phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ (5.82) Vậy $AC \approx 5{,}82\,cm$.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ (4.12) Vậy: $AH \approx 4{,}12\,cm$.

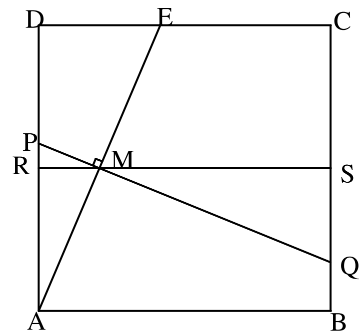
ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 3 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$

Kết quả: $S \approx 40{,}12\,cm^2$.

Bài7. (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1972)

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 12. Vẽ đoạn AE với E là điểm trên cạnh CD và $DE = 5\,cm$. Trung trực của AE cắt AE, AD và BC tại M, P và Q. Tỷ số độ dài đoạn PM và MQ là:

(A) 5:12; (B) 5:13; (C) 5:19; (D) 1:4; (E) 5:21.



Lời giải

Vẽ RS qua M song song với cạnh AB,CD. Ta có: $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MR}{MS}$.

Vì RM là đường trung bình của tam giác ADE nên $MR = \dfrac{DE}{2}$.

Mà: $MS = RS - MR$. Vậy: $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MR}{MS} = \dfrac{\frac{DE}{2}}{RS - \frac{DE}{2}}$.

áp dụng bằng số với $DE = 5\,cm$, $RS = 12\,cm$:

5 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{[(}$ 12 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ $\left(\dfrac{5}{19}\right)$ Đáp số (C) là đúng.

Chú ý: Nếu không sử dụng phân số (5 $\boxed{a^{b/c}}$ 2) mà dùng (5 $\boxed{\div}$ 2) thì máy sẽ cho đáp số dưới dạng số thập phân.

Hãy tính: 5 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{[(}$ 12 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ (0.2631579)

So sánh: 5 $\boxed{a^{b/c}}$ 19 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{a^{b/c}}$ $\boxed{a^{b/c}}$ *Kết quả*: 0.2631579

Như vậy, hai kết quả như nhau, nhưng một kết quả được thực hiện dưới dạng phân số (khi khai báo 5 $\boxed{a^{b/c}}$ 2), còn một kết quả được thực hiện dưới dạng số thập phân (khi khai báo 5 $\boxed{\div}$ 2).

Bài 8. Trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 15{,}25\,cm$, người ta đặt các cung liên tiếp: $\overset{\frown}{AB} = 60^0$, $\overset{\frown}{BC} = 90^0$, $\overset{\frown}{CD} = 120^0$.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

b) Chứng minh $AC \perp BD$.

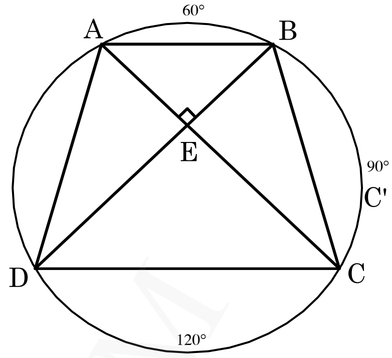
c) Tính các cạnh và đường chéo của $ABCD$ theo R chính xác đến 0,01.

d) Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Lời giải

a) sđ $\overset{\frown}{AD} = 360^0$ - (sđ $\overset{\frown}{AB}$ +sđ $\overset{\frown}{BC}$ +sđ $\overset{\frown}{CD}$)

$= 360^0 - (60^0 + 90^0 + 120^0) = 90^0$.



Suy ra: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$, $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = 45^0$ (vì cùng bằng $\frac{90^0}{2}$).

Từ đó ta có: $AB // CD$. Vậy $ABCD$ là hình thang.

Mặt khác, $\widehat{ADB} = \widehat{BCD}$ (cùng bằng $\frac{60^0 + 90^0}{2}$).

Vậy $ABCD$ là hình thang cân (đpcm).

b) Vì $\widehat{ABD} = \widehat{BAC} = 45^0$ (vì cùng bằng $\frac{90^0}{2}$).

Suy ra $\widehat{AEB} = 90^0$, vậy $AC \perp BD$ (đpcm).

c) Theo cách tính cạnh tam giác đều, tứ giác đều, lục giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính R, ta có:

$$AB = R;\quad AD = BC = R\sqrt{2};\quad DC = R\sqrt{3}.$$

Các tam giác AEB, CED vuông cân, suy ra $AE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, $CE = \frac{CD}{\sqrt{2}}$.

Vậy: $AE = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $CE = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Suy ra $AC = AE + EC = \frac{R + R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{R(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$.

d) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot DB = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2(1+\sqrt{3})^2}{2} = \frac{R^2(1+\sqrt{3})^2}{4} = [\frac{R(1+\sqrt{3})}{2}]^2$.

Tính: $\boxed{\text{MR}}\ \boxed{\times}\ \boxed{[(}\ 1\ \boxed{+}\ 3\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ 2\ \boxed{=}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{7}\ \boxed{2}$ (433.97).

Vậy $S_{ABCD} \approx 433{,}97$ cm^2.

ấn tiếp: 15.25 $\boxed{\text{Min}}\ \boxed{\times}\ 2\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$ *Kết quả*: 21.57

Vậy $AD = BC \approx 21{,}57$ cm.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}\ \boxed{\times}\ 3\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$ (26.41) Vậy: $CD \approx 26{,}41\ cm$.

ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}\ \boxed{\times}\ \boxed{[(}\ 1\ \boxed{+}\ 3\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ 2\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$ (29.46)

Vậy $AC = BD \approx 29{,}46\ cm$.

Bài tập áp dụng.

Bài1. Cho hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau, đáy nhỏ dài15,34cm, cạnh bên dài 20,35cm. Tính độ dài đáy lớn.

Bài2. Cho hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau. Đáy nhỏ dài 13,724 cạnh bên dài 21,876. Tính diện tích hình thang

Bài3. Một hình thoi có chu vi là 37,12cm. Tỉ số giữa hai đường chéo là 2:3. Tính diện tích của hình thoi (S ≈ 79,4939)

Bài4. Cho hình thang vuông ABCD(AB ⊥ CD), F là điểm chính giữa của CD, AF cắt BC tại E. Biết AD = 1,482; BC = 2,7182; AB = 2. Tính diện tích ΔBEF

Bài5. Cho hình cân ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H. Biết đáy nhỏ AB = 3 và cạnh bên AD = 6.

a, Tính diện tích hình thang ABCD

b, Gọi M là trung điểm của CD. Tính diện tích ΔAHM

Bài6 Cho hình thang ABCD(AB//CD), có đường chéo BD hợp với cạnh bên BC một góc bằng góc DAB (*xem hình*) Biết. AB = 12,25; DC = 28,5

a, Tính độ dài đường chéo BD

b, Tính tỉ số diện tích hai tam giác ABD và BDC (chính xác đến 6 chữ số thập phân)

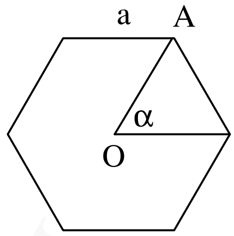
Bài7. Cho hình thang vuôn ABCD có $\widehat{BCD} = 65^0$ ngoại tiếp đường tròn tâm O bàn kính R = 3,25.

a, Tính các cạnh của hình thang ABCD

b, Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hình thang ABCD và (O)

IV. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT, VIÊN PHÂN - ĐA GIÁC CONG.

*) ***Lý thuyết:*** **Đa giác, hình tròn:**



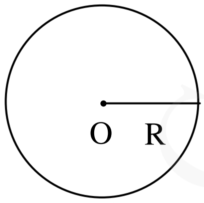
1, ***Đa giác đều n cạnh, độ dài cạnh là a***:

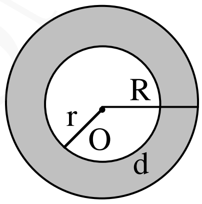
+ Góc ở tâm: $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ (rad), hoặc: $a^o = \dfrac{360}{n}$ (độ)

+ Góc ở đỉnh: $\widehat{A} = \dfrac{n-2}{n}\pi$ (rad), hoặc $\widehat{A} = \dfrac{n-2}{n}.180$ (độ)

+ Diện tích: $S = \dfrac{na}{4}\cot g\dfrac{\alpha}{2}$

2. ***Hình tròn và các phần hình tròn***:





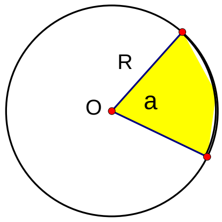
+ ***Hình tròn bán kính R***:

- Chu vi: C = 2πR
- Diện tích: S = πR^2

+ ***Hình vành khăn:***

- Diện tích: $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(2r + d)d$

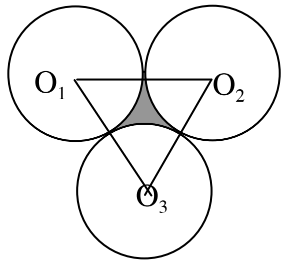
+ ***Hình quạt***:



- Độ dài cung: $l = \alpha R$; (α: rad)
- Diện tích: $S = \dfrac{1}{2}R^2\alpha$ (α: rad) $= \dfrac{\pi R^2 a}{360}$ (a: độ)

*) ***Phần bài tập***.

Bài1. Ba đường tròn có cùng bán kính R = 3 cm đôi một tiếp xúc ngoài (Hình vẽ)
Tính diện tích phần xen giữa ba đường tròn đó ?



Lời giải

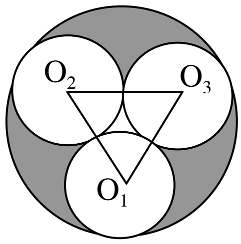
$S_{gạch\ xọc} = S_{\Delta O_1O_2O_3} - 3\,S_{quạt}$. Tam giác $O_1O_2O_3$ đều, cạnh bằng 3 nên:

$$S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}6.3.\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{quạt} = \frac{\pi R^2 a}{360} = \frac{\pi.9.60}{360} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow S_{gạch\ xọc} = S_{\Delta O_1O_2O_3} - 3\,S_{quạt} = 9\sqrt{3} - \frac{9\pi}{2} = \frac{18\sqrt{3} - 9\pi}{2} \approx 1,451290327$$

Bài2: Tính diện tích phần được tô đậm trong hình tròn đơn vị (R = 1cm)



Lời giải

Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm của 3 đường tròn bên trong đường tròn đơn vị, gọi a là độ dài bán kính của 3 đường tròn đó, O là tâm đường tròn đơn vị

$\Rightarrow$ O là trọng tâm $\Delta O_1O_2O_3$ đều $\Rightarrow OO_1 = OO_2 = OO_3 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Mặt khác O là tâm đường tròn đơn vị $\Rightarrow a + \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

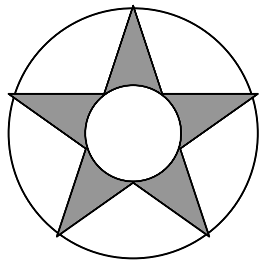
$$S_{gạchxọc} = S_{(O)} - 3\,S_{quạt\ lớn} - S_{\Delta O_1O_2O_3} = \pi.1^2 - 3\frac{\pi.300}{360}\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \pi.-\frac{5\pi.}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 \approx \mathbf{0,646073543}\text{(cm)}$$

Lưu ý: Nếu các đường tròn O_1, O_2, O_3 đều có bán kính bằng 1 $\Rightarrow$ đường tròn lớn có bán kính $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{gạchxọc} = S_{(O)} - 3\,S_{quạt\ lớn} - S_{\Delta O_1O_2O_3} = \pi\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 3\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3} = 4,999547847$

Bài3: Tính tỷ lệ diện tích của phần được tô đậm và diện tích phần còn lại trong hình tròn đơn vị.

Lời giải



Ta có: $\widehat{AOB} = 360^0 : 5 = 72^0 \Rightarrow \widehat{MON} = 36^0$ và $\widehat{OAH} = 18^0$

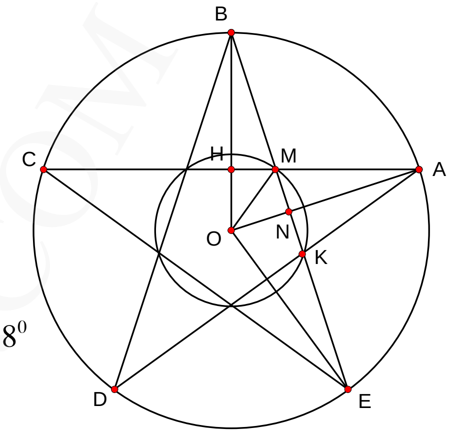
$\Rightarrow$ OH = ON = OA.sin18^0 = 1.sin18^0 $\Rightarrow$ NA = 1 - ON = 1 - sin18^0

\ NM = AN.tg18^0 =(1 - sin18^0)tg18^0

$\Rightarrow S_{\Delta AMK}$ = AN.MN = (1 - sin18^0)(1- sin18^0)tg18^0 = (1- sin18^0)^{2}tg18^0

\ S_{MNOH} = ON.NM = sin18^0(1- sin18^0)tg80^0

\ $S_{(O,OM)}$ = π(ON^2 + NM^2) = π(sin^{2}180 +(1 - sin18^0)^{2}tg^{2}18)



$\Rightarrow$ Diện tích hình quạt AMB là: $S_1 = \dfrac{\pi R^2}{5} - S_{\Delta AMK} - S_{MNOH}$

$\Rightarrow S_1 = \dfrac{\pi}{5}$ - (1- sin18^0)^{2}tg18^0 - sin18^0(1- sin18^0)tg18^0

*) Diện tích phần mầu trắng là:

S =5S_1 + $S_{(O,OM)}$ = π - 5(1- sin18^0)^{2}tg18^0 - 5sin18^0(1- sin18^0)tg18^0 + π(sin^{2}180 +(1 - sin18^0)^{2}tg^{2}18^0)

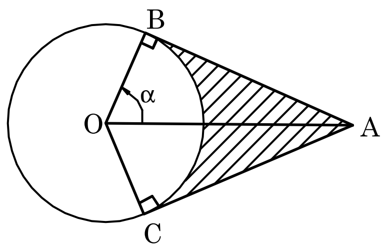
*) Diện tích phần mầu đen là:

S' = π1^2 - 5S_1 - $S_{(O,OM)}$ = 5(1- sin18^0)^{2}tg18^0 + 5sin18^0(1- sin18^0)tg18^0 - π[sin^{2}18^0 +(1 - sin18^0)^{2}tg^{2}18^0]

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = 0{,}268113538$$

Bài4. Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 3{,}15\ cm$. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là hai tiếp điểm thuộc (O)).

Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hai tiếp tuyến và cung tròn nhỏ *BC* biết rằng $AO = a = 7{,}85\ cm$ (chính xác đến 0,01 cm).



Giải: Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{a} = \dfrac{3{,}15}{7{,}85}$.

$$S_{ABOC} = 2S_{AOB} = a.R.\sin\alpha;$$

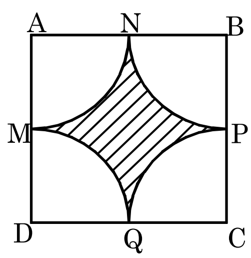
$$S_{\text{quạt OBC}} = \frac{\pi R^2.2\alpha}{360} = \frac{\pi R^2\alpha}{180}.$$

$$S_{\text{gạch xọc}} = S_{ABOC} - S_{\text{quạt OBC}} = aR\sin\alpha - \frac{\pi R^2\alpha}{180}.$$

Tính trên máy: 3.15 $\boxed{\div}$ 7.85 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 7.85 $\boxed{\times}$ 3.15 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 3.15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\div}$ 180 $\boxed{=}$ (11.16)

Đáp số: $S_{\text{gạch xọc}}$ = 11,16 cm^2.

Bài5. Tính diện tích hình có 4 cạnh cong(hình gạch sọc) theo cạnh hình vuông a = 5,35 chính xác đến 0,0001cm.



Giải: Diện tích hình gạch xọc $MNPQ$ (S_{MNPQ}) bằng diện tích hình vuông $ABCD$ (S_{ABCD}) trừ đi 4 lần diện tích của $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính $R = \frac{a}{2}$.

$$S_{MNPQ} = a^2 - 4\frac{\pi R^2}{4} = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2(4-\pi)}{4} = \frac{5{,}35^2(4-\pi)}{4}.$$

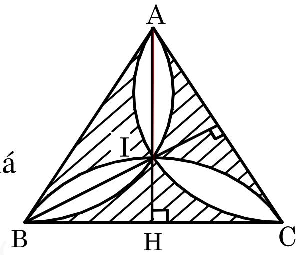
ấn phím: 5.35 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 4 $\boxed{-}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (6.14)

Kết luận: $S_{MNPQ} \approx$ 6,142441068cm^2.

Bài6. Tính diện tích phần hình phẳng (phần gạch xọc) giới hạn bởi các cung tròn và các cạnh của tam giác đều *ABC* (xem hình vẽ),

biết: $AB = BC = CA = a = 5{,}75\ cm$.

Giải: $R = OA = OI = IA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Suy ra: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{AOI} = 60^0$.

Diện tích hình gạch xọc bằng diện tích tam giác ABC trừ diện tích hình hoa 3 lá (gồm 6 hình viên phân có bán kính R và góc ở tâm bằng 60^0).

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_{\Delta O_1AI} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Diện tích một viên phân: $\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.

Tính theo *a*, diện tích một viên phân bằng: $\frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{36}$;

$$S_{\text{gạch xọc}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 6\cdot\frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{36} = \frac{a^2(9\sqrt{3} - 4\pi)}{12}; \quad S_{\text{gạch xọc}} = \frac{5,75^2(9\sqrt{3} - 4\pi)}{12}.$$

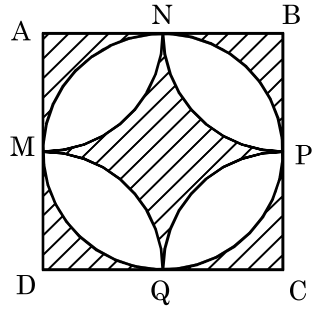
Bấm tiếp: 5,75 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 9 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{-}$ 4 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{)]}$ $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{=}$

Kết quả: $S_{\text{gạch xọc}} \approx$ 8,33 cm^2.

Bài7. Viên gạch cạnh $a = 30\ cm$ có hoa văn như hình vẽ .

a) Tính diện tích phần gạch xọc của hình đã cho, chính xác đến 0,01 cm.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch.



Giải: a) Gọi R là bán kính hình tròn.

Diện tích S một hình viên phân bằng:

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) = \frac{a^2}{16}(\pi - 2).$$

Vậy diện tích hình gồm 8 viên phân bằng $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$.

Diện tích phần gạch xọc bằng: $a^2 - \frac{a^2(\pi - 2)}{2} = \frac{a^2(4 - \pi)}{2}$.

Tính trên máy: 30 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[(}$ 4 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{)]}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (386.28) Vậy $S_{\text{gạch xọc}} \approx$ 386,28 cm^2.

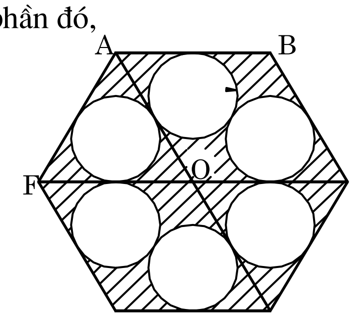
ấn phím tiếp: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ (42.92)

Tỉ số của diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch là 42,92%.

Đáp số: 386,28 cm^2; 42,92 %.

Bài8. Nhân dịp kỷ niệm 990 năm Thăng Long, người ta cho lát lại đường ven hồ Hoàn Kiếm bằng các viên gạch hình lục giác đều. Dưới đây là viên gạch lục giác đều có 2 mầu (các hình tròn cùng một mầu, phần còn lại là mầu khác).

Hãy tính diện tích phần gạch cùng mầu và tỉ số diện tích giữa hai phần đó, biết rằng $AB = a = 15\ cm$.



Giải: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều là: $R = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Diện tích mỗi hình tròn là: $\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{12}$

Diện tích 6 hình tròn là: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Tính trên máy: 15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ (353.4291)

Diện tích toàn bộ viên gạch là: $6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

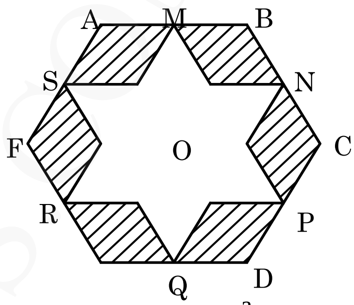
Diện tích phần gạch xọc là: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi a^2}{2}$.

Bấm tiếp phím: 3 $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (231.13797)

ấn tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ *Kết quả*: 65.40

Đáp số: 353,42 cm^2 (6 hình tròn); 231,14 cm^2 (phần gạch xọc); 65,40 %

Bài9. Viên gạch hình lục giác đều ABCDEF có hoa văn hình sao như hình vẽ, trong đó các đỉnh hình sao M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của lục giác.



Viên gạch được tô bằng hai mầu (mầu của hình sao và mầu của phần còn lại).

Biết rằng cạnh của lục giác đều là a = 16,5 cm.

+ Tính diện tích mỗi phần (chính xác đến 0,01).

+ Tính tỉ số phần trăm giữa hai diện tích đó.

Giải: Diện tích lục giác $ABCDEF$ bằng: $S_1=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lục giác nhỏ có cạnh là $b=\frac{a}{2}$, 6 cánh sao là các tam giác đều cũng có cạnh là $b=\frac{a}{2}$. Từ đó suy ra: diện tích lục giác đều cạnh b là S_2 bằng: $S_2=\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$, diện tích 6 tam giác đều cạnh b là S_3: $S_3=\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

Tính trên máy: 3 $\boxed{\times}$ 16.5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 8 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (353.66) $\boxed{\text{Min}}$

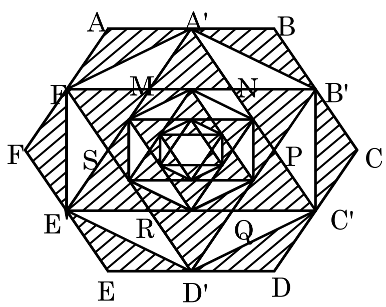
ấn tiếp phím: 3 $\boxed{\times}$ 16,5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (353.66)

ấn tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ *Kết quả*: 100.

Vậy diện tích hai phần bằng nhau.

Lời bình: Có thể chứng minh mỗi phần có 12 tam giác đều bằng nhau, do đó diện tích hai phần bằng nhau. Từ đó chỉ cần tính diện tích lục giác đều và chia đôi.

Bài10. Cho lục giác đều cấp 1 $ABCDEF$ có cạnh $AB=a=36\ mm$. Từ các trung điểm của mỗi cạnh dựng một lục giác đều $A'B'C'D'E'F'$ và hình sao 6 cánh cũng có đỉnh là các trung điểm A', B', C', D', E', F' (xem hình vẽ). Phần trung tâm của hình sao là lục giác đều cấp 2 $MNPQRS$ .Với lục giác này ta lại làm tương tự như đối với lục giác ban đầu $ABCDEF$ và được hình sao mới và lục giác đều cấp 3. Đối với lục giác cấp 3, ta lại làm tương tự như trên và được lục giác đều cấp 4. Đến đây ta dừng lại. Các cánh hình sao cũng được tô bằng một mầu (gạch xọc), còn các hình thoi trong hình chia thành 2 tam giác và tô bằng hai mầu: mầu gạch xọc và mầu "trắng". Riêng lục giác đều cấp 4 cũng được tô mầu trắng.



a) Tính diện tích phần được tô bằng mầu "trắng" theo a.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần "trắng" và diện tích hình lục giác ban đầu.

Giải: a) Chia lục giác thành 6 tam giác đều có cạnh là a bằng 3 đường chéo đi qua 2 đỉnh đối xứng qua tâm, từ đó ta có $S=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.Chia lục giác $ABCDEF$ thành 24 tam giác đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Mỗi tam giác đều cạnh $\frac{a}{2}$ có diện tích bằng diện tích tam giác "trắng" $A'NB'$ (xem hình vẽ). Suy ra diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài bằng $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ diện tích lục giác cấp 1 $ABCDEF$.

Vậy diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. (1)

b) Tương tự với cách tính trên ta có: $MN = b = \frac{a}{2}$; $c = \frac{b}{2}$.

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 2 $MNPQRS$ là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$. (2)

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 3 là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$. (3)

Diện tích lục giác trắng trong cùng bằng (với $d = \frac{c}{2}$): $\frac{3d^2\sqrt{3}}{2}$. (4)

Tóm lại ta có:

$$S_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^3}\ ; \quad S_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2 \cdot 2^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^5};$$

$$S_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3c^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2 \cdot 4^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^7};\quad S_4 = \frac{3d^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2 \cdot 8^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^7}.$$

$$S_{\text{trắng}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3a^2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{2}{2^7}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2^4 + 2^2 + 2}{2^6}.$$

ấn phím: 3 $\boxed{\times}$ 36 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (3367.11) $\boxed{\text{Min}}$

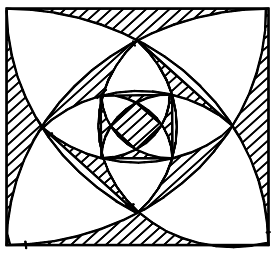
Vậy $S_{ABCDEF} = 3367{,}11$ mm^2.

ấn tiếp phím: 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 6 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (1157.44) Vậy $S_{\text{trắng}} \approx 1157{,}44$ mm^2.

ấn tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ (34.38). Vậy $\frac{S_{trang}}{S_{ABCDEF}} \approx 34{,}38\%$.

Đáp số: 1157,44 mm^2 và 34,38%.

Bài11. Cho hình vuông cấp một $ABCD$ với độ dài cạnh là $AB = a = 40\ cm$. Lấy A, B, C, D làm tâm, thứ tự vẽ các cung tròn bán kính bằng a, bốn cung tròn cắt nhau tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ cũng là hình vuông, gọi là hình vuông cấp 2. Tương tự như trên, lấy M, N, P, Q làm tâm vẽ các cung tròn bán kính MN, được 4 giao điểm E, F, G, H là hình vuông cấp 3. Tương tự làm tiếp được hình vuông cấp 4 $XYZT$ thì dừng lại (xem hình vẽ).



a) Tính diện tích phần hình không bị tô mầu (phần để trắng theo a).

b) Tìm tỉ số phần trăm giữa hai diện tích tô mầu và không tô mầu.

Giải: a) Tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 1 (bằng 4 viên phân trừ đi 2 lần diện tích hình vuông cấp 2).

$$S_1 = 4 \cdot \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2b^2 \quad (b \text{ là cạnh hình vuông cấp 2}).$$

Tương tự, tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 2 và cấp 3:

$$S_2 = 4\left(\frac{\pi b^2}{4} - \frac{b^2}{2}\right) - 2c^2 \quad (c \text{ là cạnh hình vuông cấp 3}).$$

$$S_3 = \left(\frac{\pi c^2}{4} - \frac{c^2}{2}\right) - 2d^2 \quad (d \text{ là cạnh hình vuông cấp 4}).$$

Rút gọn: $S_1 = a^2(\pi - 2) - 2b^2$; $S_2 = b^2(\pi - 2) - 2c^2$; $S_3 = c^2(\pi - 2) - 2d^2$;

$$S_{\text{trắng}} = S_1 + S_2 + S_3 = \pi(a^2 + b^2 + c^2) - 4(b^2 + c^2) - 2(a^2 + d^2).$$

b) Ta có: $\widehat{MCQ} = 30^0$; $b = QM = 2MK = 2a.\sin 15^0 = a(2\sin 15^0)$.

Tương tự: $c = 2b.\sin 15^0 = a(2\sin 15^0)^2$; $d = 2c.\sin 15^0 = a(2\sin 15^0)^3$.

Ký hiệu $x = 2\sin 15^0$, ta có: $b = a.x;\ c = ax^2;\ d = ax^3$.

Thay vào công thức tính diện tích $S_{trắng}$ ta được:

$$S_{trắng} = \pi(a^2 + a^2x^2 + a^2x^4) - 4(a^2x^2 + a^2x^4) - 2(a^2 + a^2x^6)$$
$$= \pi a^2(1 + x^2 + x^4) - 4a^2(x^2 + x^4) - 2a^2(1 + x^6)$$

ấn phím: 15 $\boxed{o,,,}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$

$\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 4 $\boxed{\times}$ 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$

$\boxed{[(}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{)]}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\times}$ 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$

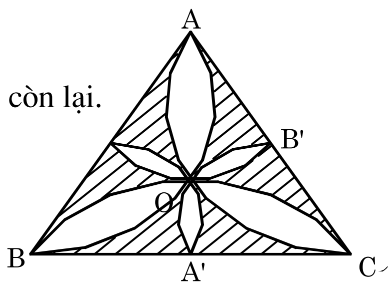
$\boxed{[(}$ 1 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^y}$ 6 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (1298.36) $\boxed{\text{Min}}$

Vậy $S_{trắng} \approx 1298{,}36$ cm^2.

Bấm tiếp phím: 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (301.64) Vậy $S_{gạch\ xọc} \approx 301{,}64$ cm^2.

Bấm tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ (23.23) Vậy $\dfrac{S_{gach\ xoc}}{S_{trang}} \approx 23{,}23\%$. *Đáp số*: 1298,36 cm^2; 23,23%.

Bài12. Cho tam giác đều ABC có cạnh là $a = 33{,}33cm$ và tâm là O. Vẽ các cung tròn qua hai đỉnh và trọng tâm O của tam giác được hình 3 lá. Gọi A', B', C' là các trung điểm các cạnh BC, CA và AB. Ta lại vẽ các cung tròn qua hai trung điểm và điểm O, ta cũng được hình 3 lá nhỏ hơn.



a, Tính diện tích phần cắt bỏ (hình gạch xọc) của ΔABC để được hình 6 lá còn lại.

b, Tính tỉ số phần trăm giữa phần cắt bỏ và diện tích của tam giác ABC.

Giải: $A'B'C'$ cũng là tam giác đều nhận O làm tâm (vì AA', BB', CC' cũng là các đường cao, đường trung tuyến của $\Delta A'B'C'$). 6 chiếc lá chỉ có điểm chung duy nhất là O, nghĩa là không có phần diện tích chung.

Mỗi viên phân có góc ở tâm bằng 60^0, bán kính bằng $\frac{2}{3}$ đường cao tam giác đều. Gọi S_1 là diện tích 1 viên phân. Khi ấy $S_1 = \dfrac{\pi OA^2}{6} - \dfrac{OA^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{OA^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$. Ta có: $OA = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi S là diện tích 3 lá lớn, S' là diện tích 3 lá nhỏ. Khi ấy: $S = 6S_1 = \dfrac{OA^2}{2}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \dfrac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Gọi cạnh tam giác đều $A'B'C'$ là b, tương tự ta cũng có: $S' = \dfrac{b^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \dfrac{a^2}{24}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Tổng diện tích 6 lá là: $S + S' = (2\pi - 3\sqrt{3})(\dfrac{a^2}{6} + \dfrac{a^2}{24})$.

Diện tích phần gạch xọc (phần cắt bỏ) là S''.

$$S'' = S_{\Delta ABC} - (S + S') = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - (2\pi - 3\sqrt{3})(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{24}) = (\frac{7\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{12}\pi)a^2.$$

Tính $S_{\Delta ABC}$: 33.33 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ (481.0290040) $\boxed{\text{Min}}$

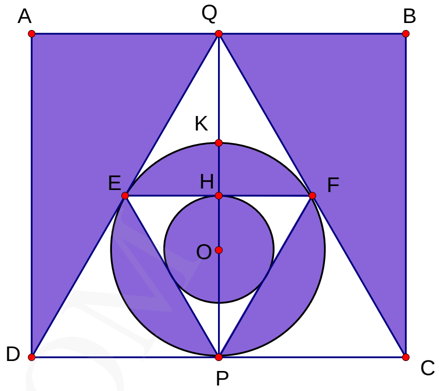
Tính S'': 7 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 8 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 33.33 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ (229.4513446)

Vậy $S'' \approx 229{,}45$ cm^2.

ấn tiếp phím để tính $\dfrac{S''}{S_{ABC}}$: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ *Kết quả*: 47.70

Đáp số: $S'' \approx 229{,}45$ cm^2; $\dfrac{S''}{S_{ABC}} \approx 47{,}70\ \%$.

Bài13. Tính tỉ số diện tích phần tô đậm và không tô đậm biết rằng ABCD là hình chữ nhật, các tam giác là các tam giác đều.



Lời giải

Gọi $DC = DQ = QC = a\ (a > 0) \Rightarrow PQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ADQ} + S_{BCQ} = DP.PQ = \dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = S_{\Delta QDC}$

\ $S_{(O,OP)} = \pi OP^2 = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3.2}\right)^2 = \pi\dfrac{a^2}{12}$; $S_{(O;\,OH)} = \pi\left(\dfrac{PQ}{6}\right)^2 = \pi\dfrac{a^2}{48}$

\ $S_{\Delta PEF} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{DC}{2}.\dfrac{PQ}{2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$

*) Tổng diện tính phần màu trắng:

$$S_1 = S_{\Delta QDC} - S_{(O,OP)} + S_{\Delta PEF} - S_{(O;\,OH)} = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \pi\frac{a^2}{12}\right) + \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{16} - \pi\frac{a^2}{48}\right) = \frac{5\sqrt{3}a^2}{16} - \frac{5a^2\pi}{48}$$

*) Tổng diện tích phần tô đậm:

$$S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\pi\frac{a^2}{12} - \frac{a^2\sqrt{3}}{16}\right) + \pi\frac{a^2}{48} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} + \frac{5a^2\pi}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{3\sqrt{3}a^2}{16} + \frac{5a^2\pi}{48}\right):\left(\frac{5\sqrt{3}a^2}{16} - \frac{5a^2\pi}{48}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{5\pi}{48}\right):\left(\frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{5\pi}{48}\right) \approx 3{,}046532985$$

Lưu ý: Nếu tính tỷ số ngược lại thì: $S_1 : S_2 \approx 0{,}328241973$

Bài tập áp dụng.

Bài1. Cho 3 hình tròn có cùng bán kính $R=3\sqrt{2}$,tiếp xúc ngoài nhau tại A;B;C.Tính diện tích tam giác cong ABC.

Bài2. Cho hình vuông cạnh $a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+6\sqrt{5}}}$, người ta dựng 4 đường tròn có đường kính là bốn cạnh của hình vuông.Tính diện tích hình hoa thị 4 cánh.

Bài3. Qua 1 điểm tùy ý nằm bên trong tam giác ABC,ta dựng 3 đường thẳng lần lượt song song với 3 cạnh của tam giác.Các đường thẳng đó chia tam giác thành sáu phần trong đó có ba phần là ba tam giác có diện tích lần lượt là: $\pi^2; \pi^2+1; \pi^2+3$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 4. Tính diện tích phần nằm trong tam giác nhưng nằm ngoài các hình tròn bằng nhau có bán kính 3cm