SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

SBD : PHÒNG:

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
Năm học 2014 – 2015
Môn : TOÁN
Thời gian làm bài : **180 phút**
(Không kể thời gian phát đề)

Bài 1: (3,0 điểm)

Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (1)

Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số (1) sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại hai điểm A và B với độ dài đoạn AB ngắn nhất.

Bài 2: (2,0 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số sau đây trên tập xác định của nó:

$$y=f(x)=x^2-\frac{36}{\sqrt{9-x^2}+1}$$

Bài 3: (2,0 điểm)

Giải phương trình

$$\sin^3 x+3\cos x=3\sin^2 x\cos x+2\sin x$$

Bài 4: (2,0 điểm)

Giải bất phương trình

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x+1}<\sqrt[3]{3x+4}$$

Bài 5: (2,0 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy=2x-y \\ 2x^3+y^3=-2 \end{cases}$$

Bài 6: (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $\mathrm{BC}=2\,\mathrm{AB}$, $\mathrm{M}(4;0)$ là trung điểm của BC, đường thẳng AD có phương trình $2x-y+1=0$. Tìm tọa độ các điểm B và C biết rằng hình thang ABCD có diện tích bằng $\frac{54}{5}$ và các tọa độ của hai điểm A, B đều dương.

Bài 7: (3,0 điểm)

Nhân dịp khách sạn kỷ niệm ngày thành lập, ban quản lý khách sạn thực hiện khuyến mãi như sau: Mỗi đoàn du lịch đến nghỉ ở khách sạn đều chọn ngẫu nhiên hai người để tặng thưởng. Có hai đoàn du lịch cùng đến khách sạn, đoàn thứ nhất có 6 người Việt Nam và 12 người Pháp; đoàn thứ hai có 3 người Việt Nam, 7 người Nga và 2 người Anh. Tính xác suất để cả hai đòan có ít nhất hai người nhận thưởng đều là người Việt Nam.

Bài 8: (4,0 điểm)

Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho $\mathrm{SA}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}=a$; $\mathrm{SB}=a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Tính theo a thể tích khối chóp S. BMDN.
b) Tính cosin góc hợp bởi hai đường thẳng SM và DN.
c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và DN.

------Hết------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO AN GIANG
HƯỚNG DẪN CHẤM

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
Năm học 2014 – 2015
MÔN TOÁN

A.ĐÁP ÁN

<table>
<tr><th>Bài</th><th>LƯỢC GIẢI</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>Bài 1</td><td>

$$y=\frac{2x-1}{x-1}\quad(1)$$

TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\quad y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$;

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=2\,;\ \lim_{x\to.1^+}y=+\infty\,;\ \lim_{x\to.1^-}y=-\infty$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x=1$ tiệm cận ngang $d_2: y=2$

$$M\in(C)\Longrightarrow M\left(m;2+\frac{1}{m-1}\right);\text{ĐK } m\neq 1$$

Phương trình tiếp tuyến tại M

$$y=-\frac{1}{(m-1)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-1}$$

A là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng

$$\Longrightarrow x_A=1\,;y_A=2+\frac{2}{m-1}$$

B là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang

$$y_B=2;\quad 2=-\frac{1}{(m-1)^2}(x_B-m)+2+\frac{1}{m-1}\Leftrightarrow x_B=2m-1$$

$$AB=\sqrt{(2m-2)^2+\left(-\frac{2}{m-1}\right)^2}=2\sqrt{(m-1)^2+\frac{1}{(m-1)^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng ta được

$$(m-1)^2+\frac{1}{(m-1)^2}\geq 2$$

$\Longrightarrow AB\geq 2\sqrt{2}$ Vậy AB ngắn nhất bằng $2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $(m-1)^2=1\Longrightarrow m=0;m=2$

$$m=0\Longrightarrow M(0;1);m=2\Longrightarrow M(2;3)$$

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $(0;1)$; $(2;3)$

</td><td>3,0 điểm</td></tr>
<tr><td>Bài 2</td><td>

$$y=f(x)=x^2-\frac{36}{\sqrt{9-x^2}+1}$$

Tập xác định $D=[-3;3]$

Đặt $t=\sqrt{9-x^2}\ do\ x\in[-3;3]\Longrightarrow t\in[0;3]$; $x^2=9-t^2$

Xét hàm số

$$g(t)=9-t^2-\frac{36}{t+1}\ trên\ tập\ T=[0;3]$$

$g'(t)=-2t+\frac{36}{(t+1)^2}$

$g'(t)=0\Leftrightarrow 2t(t+1)=36\Leftrightarrow t(t+1)^2=18$

$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+4t+9)=0\Leftrightarrow t=2$

$g(0)=-25$; $g(2)=-7$; $g(3)=-9\Longrightarrow \max_T g(t)=-7\ khi\ t=2$

Vậy Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ bằng -7 khi $\sqrt{9-x^2}=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

</td><td>2,0 điểm</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Bài 3</td><td>Giải phương trình lượng giác
$$\sin^3 x + 3\cos x = 3\sin^2 x\cos x + 2\sin x$$
$$\Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x + 3\cos x - 2\sin x = 0$$
Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình, chia phương trình cho $\cos^3 x$ ta được
$$\tan^3 x - 3\tan^2 x + (3 - 2\tan x).\frac{1}{\cos^2 x} = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan^3 x - 3\tan^2 x + (3 - 2\tan x)(1 + \tan^2 x) = 0$$
$$\Leftrightarrow tan^3 x + 2\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x + 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)$$
Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)$</td><td>2,0 điểm</td></tr>
<tr><td>Bài 4</td><td>Xét phương trình
$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{3x+4} \quad (*)$$
$$\Leftrightarrow x + 3\sqrt[3]{x(2x+1)}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+1}\right) + 2x + 1 = 3x + 4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x(2x+1)}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+1}\right) = 1 \quad (**)$$
Xét phương trình hệ quả bằng cách thế $(*) vào$ $(**)$ ta có
$$\sqrt[3]{x(2x+1)}\sqrt[3]{3x+4} = 1$$
$$\Leftrightarrow x(2x+1)(3x+4) = 1$$
$$\Leftrightarrow 6x^3 + 11x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = \frac{1}{6}$$
Thử lại ta có $x = \frac{1}{6}$ là nghiệm của phương trình $(*)$
Mặt khác hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{3x+4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ do đó hàm số cùng một dấu trên mỗi khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$; $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$ dễ thấy $f(0) < 0 ; f(2) > 0$ vậy bất phương trình có tập nghiệm là $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$</td><td>2,0 điểm</td></tr>
<tr><td>Bài 5</td><td>$$\begin{cases} xy = 2x - y \\ 2x^3 + y^3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)y = 2x \\ 2x^3 + y^3 = -2 \end{cases}$$
Đặt $x + 1 = t$ ta được hệ phương trình sau
$$\begin{cases} ty = 2t - 2 \\ 2(t-1)^3 + y^3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2y = 2t^2 - 2t \\ 2t^3 - 6t^2 + 6t - 2 + y^3 = -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ty = 2t - 2 \\ 2t^3 - 3t^2y + y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ty = 2t - 2 \\ (2t + y)(t^2 - 2ty + y^2) = 0 \end{cases}$$
TH1: $t^2 - 2ty + y^2 = 0 \Leftrightarrow (t - y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = t$ khi đó ta được $t^2 = 2t - 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 2 = 0$ phương trình vô nghiệm
TH2: $y = -2t$ khi đó
$$-2t^2 = 2t - 2 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow y = 1 \pm \sqrt{5}$$
Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1 - \sqrt{5}\right)$; $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; 1 + \sqrt{5}\right)$</td><td>2,0 điểm</td></tr>
<tr><td>Bài 6</td><td>Gọi N là trung điểm của AD. Do hình thang vuông nên MN vuông góc với AD. Phương trình đường thẳng MN
$$x + 2y - 4 = 0$$
Tọa độ N là giao điểm của AD và MN nên là nghiệm của hệ</td><td>2,0 điểm</td></tr>
</table>

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$$

A thuộc AD nên tọa độ A là $A(t; 2t + 1)$

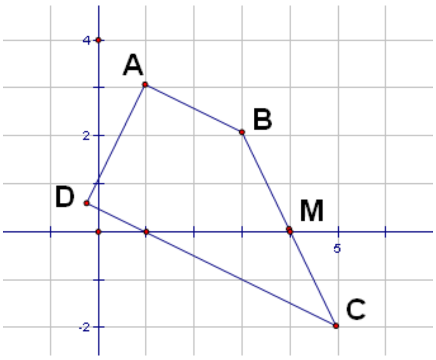
Diện tích hình thang bằng $54/5$ và $d(M; AD) = \frac{9}{\sqrt{5}}$

nên

$$S_{ABCD} = 2NA.\,d(M, AD) \Rightarrow NA = \frac{S_{ABCD}}{2.\,d(M, AD)} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(2t + 1 - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} \Leftrightarrow t = 1; t = -\frac{1}{5}$$

Vậy tọa độ hai điểm A và D là $(1; 3)$ *hay* $\left(-\frac{1}{5}; \frac{9}{5}\right)$.



Theo giả thiết ta được $A(1; 3)$

Đường thẳng AB vuông góc với AD nên

$$AB: x + 2y - 7 = 0$$

$$hay\ AB: \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = t \end{cases}; \Longrightarrow B(7 - 2t; t)$$

Ta lại có

$AB = BM \Leftrightarrow$

$\sqrt{(6 - 2t)^2 + (t - 3)^2} = \sqrt{(-3 + 2t)^2 + t^2}$

$\Leftrightarrow 5t^2 - 30t + 45 = 5t^2 - 12t + 9 \Leftrightarrow t = 2 \Longrightarrow B(3; 2)$

M là trung điểm của BC nên $C(5; -2)$

Vậy tọa độ hai điểm cần tìm là $B(3; 2)$; $C(5; -2)$

Bài 7 — 3,0 điểm

Trường hợp 1: *Đoàn thứ nhất có hai người nhận thưởng đều là người Việt Nam*

Chọn 2 người Việt Nam trong 6 người Việt Nam có C_6^2 cách chọn

Chọn 2 người ở đoàn thứ nhất nhận thưởng có C_{18}^2 cách chọn

Xác xuất để đoàn thứ nhất có 2 người Việt Nam nhận thưởng là

$$p_1 = \frac{C_6^2}{C_{18}^2} = \frac{6.5}{18.17} = \frac{5}{51}$$

Trường hợp 2: *Đoàn thứ hai có hai người nhận thưởng đều là người Việt Nam*

Chọn 2 người Việt Nam trong 3 người Việt nam có C_3^2 cách chọn

Chọn 2 người ở đoàn thứ hai nhận thưởng có C_{12}^2 cách chọn.

Xác xuất để đoàn thứ hai có 2 người Việt Nam nhận thưởng là

$$p_2 = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} = \frac{3.2}{12.11} = \frac{1}{22}$$

Trường hợp 3: *Mỗi đoàn có đúng 1 người Việt Nam nhận thưởng*

Chọn 2 người trong đó có đúng 1 người Việt Nam ở đoàn 1 có $C_6^1.C_{12}^1$ cách chọn trong C_{18}^2 cách chọn 2 người của đoàn thứ nhất.

Xác xuất để đoàn thứ nhất có đúng một người Việt Nam nhận thưởng là

$$p_3 = \frac{C_6^1.C_{12}^1}{C_{18}^2} = \frac{6.12.2}{18.17} = \frac{8}{17}$$

Tương tự xác xuất để đoàn thứ hai có đúng một người Việt Nam nhận thưởng là

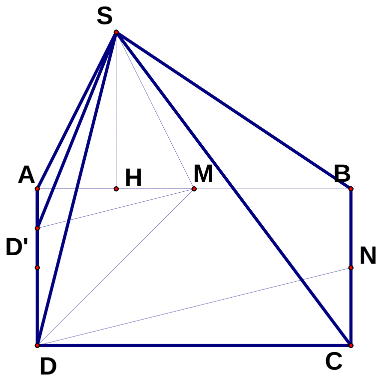
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$p_4 = \frac{C_3^1.C_9^1}{C_{12}^2} = \frac{3.9.2}{12.11} = \frac{9}{22}$$

Theo công thức xác xuất ta có xác xuất để có hai người nhận thưởng đều là người Việt Nam là

$$p = p_1 + p_2 - p_1p_2 + p_3.p_4 = \frac{5}{51} + \frac{1}{22} - \frac{5}{51},\frac{1}{22} + \frac{8}{17}.\frac{9}{22}$$

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Bài 8</td>
<td>



Từ S kẻ SH vuông góc với (ABCD) do (SAB)⊥(ABCD) nên H thuộc AB.
Mặt khác tam giác SAB có ba cạnh $AB = 2a; SA = a; SB = a\sqrt{3}$ nên tam giác SAB vuông tại S , SH là đường cao

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{BMDN} = S_{ABCD} - S_{ADM} - S_{DCN} = 4a^2 - \frac{1}{2}a.2a - \frac{1}{2}a.2a = 2a^2$$

$$V_{S.BMDN} = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

</td>
<td>2,0 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>

Gọi D’ là điểm thuộc đoạn AD sao cho $AD' = \frac{1}{4}AD$ khi đó MD’//DN
Góc hợp bởi SM và DN chính là góc $\widehat{SMD'} = \alpha$
Hai tam giác MAD’ và SAD’ vuông tại A có hai cạnh góc vuông là $\frac{a}{2}$ và a

$$SD' = MD' = \sqrt{AM^2 + AD'^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SMD’ ta được

$$SD'^2 = SM^2 + MD'^2 - 2SM.MD'.\cos\alpha$$

$$\frac{5a^2}{4} = a^2 + \frac{5a^2}{4} - 2.a.\frac{a\sqrt{5}}{2}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

</td>
<td>1,0 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>

Ta có mp(SMD’) // DN nên khoảng cách giữa hai đường DN và SM là khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SMD’).

$$V_{SDD'M} = \frac{1}{3}SH.S_{DD'M} = \frac{1}{3}SH.(S_{ADM} - S'_{ADM}) = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{SMD'} = \frac{1}{2}SM.MD'.\sin\alpha = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{5}}{2}.\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{2}$$

Vậy $d(SM,DN) = \frac{3V_{SDD'M}}{S_{SMD'}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.\frac{2}{a^2} = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$

</td>
<td>1,0 điểm</td>
</tr>
</table>

B. HƯỚNG DẪN CHẤM

+ Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

+ Điểm từng câu có thể chia nhỏ đến 0,25 và không làm tròn.